Digitized by Google

B. WESTERMANN & Co.
NEW-YORK
290 Broadway

KE 31709 (2)

HARVARD
COLLEGE
LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Dr. *Carl Friedrich Naumann's*

Lehrbuch

der reinen und angewandten

Krystallographie.

Zweiter Band.

Digitized by Google

Digitized by Google

Lehrbuch

der

reinen und angewandten

Krystallographie

von

Dr. *Carl Friedrich Naumann*,

Professor an der Bergakademie zu Freiberg.

In zwei Bänden.

Zweiter Band.

Mit 17 Kupfertafeln.

Leipzig:

F. A. Brockhaus.

1830.

Digitized by Google

KE 31709 (2)
~~Geol 7658.30.3~~

HARVARD COLLEGE
1936
LIBRARY

Transferred from
Bussey Institute

Digitized by Google

Vorwort.

Bei der gegenwärtigen Erscheinung des zweiten Bandes meiner Krystallographie kann ich nicht umhin, es besonders zu erwähnen, dass ich für die Beschreibung der meisten Zwillingskrystalle die trefflichen Abhandlungen und Zeichnungen von Haidinger im *Edinburgh Journal of science*, so wie manche Zeichnungen und Beschreibungen von Mohs, Rose, Weiss u. a., für die Lehre von der Krystallmessung Kupffers gekrönte Preisschrift, und für die Lehre von dem diklinoëdrischen Systeme die bekannte Abhandlung Mitscherlichs benutzt habe. Auch kam mir Burhennes wichtige Arbeit über die Zwillingskrystalle noch zeitig genug in die Hände, um dieselbe wenigstens nachträglich berücksichtigen zu können. Dass ich in der Lehre von der Zeichnung Neumanns graphische Methode nicht erwähnte, war natürlich, weil

Digitized by Google

selbige keine **Bilder** der Krystallformen, sondern nur Uebersichten der Zonenverhältnisse gewährt, und also, ungeachtet ihrer theoretischen Bedeutsamkeit, auf diesen Theil der angewandten Krystallographie ohne besondern Einfluss ist.

Für die Realität der, von mir vielleicht etwas zu kategorisch eingeführten schiefwinkligen Axensysteme werden sehr genaue Messungen, besonders aber ein tieferes Studium der Zwillingskrystalle den zuverlässigsten Prüfstein liefern; die von mir in §. 449 angeführten Gründe sollen die Frage keineswegs erschöpfen, wenn sie gleich sehr erhebliche Zweifel gegen die Naturgemässheit orthometrischer Axen für die fraglichen Krystallreihen veranlassen müssen.

Die Materialien zur angewandten Krystallographie sind, obwohl ich Vieles zurückbehalten, dennoch so bedeutend angewachsen, dass ich meinen anfänglichen Wunsch aufgeben musste, das Werk mit einer Uebersicht der Literatur der Wissenschaft zu beschliessen, weil ich damit nicht ein blosses Verzeichniss von Büchertiteln beabsichtigen konnte, und daher den zweiten Band wenigstens noch um 8 — 10 Bogen hätte vermehren müssen. Vielleicht ist es

Digitized by Google

mir vergönnt, später einmal eine ausführlichere Arbeit über die Literargeschichte der Krystallographie zu liefern.

Möge sich übrigens gegenwärtiger Versuch, die reine und angewandte Krystallographie in einer systematischen Form mit einiger Vollständigkeit darzustellen, einer nachsichtsvollen Aufnahme zu erfreuen haben.

Carl Naumann.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vierter Abschnitt.

Vom rhombischen Systeme.

Erstes Capitel.

Von den einzelen Gestalten des rhombischen Systemes.

§. 408.

Hauptaxe, Stellung, einfache Gestalten.

Das rhombische System *) ist nach §. 43 der Inbegriff aller derjenigen Gestalten, deren geometrischer Grundcharakter durch drei, auf einander rechtwinklige, aber durchgängig ungleiche Axen ausgesprochen ist. Der von Breithaupt vorgeschlagene Name bezieht sich auf die Figur der Mittelquerschnitte sämmtlicher Gestalten dieses Systemes, indem dieselben entweder Rhomben, oder doch solche Figuren sind, in oder um welche sich Rhomben beschreiben lassen. Die Hauptaxe ist relativ (§. 41 und 42); auch lassen sich bis jetzt vom blos krystallographischen Gesichtspuncte aus keine allgemeinen Kriterien für die Wahl derselben entdecken, weshalb sie nach anderen, in den physischen Eigenschaften begründeten Verhältnissen zu bestimmen ist. Die Krystallographie kann nur

*) Prismatisches System nach Mohs, zwei-und-zwei-gliedriges System nach Weiss, trimetrisches System nach Hausmann.

Digitized by Google

etwa die Regel aufstellen, dass für jede rhombische Krystallreihe diejenige Axe zur Hauptaxe erwählt werden muss, nach welcher die Combinationen derselben in den einfachsten und gefälligsten Verhältnissen erscheinen. Uebrigens versteht sich von selbst, dass die einmal gewählte Hauptaxe für eine und dieselbe Krystallreihe consequent beizubehalten ist (§. 42).

Nachdem die Hauptaxe gewählt worden, bestimmen sich die beiden andern Axen als zwei ungleichwerthige Nebenaxen, und die durch sie gehende Coordinatebene als rhombische Basis.

Von einfachen geschlossenen Gestalten hat dieses System nur zweierlei, nämlich rhombische Pyramiden und rhombische Sphenoide, aufzuweisen, von welchen jedoch zumal die ersteren in grosser Mannichfaltigkeit und wesentlich verschiedenen Stellungsverhältnissen vorkommen. Von offenen, oder unendlichen Gestalten erscheinen verticale und zweierlei verschiedene horizontale Prismen, sowie die drei, den Coordinatebenen des Axensystemes entsprechenden Flächenpaare. Da aber alle diese offenen Gestalten nur als die Gränzgestalten der Pyramiden oder Sphenoide gelten, so können sie auch erst im zweiten Capitel in Betrachtung kommen.

§. 409

Rhombische Pyramiden.

Syn. Ungleichschenklige vierseitige Pyramiden, Mohs; zwei-und-zwei-gliedrige Oktaëder, Weiss; Rhombenoktaëder, Bernhardi, Weiss, Hausmann.

Die rhombischen Pyramiden, Fig. 471 u. 472, sind von acht ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen; sie haben 12 Kanten und 6 Ecke.

Die Kanten sind symmetrisch und dreierlei: 4 kürzere, stumpfere Polkanten im Hauptschnitte durch die kleinere Nebenaxe; 4 längere, schärfere Polkanten

Digitized by Google

im Hauptschnitte durch die grössere Nebenaxe, und 4 Mittelkanten in der Ebene der Basis.

Die Ecke sind rhombisch und gleichfalls dreierlei: 2 Polecke an den Endpuncten der Hauptaxe; 2 stumpfere Mittelecke an den Endpuncten der kleineren Nebenaxe, und 2 spitzere Mittelecke an den Endpuncten der grösseren Nebenaxe.

Die Querschnitte sind Rhomben.

§. 410.

Rhombische Sphenoide.

Syn. Rhombische Sphenoëder, Breithaupt.

Die rhombischen Sphenoide Fig. 473 u. 474 sind von vier ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, sondern im Zickzack auf- und absteigen; sie haben 6 Kanten und 4 Ecke.

Die Kanten sind unregelmässig und dreierlei: 2 horizontale Pol- oder Endkanten; 2 kürzere schärfere, und 2 längere stumpfere Mittel- oder Seitenkanten.

Die Ecke sind nur einerlei, unregelmässig dreiflächig.

Die Pole der Hauptaxe fallen in die Mitte der horizontalen Endkanten; die Nebenaxen verbinden die Mittelpuncte je zweier gegenüberliegender Seitenkanten.

Die Querschnitte sind Rhomboide, der Mittelquerschnitt jedoch ein Rhombus.

§. 411.

Holoëdrische und hemiëdrische Gestalten.

Vergleicht man die Symmetrieverhältnisse der beiden Arten von geschlossenen Gestalten, so fällt es in die Augen, dass die rhombischen Pyramiden einen weit höheren Grad von Symmetrie zeigen, als die

Digitized by Google

rhombischen Sphenoide, und dass die letzteren, schon wegen des mangelnden Flächenparallelismus, nicht als holoëdrische, sondern als geneigtflächig-hemiëdrische Gestalten betrachtet werden können. Es giebt daher in diesem Systeme nur eine geschlossene holoëdrische, und ebenso nur eine geschlossene hemiëdrische Gestalt; indess wird diese scheinbare Armuth an Arten geschlossener Gestalten durch eine grössere Mannichfaltigkeit wesentlich verschiedener Varietäten aufgewogen, welchen ebenso viele wesentlich verschiedene offene Gränzgestalten entsprechen.

Zweites Capitel.

Von der Ableitung der rhombischen Gestalten.

A. Ableitung der holoëdrischen Gestalten.

§. 412.

Grundgestalt, Diagonalen, Zwischenaxen.

Da alle rhombische Pyramiden ein dem geometrischen Grundcharakter des Systemes angemessenes Verhältniss der Parameter haben, weil dieses Verhältniss jedenfalls mit dem Verhältnisse der Axen identisch ist, so kann auch jede dergleichen Pyramide aus einer gegebenen Krystallreihe zur Grundgestalt gewählt werden. Wie also bereits die Bestimmung der Hauptaxe, so ist noch weit mehr die Bestimmung der Grundgestalt der Willkür unterworfen; auch kann die Krystallographie, zur Beschränkung dieser Willkür, für die Wahl der Grundgestalt einer gegebenen Krystallreihe nur eine ähnliche relative Regel aufstellen, wie für die Wahl der Hauptaxe, dass nämlich diejenige Pyramide zur Grundgestalt erwählt wer-

Digitized by Google

den müsse, welche die einfachste Bezeichnung der übrigen Gestalten und die leichteste Entwicklung ihrer Combinationen gewährt. In gegenwärtiger, allgemeiner Darstellung des Systemes denken wir daher irgend eine rhombische Pyramide als Grundgestalt, bezeichnen sie mit P, und setzen das Verhältniss ihrer Hauptaxe zur grösseren und kleineren Nebenaxe $= a : b : c$, von welchen Grössen *in praxi* jedenfalls eine $= 1$ genommen werden kann.

Um sich jedoch in den, nach verschiedenen Richtungen zu verfolgenden Ableitungen gehörig zu orientiren, dazu wird die Feststellung einiger Ausdrücke nöthig, welche der Nomenclatur der abzuleitenden Gestalten zu Grunde liegen. Für die Grundgestalt P einer jeden rhombischen Krystallreihe brauchen wir künftig statt der Ausdrücke kürzere und längere Nebenaxe die Worte Brachydiagonale und Makrodiagonale*), wie denn auch diese Linien in der That die Diagonalen der rhombischen Basis von P bilden. Die beiden, in der Ebene der Basis durch den Mittelpunct und die Halbirungspuncte der Mittelkanten von P gehenden Linien nennen wir die Zwischenaxen; die Ebene durch die Hauptaxe und Makrodiagonale den makrodiagonalen, die Ebene durch die Hauptaxe und Brachydiagonale den brachydiagonalen Hauptschnitt. Diese Begriffe des makro- und brachydiagonalen Hauptschnittes werden unverändert auf alle möglichen abzuleitenden Gestalten übergetragen; auch unterscheiden wir die bei-

---

*) Es ist, um Verwirrungen zu vermeiden, ganz besonders darauf zu achten, dass diese beiden Worte jederzeit nur von den Diagonalen der Grundgestalt zu verstehen sind; daher ist es sehr häufig der Fall, dass die längere Nebenaxe einer abgeleiteten Pyramide in die Brachydiagonale, und ihre kürzere Nebenaxe in die Makrodiagonale fällt.

Digitized by Google

derlei Polkanten sämmtlicher Pyramiden als **makrodiagonale** und **brachydiagonale Polkanten**, je nachdem sie in den einen oder den andern Hauptschnitt fallen, so dass sich diese Benennungen nicht auf die **Grösse** der Nebenaxen oder Diagonalen in den abgeleiteten Gestalten selbst, sondern auf die **Lage** derselben in den, nach den Diagonalen der Grundgestalt benannten, Hauptschnitten beziehen.

§. 413.

Hauptreihe der rhombischen Pyramiden.

Aus der Grundgestalt P lässt sich eine Reihe rhombischer Pyramiden von derselben Basis und Stellung ableiten.

Man vervielfache, bei constanten Diagonalen, die Hauptaxe von P nach einem rationalen Coëfficienten m, welcher theils > 1, theils < 1, und lege für jeden besonderen Werth von m in jede Mittelkante von P zwei Ebenen, von welchen die eine den oberen, die andere den unteren Endpunct der so verlängerten oder verkürzten Hauptaxe trifft, so resultirt jedenfalls eine andere rhombische Pyramide mP, welche entweder spitzer oder flacher als P seyn, aber dieselbe Basis und Flächenstellung haben wird. Da nun m einerseits bis ∞ zunehmen, anderseits bis o abnehmen kann, so erhält man folgenden, nach den successiv zunehmenden Werthen von m in das Schema einer Reihe geordneten Inbegriff von Pyramiden:

$$\begin{array}{ccc} m < 1 & & m > 1 \\ o\text{P} \ldots\ldots m\text{P} \ldots\ldots & \text{P} & \ldots\ldots m\text{P} \ldots\ldots \infty\text{P} \end{array}$$

Diese Reihe, deren Glieder durch Identität der Basis und Flächenstellung mit einander und mit der Grundgestalt verbunden sind, nennen wir die **Hauptreihe** des Systemes; die Glieder linker Hand von P sind lauter flachere, die Glieder rechter Hand lauter spitzere Pyramiden als die Grundgestalt; die Gränz-

Digitized by Google

glieder sind einerseits oP, d. h. die Basis, oder jede ihr parallele Fläche (vergl. §. 205), anderseits ∞P, oder ein verticales, rhombisches Prisma von indefiniter Länge. Beide Gränzgestalten können natürlich nicht für sich, sondern nur in Combination mit einander oder mit anderen Gestalten erscheinen.

Anmerkung. Ein für die folgenden Ableitungen besonders wichtiger Umstand ist es, dass in allen Gestalten der Hauptreihe die Makrodiagonale und Brachydiagonale ihre ursprünglichen Werthe unverändert beibehalten.

§. 414.

Regel für die weitere Ableitung.

Weil die Diagonalen der Grundgestalt ungleichwerthig sind, so sind sie auch völlig unabhängig von einander, und, als veränderliche Grössen gedacht, eine jede für sich veränderlich. Dieser Umstand führt bei den ferneren Ableitungen im Gebiete des rhombischen Systemes anf Resultate, welche dessen Verschiedenheit vom tetragonalen Systeme ganz besonders auffallend machen. Wir werden nämlich diese Ableitungen nur dann dem Charakter des Systemes gemäss vornehmen, wenn wir in den Gliedern der Hauptreihe nicht beide Diagonalen zugleich, sondern nur je eine derselben nach einem rationalen Coëfficienten n vergrössern, so dass wir aus jedem mP auf zwei Inbegriffe von Gestalten gelangen, von welchen der eine durch Vergrösserung der Makrodiagonale bei constanter Brachydiagonale, der andere durch Vergrösserung der Brachydiagonale bei constanter Makrodiagonale erhalten wird. Wir nennen jene Gestalten makrodiagonale, diese brachydiagonale Gestalten, indem sie den Namen derjenigen Diagonale führen, durch deren Vergrösserung sie abgeleitet wurden. Weil aber diese Zweierleiheit der aus mP ab-

Digitized by Google

geleiteten Gestalten auch in der Bezeichnung hervorgehoben werden muss, so unterscheiden wir die Zeichen der makrodiagonalen und brachydiagonalen Gestalten dadurch, dass wir über das Symbol P der Grundgestalt für jene das prosodische Zeichen der Länge –, für diese dagegen das prosodische Zeichen der Kürze ‿ setzen, ohne jedoch sonst etwas an der bereits im Tetragonalsysteme gebrauchten Bezeichnung zu ändern.

§. 415.

Reihen der makrodiagonalen und brachydiagonalen Gestalten.

Aus jedem Gliede *m*P der Hauptreihe lassen sich zwei verschiedene Reihen von Pyramiden ableiten, in welchen einerseits die Brachydiagonale, anderseits die Makrodiagonale der Grundgestalt noch unverändert enthalten ist.

Man vervielfache zuvörderst die Makrodiagonale von *m*P nach einem rationalen Coëfficienten *n*, der > 1, und verbinde die Endpuncte der so verlängerten Makrodiagonale mit den Endpuncten der unverändert gebliebenen Brachydiagonale durch gerade Linien, so wird jedenfalls ein Rhombus construirt, dessen eine Diagonale mit der Brachydiagonale der Grundgestalt identisch ist. In jede Seite dieses Rhombus, als der Basis der abzuleitenden Gestalt, lege man nun zwei Ebenen, von welchen die eine durch den oberen, die andere durch den unteren Pol von *m*P geht, so resultirt eine rhombische Pyramide, deren brachydiagonaler Hauptschnitt identisch mit dem gleichnamigen Hauptschnitte von *m*P, während der andere Hauptschnitt und die Basis zwar noch rhombische, aber von den gleichnamigen Schnitten in *m*P ganz verschiedene Figuren geworden sind*). Das all-

*) Man kann dieselben Gestalten, ohne zuvor die neue rhom-

gemeine Zeichen der so abgeleiteten Pyramiden wird $m\bar{P}n$, und da n aller möglichen rationalen Werthe von 1 bis ∞ fähig ist, so lassen sich die sämmtlichen, aus einem und demselben mP abzuleitenden makrodiagonalen Gestalten unter dem Schema folgender Reihe darstellen:

$$mP \ldots\ldots\ldots m\bar{P}n \ldots\ldots\ldots m\bar{P}\infty$$

Da sich nun für $n = \infty$ der, als Basis der Gestalt $m\bar{P}n$ zu construirende Rhombus in zwei, der Makrodiagonale parallele Linien verwandelt, so fallen nothwendig je zwei Flächen von $m\bar{P}\infty$ in eine einzige, der Makrodiagonale parallele Ebene, und die abgeleitete Gestalt selbst wird ein Inbegriff von vier gleichwerthigen, der Makrodiagonale parallelen Flächen, d. h, ein horizontales Prisma (§. 56.), dessen Querschnitt mit dem brachydiagonalen Hauptschnitte von mP identisch ist.

Ebenso ergiebt sich, indem man bei constanter Makrodiagonale die Brachydiagonale von mP nach einem Coëfficienten n vervielfacht, durch Anwendung derselben Construction eine Reihe brachydiagonaler Gestalten

$$mP \ldots\ldots\ldots m\breve{P}n \ldots\ldots\ldots m\breve{P}\infty$$

deren Glieder insgesammt den makrodiagonalen Hauptschnitt mit mP gemein haben, während der brachydiagonale Hauptschnitt sowohl als die Basis zwar noch rhombische, aber von den gleichnamigen Schnitten in mP ganz verschiedene Figuren geworden sind. Das Gränzglied $m\breve{P}\infty$ ist wiederum ein horizontales, aber der Brachydiagonale paralleles Prisma, dessen

---

bische Basis zu construiren, auch so ableiten, dass man in jede brachydiagonale Polkante von mP zwei Ebenen legt, von welchen die eine den einen, die andre den andern Endpunct der verlängerten Makrodiagonale trifft.

Digitized by Google

Querschnitt identisch mit dem makrodiagonalen Hauptschnitte von mP.

§. 416.

Fortsetzung.

Wie aus jedem mP, so werden sich auch aus dem Prisma ∞P durch Veränderung entweder der Makrodiagonale oder der Brachydiagonale zwei Reihen verticaler Prismen ableiten lassen, von welchen die eine

$$\infty P \ldots\ldots \infty\bar{P}n \ldots\ldots \infty\bar{P}\infty$$

lauter makrodiagonale, die andere

$$\infty P \ldots\ldots \infty\breve{P}n \ldots\ldots \infty\breve{P}\infty$$

lauter brachydiagonale Prismen enthält. Das Gränzglied jeder dieser Reihen ist ein verticales Flächenpaar, und zwar $\infty\bar{P}\infty$ das makrodiagonale Flächenpaar, welches dem makrodiagonalen Hauptschnitte, $\infty\breve{P}\infty$ das brachydiagonale Flächenpaar, welches dem brachydiagonalen Hauptschnitte parallel läuft, weil für jenes die Axe und Makrodiagonale, für dieses die Axe und Brachydiagonale der Grundgestalt unendlich gross geworden sind. Die Combination $\infty\bar{P}\infty.\infty\breve{P}\infty.o$P stellt daher ein rechtwinkliges Parallelepipedon dar, welches sowohl vom Hexaëder ∞O∞, als auch von der tetragonalen Combination ∞P.oP wesentlich verschieden ist, da seine Flächen nicht nur dreifach verschiedene krystallographische Bedeutung, sondern auch in der Natur selbst eine dreifach verschiedene physische Beschaffenheit haben.

§. 417.

Schema des rhombischen Systemes.

Durch die Ableitungen der vorhergehenden §§. ist der Inbegriff aller, aus einer rhombischen Pyramide abzuleitenden Gestalten so vollständig erschöpft, dass

Digitized by Google

keine Gestalt irgend einer rhombischen Krystallreihe nachgewiesen werden kann, welche nicht ein Glied einer oder der anderen der gefundenen Reihen wäre. Aus der Zusammenstellung dieser Reihen zu einem Ganzen ergiebt sich folgendes Schema, welches uns mit einem Blicke nicht nur den Gestaltenreichthum des rhombischen Systemes überhaupt, sondern auch die mannichfaltigen Beziehungen und Verknüpfungen der einzelen Gestalten insbesondere übersehen lässt:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & m<1 & & & & m>1 & & \\
o\bar{P}\infty & \cdots & m\bar{P}\infty & \cdots & \bar{P}\infty & \cdots & m\bar{P}\infty & \cdots & \infty\bar{P}\infty \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
o\bar{P}n & \cdots & m\bar{P}n & \cdots & \bar{P}n & \cdots & m\bar{P}n & \cdots & \infty\bar{P}n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oP & \cdots & m\bar{P} & \cdots & P & \cdots & mP & \cdots & \infty P \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
o\breve{P}n & \cdots & m\breve{P}n & \cdots & \breve{P}n & \cdots & m\breve{P}n & \cdots & \infty Pn \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
o\breve{P}\infty & \cdots & m\breve{P}\infty & \cdots & \breve{P}\infty & \cdots & m\breve{P}\infty & \cdots & \infty\breve{P}\infty
\end{array}
$$

Zu diesem Schema ergeben sich unmittelbar aus seinem Anblicke folgende Erläuterungen:

1) Die mittelste horizontale Reihe, oder die H a u p t r e i h e des Systemes enthält lauter Pyramiden sowie das verticale Prisma von gleichen und ähnlichen Mittelquerschnitten mit der Grundgestalt P, welche den Mittelpunct des ganzen Schemas einnimmt.

2) Das ganze Schema wird durch die Hauptreihe in zwei Hälften getheilt, von welchen wir die eine die makrodiagonale, die andere die brachydiagonale Hälfte nennen; die Hauptreihe selbst lässt sich eben sowohl zu der einen, wie zu der andern Hälfte rechnen; sie bildet die Anfangsreihe

für beide Hälften, und hat insofern einen neutralen oder amphoteren Charakter.

3) Die oberste horizontale Reihe, welche wir die makrodiagonale Nebenreihe nennen, enthält alle diejenigen horizontalen Prismen sowie dasjenige verticale Flächenpaar, deren Flächen der Makrodiagonale der Grundgestalt parallel sind; oder die makrodiagonalen horizontalen Prismen und das makrodiagonale Flächenpaar.

4) Die unterste horizontale Reihe, welche wir die brachydiagonale Nebenreihe nennen, enthält alle diejenigen horizontalen Prismen, sowie dasjenige verticale Flächenpaar, deren Flächen der Brachydiagonale der Grundgestalt parallel sind; oder die brachydiagonalen horizontalen Prismen und das brachydiagonale Flächenpaar.

5) Die mittleren horizontalen Reihen der oberen Hälfte des Schemas, welche wir die makrodiagonalen Zwischenreihen nennen, enthalten alle makrodiagonalen Pyramiden und die gleichnamigen verticalen Prismen.

6) Die mittleren horizontalen Reihen der unteren Hälfte des Schemas, welche wir die brachydiagonalen Zwischenreihen nennen, enthalten alle brachydiagonalen Pyramiden, und die gleichnamigen verticalen Prismen.

7) Jede einzele horizontale Reihe enthält lauter Gestalten von ähnlichen Querschnitten.

8) Jede einzele verticale Reihe endlich enthält lauter Gestalten von gleicher Axenlänge, und zerfällt, wie das ganze Schema, in eine makrodiagonale und eine brachydiagonale Hälfte; jene enthält lauter Gestalten, in welchen der brachydiagonale, diese lauter Gestalten, in welchen der makrodiagonale Hauptschnitt des entsprechenden Gliedes der Hauptreihe noch vorhanden ist. Die

Digitized by Google

äusserste verticale Reihe rechter Hand enthält die sämmtlichen verticalen Prismen.

B. *Ableitung der hemiëdrischen Gestalten.*

§. 418.

Ableitung der rhombischen Sphenoide.

Die rhombischen Sphenoide sind die hemiëdrischen Gestalten der rhombischen Pyramiden nach den abwechselnden einzelen Flächen.

Es verhalten sich die rhombischen Pyramiden rücksichtlich ihrer Fähigkeit zur Hemiëdrie gänzlich so wie das Oktaëder und die tetragonalen Pyramiden; man kann daher auch schon erwarten, dass die aus ihnen abzuleitende hemiëdrische Gestalt einen tetraëder-ähnlichen Habitus besitzen werde. Und so ist es auch in der That; denn da jede bleibende Fläche mit ihren drei Nachbarflächen zum Durchschnitte kommt, so wird sie wiederum ein Dreieck, und daher die neue Gestalt von vier Dreiecken umschlossen seyn. Diese Dreiecke müssen aber den dreiseitigen Flächen der Muttergestalt ähnlich seyn, wiewohl sie eine umgekehrte Stellung annehmen, weil die an der Stelle jedes Eckes einer bleibenden Fläche entstehende neue Kante der, demselben Ecke gegenüberliegenden, ursprünglichen Kante dieser Fläche parallel wird. Daher bilden sich auch, neben vier geneigten Mittelkanten, zwei horizontale Polkanten aus, und die hemiëdrische Gestalt wird eine von vier ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalt, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, d. h. ein rhombisches Sphenoid (§. 410.).

Jede rhombische Pyramide ist der Hemiëdrie fähig, und giebt daher zwei, in verwendeter Stellung befindliche Sphenoide, deren Zeichen allgemein

$$+\frac{m\breve{\bar{P}}n}{2} \text{ und } -\frac{m\breve{\bar{P}}n}{2}.$$

Digitized by Google

Für $m = \infty$ oder $n = \infty$ verwandeln sich die Sphenoide in verticale oder horizontale Prismen, welche mit allen vier Flächen erscheinen, von denen jedoch die abwechselnden eine verschiedene Bedeutung haben. So sind z. B. in den verticalen Prismen die abwechselnden Flächen auf die obere oder untere Gestalthälfte zu beziehen, was in dem Falle, da eine rhombische Krystallreihe zugleich der Hemiëdrie und dem Hemimorphismus unterworfen wäre, zur Folge haben würde, dass diese verticalen Prismen nur mit je zwei gegenüberliegenden Flächen, als parallele Flächenpaare aufträten.

Drittes Capitel.

Von der Berechnung der rhombischen Gestalten.

§. 419.

Zwischenaxen.

Wiewohl in der Erscheinung der rhombischen Gestalten keine Zwischenaxen indicirt sind, so ist es doch für ihre Berechnung und Zeichnung vortheilhaft, dergleichen einzuführen. Wir wählen dazu nach §. 412 diejenigen Linien, welche sich in der Ebene der Basis durch den Mittelpunct den Mittelkanten der Grundgestalt parallel ziehen lassen; ihre Gleichungen sind daher

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \; x = 0$$

und

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \; x = 0$$

Für jede $m\bar{P}n$ ist die Gleichung der, in den Octanten der positiven Halbaxen fallenden, Fläche:

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{nb} + \frac{z}{c} = 1$$

Digitized by Google

und für jede $m\breve{P}n$ die Gleichung derselben Fläche:

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{b} + \frac{z}{nc} = 1$$

Die Intersectionen dieser Flächen mit der Basis kommen mit der ersten Zwischenaxe zum Durchschnitte, und die Coordinaten des Durchschnittspunctes oder des Endpunctes dieser Zwischenaxe bestimmen sich also:

$$y = \frac{nb}{n+1},\quad z = \frac{nc}{n+1}$$

daher die Centraldistanz dieses Punctes, oder die Länge der Zwischenaxe:

$$R = \frac{n}{n+1}\sqrt{b^2+c^2}$$

In der Grundgestalt selbst ist $R = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}$; betrachtet man diesen Werth als den Grundwerth, so wird der Coëfficient der Zwischenaxe für jede andre Gestalt $m\bar{\bar{P}}n$

$$r = \frac{2n}{n+1}$$

wie in den bisherigen Krystallsystemen.

§. 420.

Flächennormale.

Alle ferneren Berechnungen lassen sich, der Allgemeinheit unbeschadet, und zur grossen Erleichterung der Uebersicht, auf die Grundgestalt allein beschränken, weil alle übrigen Gestalten der A r t nach mit der Grundgestalt identisch sind.

Die Gleichung der in den Octanten der positiven Halbaxen fallenden Fläche F von P ist:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Die Gleichungen den Flächennormale sind daher

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0 \text{ und } \frac{y}{c} - \frac{z}{b} = 0$$

Sucht man hieraus die Coordinaten des Dnrchschnitts-

punctes, so findet sich endlich die Länge der Flächennormale

$$N = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2}} = \frac{abc}{M}$$

ganz wie in §. 21.

§. 421.

Kantenlinien.

Bezeichnen wir in der Pyramide P
die makrodiagonalen Polkanten mit X
die brachydiagonalen Polkanten mit Y
die Mittelkanten mit . . . . Z

so folgt daraus, dass
X die Hypotenuse der Katheten a und c
Y - - - - - - - - - - a und b
Z - - - - - - - - - - b und c

die Länge der Kantenlinien

$$X = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$Y = \sqrt{a^2 + c^2}$$
$$Z = \sqrt{b^2 + c^2}$$

§. 422.

Volumen und Oberfläche.

Der Flächeninhalt der Basis von P ist $= 2bc$; die Höhe einer jeden der beiden einfachen Pyramiden, aus welchen man sich P zusammengesetzt denken kann, $= a$, und folglich das Volumen der ganzen Pyramide:

$$V = \tfrac{4}{3}abc$$

Da nun das Volumen auch eine bekannte Function der Flächennormale N und der Oberfläche S, so wird

$$S = \frac{3V}{N}$$

oder, nach Substitution der Werthe von N und V,

$$S = 4\sqrt{a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2} = 4M$$

und daher der Inhalt jeder einzelen Pyramidenfläche

$$\Delta = \tfrac{1}{8}S = \tfrac{1}{2}M$$

Digitized by Google

§. 423.

Flächenwinkel.

Wir bezeichnen die Flächenwinkel von P analog den ihnen gegenüberliegenden Kantenlinien mit ξ, v und ζ. Die Gleichungen dieser drei Kantenlinien sind für die Fläche F identisch mit den Gleichungen der Intersectionen dieser Fläche, also:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ und } z = 0$$

$$\frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 1 \text{ und } y = 0$$

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ und } x = 0$$

Durch successive Combination der Gleichungen je zweier dieser Kantenlinien gelangt man auf die Cosinus der ebenen Winkel; die Sinus finden sich nach der bekannten Regel, dass der Sinus jedes Dreieckwinkels gleich dem doppelten Flächeninhalte, dividirt durch das Product der diesen Winkel einschliessenden Seiten; so gelangt man endlich auf folgende Werthe der Tangenten:

$$tang\,\xi = \frac{M}{c^2}$$

$$tang\,v = \frac{M}{b^2}$$

$$tang\,\zeta = \frac{M}{a^2}$$

aus welchen die Proportion folgt:

$$cot\,\xi : cot\,v : cot\,\zeta = c^2 : b^2 : a^2$$

§. 424.

Kantenwinkel.

Setzen wir wie bisher die Gleichung der Fläche F

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

so sind die Gleichungen der drei Flächen F', F'' und F''', welche mit F die Kanten X, Y und Z bilden

$$\text{für } F' \ldots\ldots \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 1$$

$$\text{für } F'' \ldots\ldots \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\text{für } F''' \ldots -\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Die successive Combination der Parameter der Gleichungen von F und F', F und F'', F und F''' nach der bekannten Formel für $\cos W$ in §. 22. giebt sogleich:

$$\cos X = \frac{a^2b^2 - c^2a^2 - b^2c^2}{a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2}$$

$$\cos Y = \frac{c^2a^2 - a^2b^2 - b^2c^2}{a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2}$$

$$\cos Z = \frac{b^2c^2 - a^2b^2 - a^2c^2}{a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2}$$

also $\quad \cos X + \cos Y + \cos Z = -1$

Ebenso finden sich sehr leicht:

$$\cos \tfrac{1}{2} X = \frac{ab}{M}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} Y = \frac{ac}{M}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} Z = \frac{bc}{M}$$

woraus die Proportionen folgen:

$$\cos \tfrac{1}{2} X : \cos \tfrac{1}{2} Y = b : c$$
$$\cos \tfrac{1}{2} Z : \cos \tfrac{1}{2} X = c : a$$
$$\cos \tfrac{1}{2} Y : \cos \tfrac{1}{2} Z = a : b$$

endlich findet sich:

$$\tang \tfrac{1}{2} X = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} Y = \frac{b\sqrt{a^2 + c^2}}{ac}$$

Digitized by Google

$$tang\,\tfrac{1}{2}Z = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{bc}$$

Der Winkel je zweier gegenüberliegender Flächen eines Eckes ist gleich dem Supplemente derjenigen Kante, welche nicht zu demselben Ecke gehört; also der Winkel zweier gegenüberliegender Flächen

am Polecke . . . . $= 180° - Z$
am makrod. Mittelecke $= 180° - Y$
am brachyd. Mittelecke $= 180° - X$

§. 425.

Allgemeine Brauchbarkeit der gefundenen Resultate.

Die in den §§. 420—424 zunächst für die Grundgestalt berechneten Formeln sind aber allgemein gültig, sobald man auf die Veränderungen Rücksicht nimmt, welchen man das der Grundgestalt entsprechende Verhältniss $a:b:c$ unterwerfen muss, um auf irgend eine andre Gestalt unsers Schemas zu gelangen. Man hat nämlich

1) für jede andre Gestalt der Hauptreihe *ma* statt *a*,
2) für jede Gestalt der makrodiagonalen Hälfte des Schemas *ma* statt *a*, und *nb* statt *b*,
3) für jede Gestalt der brachydiagonalen Hälfte des Schemas *ma* statt *a*, und *nc* statt *c*

zu setzen, um dieselben Formeln für irgend ein *m*P, *m*P̄*n* oder *m*P̆*n* geltend zu machen. Weil die Resultate dieser einfachen Substitutionen jedenfalls aus den für P berechneten Formeln mit Leichtigkeit abzulesen sind, so ist die besondere Darstellung derselben für überflüssig zu erachten; daher folgen im nächsten §. nur noch die zur Berechnung der Prismen dienlicher Formeln, welche besonders häufig in Anwendung kommen.

Digitized by Google

§. 426.

Berechnung der verticalen und horizontalen Prismen.

Setzt man in den §§. 420 und 424 $a = \infty$, so folgt für das verticale Prisma ∞P:

$$N = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\cos X = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}$$

$$\cos Y = - \cos X$$

$$\cos Z = - 1$$

$$\tang \tfrac{1}{2} X = \frac{c}{b}, \quad \tang \tfrac{1}{2} Y = \frac{b}{c}$$

Setzt man ebendaselbst $c = \infty$, so folgt für das horizontale Prisma $\breve{\mathrm{P}}\infty$:

$$N = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos X = - 1$$

$$\cos Y = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\cos Z = - \cos Y$$

$$\tang \tfrac{1}{2} Y = \frac{b}{a}, \quad \tang \tfrac{1}{2} Z = \frac{a}{b}$$

Setzt man endlich $b = \infty$, so folgt für das horizontale Prisma $\bar{\mathrm{P}}\infty$:

$$N = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\cos X = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}$$

$$\cos Y = - 1$$

$$\cos Z = - \cos X$$

$$\tang \tfrac{1}{2} X = \frac{c}{a}, \quad \tang \tfrac{1}{2} Z = \frac{a}{c}$$

Für jedes andre horizontale Prisma $m\breve{\mathrm{P}}\infty$ oder $m\bar{\mathrm{P}}\infty$ setzt man nur ma statt a; für jedes brachydia-

Digitized by Google

gonale verticale Prisma $\infty\breve{P}n$ *nc* statt *c*, und für jedes makrodiagonale verticale Prisma $\infty\bar{P}n$ *nb* statt *b*.

§. 427.

Berechnung der Dimensionen einer rhombischen Pyramide.

Da jede rhombische Pyramide durch das Verhältniss $a' : b' : c'$ ihrer Dimensionen bestimmt wird, und eine dieser Grössen entweder gleich der Einheit, oder doch als bekannt anzunehmen ist, so setzt auch die Bestimmung jeder Pyramide (und folglich jeder Krystallreihe) dieses Systemes zwei, von einander unabhängige Beobachtungselemente voraus. Wie nun übrigens diese Elemente beschaffen seyn mögen, so kommt es zunächst immer darauf an, aus ihnen die ebenen Winkel zweier Hauptschnitte der Pyramide zu finden. Nennen wir nämlich

α die Neigung der makrod. Polk. zur Axe
β - - - - brachyd. - - -
γ - - - der Mittelkante zur Makrodiagonale

oder 2α die Polkante des brachyd. horiz. Prismas, 2β die Polkante des makrod. horiz. Prismas, und 2γ die makrod. Seitenkante des verticalen Prismas der Pyramide, so bestimmt sich das Verhältniss $a' : b' : c'$ derselben jedenfalls durch je zwei dieser Winkel, wie folgt:

1) aus α und β

$$a' : b' : c' = 1 : tang\,\alpha : tang\,\beta$$

2) aus α und γ

$$a' : b' : c' = cot\,\alpha : 1 : tang\,\gamma$$

3) aus β und γ

$$a' : b' : c' = cot\,\beta : cot\,\gamma : 1$$

Abstrahiren wir nun von den Combinationskanten, so werden von den sechs Winkeln X, Y, Z, α, β und γ jedenfalls zwei gegeben seyn müssen, um die Pyramide zu bestimmen; dies giebt im Allgemeinen folgende vier Fälle: es sind gegeben

Digitized by Google

A. zwei der Winkel X, Y, Z,
B. zwei der Winkel α, β und γ,
C. einer der Winkel X, Y und Z, und der dazu gehörige von den Winkeln α, β und γ,
D. einer der Winkel X, Y und Z, und einer der nicht dazu gehörigen von den Winkeln α, β und γ.

Im Falle A findet sich:
aus X und Y,

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}Y}{\sin\frac{1}{2}X}, \quad \cos\beta = \frac{\cos\frac{1}{2}X}{\sin\frac{1}{2}Y}$$

aus X und Z,

$$\sin\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}Z}{\sin\frac{1}{2}Y}, \quad \cos\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}X}{\sin\frac{1}{2}Z}$$

aus Y und Z,

$$\sin\beta = \frac{\cos\frac{1}{2}Z}{\sin\frac{1}{2}Y}, \quad \sin\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}Y}{\sin\frac{1}{2}Z}$$

Der Fall B ist unmittelbar durch die *sub* 1, 2 und 3 stehenden Proportionen erledigt.

Im Falle C findet sich:
aus X und α,

$$\tang\beta = \tang\tfrac{1}{2}X \sin\alpha$$

aus Y und β,

$$\tang\alpha = \tang\tfrac{1}{2}Y \sin\beta$$

aus Z und γ,

$$\cot\alpha = \tang\tfrac{1}{2}Z \sin\gamma$$

Endlich im Falle D findet man:
aus X und β oder γ,

$$\sin\alpha = \cot\tfrac{1}{2}X \tang\beta$$
$$\cos\alpha = \cot\tfrac{1}{2}X \tang\gamma$$

aus Y und α oder γ,

$$\sin\beta = \cot\tfrac{1}{2}Y \tang\alpha$$
$$\cos\beta = \cot\tfrac{1}{2}Y \cot\gamma$$

aus Z und α oder β,

$$\sin\gamma = \cot\tfrac{1}{2}Z \cot\alpha$$
$$\cos\gamma = \cot\tfrac{1}{2}Z \cot\beta$$

Digitized by Google

§. 428.

Berechnung von m und n aus dem Verhältnisse $a' : b' : c'$.

Die im vorigen § stehenden Formeln dienen zunächst zur Berechnung des Dimensionsverhältnisses $a' : b' : c'$ irgend einer Pyramide aus einer gegebenen rhombischen Krystallreihe; nun steht aber jede abgeleitete Pyramide zu der durch die Dimensionen a, b und c bestimmten Grundgestalt in dem Verhältnisse, dass

$$a' : b' : c' = ma : nb : c$$

oder $$- \; - \; - = ma : b : nc$$

Man wird also mittels des gefundenen Verhältnisses $a' : b' : c'$ sehr leicht zur Auffindung der Coëfficienten m und n gelangen, indem für jede makrodiagonale Gestalt $m\bar{P}n$

$$n = \frac{cb'}{bc'} \text{ und } m = \frac{ca'}{ac'}$$

für jede brachydiagonale Gestalt $m\breve{P}n$

$$n = \frac{bc'}{cb'} \text{ und } m = \frac{ba'}{ab'}$$

wird.

In manchen rhombischen Krystallreihen führt die Beobachtung auf ein merkwürdiges Verhältniss der gegenseitigen Abhängigkeit der Dimensionen der Grundgestalt. So findet z. B. für den Topas die Gleichung

$$b = a + c$$

für Cölestin, Baryt und Bleisulphat die Gleichung

$$2b = a + 2c$$

für Arragonit, Strontianit, Bleicarbonat u. a. die Gleichung

$$4b = 3(a + c)$$

Statt. Abgesehen von der theoretischen Bedeutsamkeit dieser Gleichungen gewähren solche auch den praktischen Vortheil, dass die genaue Bestimmung der Dimensionen einer solchen Krystallreihe, sobald

Digitized by Google

man das Gesetz ihrer gegenseitigen Abhängigkeit approximativ gefunden, nur von einer einzigen Messung abhängig gemacht, und in den Rechnungen manche Abkürzung gewonnen wird.

§. 429.

Berechnung der Coëfficienten von mP, $\breve{\bar{P}}n$ und $m\breve{\bar{P}}m$.

Weil die Pyramiden mP der Hauptreihe, die zur Grundgestalt gehörigen Pyramiden $\breve{P}n$ und $\bar{P}n$ der Zwischenreihen, und ausserdem noch die Pyramiden von der Form $m\breve{\bar{P}}m$ besonders häufig vorzukommen pflegen, so ist es bequem, die zur Berechnung ihrer Ableitungscoëfficienten dienlichen Formeln zur Hand zu haben. Diese Berechnung, welche jedenfalls nur einen Winkel der unbekannten Gestalt erfordert, wird am leichtesten geführt, wenn man dabei die bekannten Winkel X, Y, Z, α, β und γ der Grundgestalt P zu Hülfe nimmt, weshalb wir die analogen Winkel der unbekannten Gestalt zur Unterscheidung mit accentuirten Buchstaben bezeichnen wollen*).

A. Berechnung von m in der Pyramide mP, für welche $\gamma' = \gamma$; man findet:

aus $X' \ldots\ \cos\alpha' = \cot\tfrac{1}{2}X\ \tan\gamma$

und $m = \cot\alpha'\ \tan\alpha$

aus $Y' \ldots\ \cos\beta' = \cot\tfrac{1}{2}Y'\ \cot\gamma$

und $m = \cot\beta'\ \tan\beta$

aus $Z' \ldots\ m = \tan\tfrac{1}{2}Z'\ \cot\tfrac{1}{2}Z$

B. Berechnung von n in den Pyramiden $\breve{P}n$ und $\bar{P}n$; man findet:

1) für $\breve{P}n$, in welchen $\alpha' = \alpha$,

*) Es würde wegen dieser und andrer Berechnungen sehr vortheilhaft seyn, bei der speciellen Darstellung jeder rhombischen Krystallreihe ausser dem Verhältnisse $a : b : c$ und den Kantenwinkeln X, Y und Z auch die Winkel α, β und γ mitzutheilen.

Digitized by Google

aus X' .... $n = tang\,\frac{1}{2}X'\; cot\,\frac{1}{2}X$

aus Y' .... $sin\,\beta' = cot\,\frac{1}{2}Y'\; tang\,\alpha$

und $n = tang\,\beta'\; cot\,\beta$

aus Z' .... $sin\,\gamma' = cot\,\frac{1}{2}Z'\; cot\,\alpha$

und $n = tang\,\gamma'\; cot\,\gamma$

2) für $\bar{P}n$, in welchen $\beta' = \beta$

aus X' .... $sin\,\alpha' = cot\,\frac{1}{2}X'\; tang\,\beta$

und $n = tang\,\alpha'\; cot\,\alpha$

aus Y' .... $n = tang\,\frac{1}{2}Y'\; cot\,\frac{1}{2}Y$

aus Z' .... $cos\,\gamma' = cot\,\frac{1}{2}X'\; cot\,\beta$

und $n = cot\,\gamma'\; tang\,\gamma$

C. Berechnung von m in den Pyramiden $m\bar{P}m$ und $m\breve{P}m$; man findet:

1) für $m\bar{P}m$, in welchen $\alpha' = \alpha'$

aus X' .... $m = cot\,\frac{1}{2}X'\; tang\,\frac{1}{2}X$

aus Y' .... $sin\,\beta' = cot\,\frac{1}{2}Y'\; tang\,\alpha$

und $m = cot\,\beta'\; tang\,\beta$

aus Z' .... $sin\,\gamma' = cot\,\frac{1}{2}Z'\; cot\,\alpha$

und $m = cot\,\gamma'\; tang\,\gamma$

2) für $m\breve{P}m$, in welchen $\beta' = \beta$,

aus X' .... $sin\,\alpha' = cot\,\frac{1}{2}X'\; tang\,\beta$

und $m = cot\,\alpha'\; tang\,\alpha$

aus Y' .... $m = cot\,\frac{1}{2}Y'\; tang\,\frac{1}{2}Y$

aus Z' .... $cos\,\gamma' = cot\,\frac{1}{2}Z'\; cot\,\beta$

und $m = tang\,\gamma'\; cot\,\gamma$

Dass man statt der Tangenten und Cotangenten der Winkel α, β und γ auch die Grössen $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$ und deren inverse Werthe einführen kann, versteht sich von selbst.

Digitized by Google

Viertes Capitel.

Von den Combinationen des rhombischen Systemes.

A. Combinationslehre.

§. 430.

Uebersicht der Gestalten einer Combination.

Die Zähligkeit einer jeden rhombischen Combination bestimmt sich nach der einfachen Regel in §. 66. Auch die übrigen Bestimmungen der allgemeinen Entwicklung haben keine Schwierigkeit, sobald nur erst die Grundgestalt und deren aufrechte Stellung gewählt worden, wofür die in den §§. 408 und 412 angedeuteten Regeln nachzusehen sind. Ueberhaupt aber lassen sich in jeder holoëdrischen rhombischen Combination *) folgende drei, ihrer geometrischen Beschaffenheit nach wesentlich verschiedene Gestalten unterscheiden:

1) Achtflächige Gestalten, deren Flächen keiner der Axen parallel, sondern gegen alle geneigt sind; Pyramiden.
2) Vierflächige Gestalten, deren Flächen je einer der Axen parallel sind; Prismen.
3) Zweiflächige Gestalten; die drei Flächenpaare des Systemes.

Ueber die krystallographische Bedeutung der Pyramiden kann niemals ein Zweifel obwalten, da jeder achtzählige Flächeninbegriff nur als eine Pyramide zu deuten ist. Auch die Prismen sind im All-

*) Die seltenen hemiëdrischen Combinationen, in welchen manche Pyramiden als Sphenoide auftreten, sind eben daran zu erkennen, dass gewisse vierzählige Flächeninbegriffe ihrer Lage nach durchaus nicht einem Prisma gehören können, sondern von einer Pyramide herstammen müssen.

Digitized by Google

gemeinen an der Zahl ihrer Flächen zu erkennen; welche aber als verticale oder als horizontale Prismen gedeutet werden, und welche von diesen letzteren wiederum als makrodiagonale oder als brachydiagonale Prismen gelten sollen, das hängt einestheils von der Wahl der aufrechten Stellung, anderntheils von der Wahl der Grundgestalt ab. Eben so kann ein jedes der drei Flächenpaare als Basis, und, nachdem diese gewählt worden, von den übrigen beiden ein jedes als makrodiagonales oder als brachydiagonales Flächenpaar bestimmt werden, indem diese Bestimmungen von denselben beiden willkürlichen Elementen abhängen. Grundgestalt und aufrechte Stellung sind also die Elemente, deren Bestimmung selbst der allgemeinen Entwicklung der Combination vorausgehen muss, weil durch sie erst den combinirten Gestalten ihre Stellen in den verschiedenen Reihen unsers Schemas, und somit ihre krystallographischen Werthe angewiesen werden.

§. 431.

Wahl der Grundgestalt und aufrechten Stellung.

Sollte in einer rhombischeu Combination keine, oder doch keine zur Grundgestalt geeignete Pyramide enthalten seyn, so befolgt man die in gleichen Fällen für die tetragonalen und hexagonalen Combinationen angegebenen Regeln; d. h. man schliesst aus den Verhältnissen der vorhandenen Gestalten auf diejenige Grundgestalt, welche die leichteste Entwicklnng gewähren würde, oder lässt auch die Grundgestalt ganz unbestimmt. Sind z. B. von einer Krystallreihe nur Combinationen von Prismen bekannt, so bezieht man irgend zwei, zu verschiedenen Axen gehörige Prismen auf die Grundgestalt, berechnet aus ihren Winkeln das Verhältniss $a:b:c$, und bestimmt dann die übrigen Gestalten nach ihren resp. Verhältnissen.

Digitized by Google

Besteht die Combination nur aus gleichnamigen, d. h. zu einer Axe gehörigen Prismen, welche durch das auf ihrer Axe senkrechte Flächenpaar terminirt sind, so lassen sich nur zwei Glieder des Verhältnisses $a:b:c$ bestimmen. Die Combination der drei Flächenpaare endlich lässt die Grundgestalt gänzlich unbestimmt.

Die aufrechte Stellung wählt man wohl gern nach der vorherrschenden Längenrichtung der Krystalle, wenn eine solche für die Krystallreihe gegeben ist (z. B. Topas, Lievrit, Manganerz); in den übrigen Fällen dürfte diejenige Stellung den Vorzug verdienen, bei welcher möglichst viele Pyramiden als Glieder der Hauptreihe und möglichst viele Prismen als verticale Prismen erscheinen, weil dadurch die Entwicklung bedeutend erleichtert wird.

§. 432.

Allgemeine Entwicklung.

Nachdem die Grundgestalt uud aufrechte Stellung gewählt worden, ergeben sich, unmittelbar aus der Beschaffenheit und den durch die Ableitung bestimmten gegenseitigen Verhältnissen der Gestalten die Bestimmungen,

1) welche Gestalten in die Hauptreihe,
2) welche in die makrodiagonale oder brachydiagonale Nebenreihe, und
3) welche in die gleichnamigen Zwischenreihen des Systemes gehören.

Auch lassen sich noch folgende, unmittelbar aus den Regeln der Ableitung hervorgehende Bestimmungen in Anwendung bringen:

Je zwei Gestalten, welche mit einander horizontale CK. hervorbringen, sind nicht nur gleichnamig (d. h. entweder makrodiagonal oder brachydiagonal),

Digitized by Google

sondern gehören auch in eine und dieselbe horizontale Reihe des Schemas, und haben daher denselben Werth von n.

Je zwei gleichnamige Gestalten, $m\breve{\bar{P}}n$ und $m'\breve{\bar{P}}n'$, welche mit einander geneigte CK. hervorbringen, die dem ungleichnamigen Hauptschnitte parallel laufen, gehören in eine und dieselbe verticale Reihe des Schemas, oder haben $m' = m$.

§. 433.

Theorie der binären Combinationen.

Die besondere Entwicklung der rhombischen Combinationen überhaupt beruht auf der Theorie der binären Combinationen dieses Systemes. Wir setzen zu dem Ende irgend zwei Gestalten, ohne vorläufig auf ihre Stellen in den verschiedenen Reihen unseres Schemas Rücksicht zu nehmen, beseichnen sie mit G und G', und das Verhältniss ihrer beiderseitigen Axen mit $a:b:c$ und $a':b':c'$. Die möglichen Combinationsverhältnisse und die denselben entsprechenden Bedingungen sind nun folgende: es bildet G', als untergeordnete Gestalt, an G, als vorherrschender Gestalt:

I. Zuschärfungen der Kanten, und zwar

1) der makrod. Polk., wenn $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ u. $\frac{a'}{c'} < \frac{a}{c}$; Fig. 475.

2) der brachyd. Polk., wenn $\frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$ u. $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$; Fig. 476.

3) der Mittelkanten, wenn $\frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}$ u. $a' > a$; Fig. 477.

II. Vierfl. Zusp. der Polecke, wenn $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{c'} < \frac{a}{c}$, und zwar sind die CK. mit den Mittelkanten von G

Digitized by Google

4) parallel, ... wenn $\frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}$; Fig. 478.

5) convgt. n. d. makrod. Polk., - - - $<$ - ; Fig. 479.
6) - - - - brachyd. - - - - $>$ - ; Fig. 480.

III. Vierfl. Zusp. der makrod. Mittelecke, wenn $\frac{a'}{b'} > \frac{a}{b}$ und $\frac{b'}{c'} < \frac{b}{c}$, und zwar sind die CK. mit den brachyd. Polk. von *G*

7) parallel, ... wenn $\frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$; Fig. 481.

8) convgt. n. d. Poleck - - - $<$ - ; Fig. 482.
9) - - - - Mittelk. - - - $>$ - ; Fig. 483.

IV. Vierfl. Zusp. der brachyd. Mittelecke, wenn $\frac{a'}{c'} > \frac{a}{c}$ und $\frac{b'}{c'} > \frac{b}{c}$, und zwar sind die CK. mit den makrod. Polk. von *G*

10) parallel, ... wenn $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$; Fig. 484.

11) convgt. n. d. Poleck - - - $<$ - ; Fig. 485.
12) - - - - Mittelk. - - - $>$ - ; Fig. 486.

In diesen zwölf Fällen sind alle möglichen Verhältnisse der binären rhombischen Combinationen enthalten, und es ist nur noch zu zeigen, wie von diesen allgemeinen Regeln für die Combinationen je zweier Gestalten Gebrauch zu machen.

§. 434.

Combination zweier gleichnamiger Gestalten.

Bei dem Gebrauche der im vorigen §. gefundenen Regeln ist zunächst der Unterschied zu beachten, ob die beiden combinirten Gestalten gleichnamig oder ungleichnamig sind; ein Unterschied, welcher, weil die Gestalten der Hauptreihe eben so wohl für makrodiagonale als für brachydiagonale Gestalten gelten können (§. 417.), allgemein durch die Combinations-

Digitized by Google

zeichen $m\breve{\bar{\bar{P}}}n.m'\breve{\bar{P}}n'$ und $m\breve{\bar{\bar{P}}}n.m'\breve{\bar{\bar{P}}}n'$ dargestellt werden kann. Ferner wird es für den Gebrauch unsrer Regeln nöthig, die in ihnen auftretenden Quotienten $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ als Functionen der Ableitungszahlen m und n auszudrücken, weil sie nur dadurch unsern krystallographischen Zeichen angepasst werden.

Wir wollen nun zuerst den Fall betrachten, da beide Gestalten gleichnamig sind; dann sind sie entweder makrodiagonal oder brachydiagonal.

a) Beide Gestalten sind makrodiagonal, also $m\bar{P}n$ und $m'\bar{P}n'$; weil die Axen der Grundgestalt a, b und c, so haben wir

für $m\bar{P}n$ statt $a : b : c$ das Verhältniss $ma : nb : c$
- $m'\bar{P}n'$ - $a' : b' : c'$ - - - - $m'a : n'b : c$

einzuführen; es wird daher

$$\begin{array}{lllll} \frac{a'}{b'} >=< \frac{a}{b} & \text{wenn} & \frac{m'}{n'} >=< \frac{m}{n} \\ \frac{a'}{c'} \text{ - - - - } \frac{a}{c} & \text{- -} & m' \text{ - - - } m \\ \frac{b'}{c'} \text{ - - - - } \frac{b}{c} & \text{- -} & n' \text{ - - - } n \end{array}$$

und es bildet $m'\bar{P}n'$ an $m\bar{P}n$

I. Zusch. der Kanten, und zwar

1) der makrod. Polk., wenn $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$ und $m' < m$
2) der brachyd. Polk. - - $m' = m$ - $n' > n$
3) der Mittelkanten - - $n' = n$ - $m' > m$

II. Vierfl. Zusp. der Polecke, wenn $\frac{m'}{n'} < \frac{m}{n}$ und $m' < m$, und zwar sind die CK. mit den Mittelkanten von $m\bar{P}n$

4) parallel, ... wenn $n' = n$
5) convgt. n. d. makrod. Polk. - - - $<$ -
6) - - - - brachyd. - - - - $>$ -

Digitized by Google

III. **Vierfl. Zusp. der makrod. Mittelecke,** wenn $\frac{m'}{n'} > \frac{m}{n}$, und $n' < n$, und zwar sind die CK. mit den brachyd. Polk. von $m\bar{P}n$

7) parallel, ... wenn $m' = m$
8) convgt. n. d. Poleck - - - $<$ -
9) - - - - Mittelk. - - - $>$ -

IV. **Vierfl. Zusp. der brachyd. Mittelecke,** wenn $m' > m$ und $n' > n$, und zwar sind die CK. mit den makrod. Polk. von mPn

10) parallel, ... wenn $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$
11) convgt. n. d. Poleck - - - $<$ -
12) - - - - Mittelk. - - - $>$ -

b) Beide Gestalten sind brachydiagonal, also $m\breve{P}n$ und $m'\breve{P}n'$; wir haben folglich

für $m\breve{P}n$ statt $a:b:c$ das Verhältniss $ma:b:nc$
- $m'\breve{P}n'$ - $a':b':c'$ - - - - $m'a:b:n'c$

einzuführen; es wird daher

$$\frac{a'}{b'} >=< \frac{a}{b}, \text{ wenn } m' >=< m$$
$$\frac{a'}{c'} \text{ - - - } \frac{a}{c} \text{ - - } \frac{m'}{n'} \text{ - - - } \frac{m}{n}$$
$$\frac{b'}{c'} \text{ - - - } \frac{b}{c} \text{ - - } n' <=> n$$

und es bildet $m'\breve{P}n'$ an $m\breve{P}n$

I. **Zusch. der Kanten,** und zwar
1) der makrod. Polk., wenn $m' = m$, und $n' > n$
2) der brachyd. Polk. - - $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$ - $m' < m$
3) der Mittelkanten - - $n' = n$ - $m' > m$

II. **Vierfl. Zusp. der Polecke,** wenn $m' < m$ und $\frac{m'}{n'} < \frac{m}{n}$; und zwar sind die CK. mit den Mittelkanten von $m\breve{P}n$

Digitized by Google

4) parallel, ... wenn $n' = n$
5) convgt. n. d. makrod. Polk. - - - $>$ -
6) - - - - brachyd. - - - - $<$ -

III. Vierfl. Zusp. der makrod. Mittelecke, wenn $m' > m$ und $n' > n$; und zwar sind die CK. mit den brachyd. Polk. von $m\breve{P}n$

7) parallel, ... wenn $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$
8) convgt. n. d. Poleck - - - $<$ -
9) - - - - Mittelk. - - - $>$ -

IV. Vierfl. Zusp. der brachyd. Mittelecke, wenn $\frac{m'}{n'} > \frac{m}{n}$ und $n' < n$; und zwar sind die CK. mit den makrod. Polk. von $m\breve{P}n$

10) parallel, ... wenn $m' = m$
11) convgt. n. d. Poleck - - - $<$ -
12) - - - - Mittelk. - - - $>$ -

§. 435.

Combination zweier ungleichnamiger Gestalten.

Sind die Gestalten ungleichnamig, also $m\breve{P}n$ und $m'\bar{P}n'$, so ist die vorherrschende entweder makrodiagonal oder brachydiagonal; im ersteren Falle wird

$$\begin{array}{llll} \frac{a'}{b'} >=< \frac{a}{b} & \text{wenn} & m' >=< \frac{m}{n} \\ \frac{a'}{c'} \;\text{- - -}\; \frac{a}{c} & \text{- -} & \frac{m'}{n'} \;\text{- - -}\; m \\ \frac{b'}{c'} \;\text{- - -}\; \frac{b}{c} & \text{- -} & \frac{1}{n'} \;\text{- - -}\; n \end{array}$$

Da nun aber n sowohl als n' stets > 1, so muss $\frac{1}{n'}$ stets $< n$, und mithin auch $\frac{b'}{c'}$ stets $< \frac{b}{c}$ seyn; dies schränkt die möglichen CV. auf Nr. 1, 5, 7, 8 und 9 ein.

Digitized by Google

Im zweiten Falle wird

$$\frac{a'}{b'} >=< \frac{a}{b} \text{ wenn } \frac{m'}{n'} >=< m$$

$$\frac{a'}{c'} \text{ - - - } \frac{a}{c} \text{ - - } m' \text{ - - - } \frac{m}{n}$$

$$\frac{b'}{c'} \text{ - - - } \frac{b}{c} \text{ - - } n' \text{ - - - } \frac{1}{n}$$

und folgt aus der letzteren Bedingung, weil n' stets $> \frac{1}{n}$, dass $\frac{b'}{c'}$ stets $> \frac{b}{c}$, und daher nur Nr. 2, 6, 10, 11 und 12 die möglichen CV. sind.

Hieraus ergeben sich überhaupt für die Combinationen zweier ungleichnamiger Gestalten folgende Regeln.

Die Flächen der untergeordneten Gestalt erscheinen jedenfalls paarweis an denjenigen Polkanten der vorherrschenden Gestalt, welche mit derselben gleichnamig (oder mit der untergeordneten Gestalt ungleichnamig) sind, und bilden:

I. Zuschärf. dieser Polk., wenn $m' = \frac{m}{n}$

II. Vierfl. Zusp. d. Polecke - - - $<$ -

III. Vierfl. Zusp. d. Mitteleke - - - $>$ - und zwar sind die CK. mit den andern Polk.

α) parallel, ... wenn $\frac{m'}{n'} = m$

β) convgt. n. d. Poleck - - - $<$ -

γ) - - - - Mitteleck - - - $>$ -

§. 436.

Combinationsgleichungen.

Um für jede binäre Combination das Verhältniss der Ableitungszahlen derjenigen dritten Gestalt auszumitteln, deren Flächen die CK. der beiden gegebenen Gestalten abstumpfen, dazu gelangt man sehr leicht mittels der allgemeinen CG. in §. 68; wobei

Digitized by Google

jedoch auf die verschiedene Beschaffenheit der Gestalten Rücksicht zu nehmen ist.

A. Sind die beiden gegebenen Gestalten gleichnamig, $m\breve{\bar{\mathrm{P}}}n$ und $m'\breve{\bar{\mathrm{P}}}n'$, so muss auch die dritte Gestalt mit beiden gleichnamig, und folglich ein $m''\breve{\bar{\mathrm{P}}}n''$ seyn. Man hat daher in der angeführten Combinationsgleichung

a) für makrodiagonale Gestalten $r = r' = r'' = 1$ zu setzen,

b) für brachydiagonale Gestalten $n = n' = n'' = 1$ zu setzen, und die Buchstaben r mit n zu vertauschen und erhält in beiden Fällen dieselbe CG.

$$m''n''(m'n - mn') + m''(m - m')nn' + n''(n' - n)mm' = 0$$

B. Sind die gegebenen Gestalten ungleichnamig, also $m\breve{\bar{\mathrm{P}}}n$ und $m'\bar{\breve{\mathrm{P}}}n'$, so hat man entweder

$n = r' = 1$, und statt r den Buchstaben n

oder

$r = n' = 1$, und statt r' den Buchstaben n'

zu schreiben, ohne auf den Namen der dritten Gestalt Rücksicht zu nehmen, und findet so die beiden Fällen entsprechende CG.

$$m''n''(m' - mn')n + r''m''(m - m'n)n' + n''r''(n'n - 1)mm' = 0$$

Ist nun die dritte Gestalt makrodiagonal, so wird blos $r'' = 1$, ist sie dagegen brachydiagonal, so wird $n'' = 1$ gesetzt, und der Buchstabe r'' mit n'' vertauscht.

§. 437.

Combinationen einer Pyramide aus der Hauptreihe.

In den vorhergehenden §§. ist die Theorie der binären Combinationen enthalten, und es scheint bei der grossen Einfachheit derselben überflüssig, die einzelen Combinationen noch besonders durchzugehen, wie solches in den übrigen Krystallsystemen geschehen ist. Um jedoch einiges Anhalten für die specielle

Digitized by Google

Anwendung zu geben, so sollen in diesem und dem folgenden §. die Combinationen einer Pyramide mP, des Prismas ∞P und der drei Flächenpaare als vorherrschender Gestalten betrachtet werden, weil Combinationen dieser Art besonders häufig vorkommen.

Es bildet an mP

1) $m'\breve{P}n'$ oder $m'\bar{P}n'$
   a) Zusch. der makrod. oder brachyd. Polk., ... wenn $m'=m$; Fig. 476.
   b) Vierfl. Zusp. d. Polecke - - - $<$ - Fig. 479.
   c) Vierfl. Zusp. d. gleichnamigen Mittelecke, ... - - - $>$ - und zwar sind die CK. mit den brachyd. oder makrod. Polkanten von mP:
      α) parallel, ... wenn $\frac{m'}{n'}=m$; Fig. 481.
      β) convgt. n. d. Poleck - - - $<$ - Fig. 482.
      γ) - - - - Mitteleck - - - $>$ - Fig. 483.

CG. $m''n''(m'-mn')+m''(m-m')n'+n''(n'-1)mm'=0$

2) m'P, mit horizontalen CK.:
   a) vierfl. Zusp. d. Polecke, wenn $m'<m$; Fig. 478.
   b) Zusch. d. Mittelkanten, - - - $>$ - Fig. 477.

3) $\infty\breve{P}n'$ oder $\infty\bar{P}n'$:
   Zusch. der makrod. oder brachyd. Mittelecke, Fig. 488 oder Fig. 489; sind die Prismen vorherrschend, so erscheint die Comb. wie Fig. 501 oder Fig. 502.

CG. $m''n''-m''n'+n''(n'-1)m=0$

4) ∞P, Abst. der Mittelkanten, Fig. 487.

5) $m'\breve{P}\infty$ oder $m'\bar{P}\infty$, deren Flächen auf die makrod. oder brachyd. Polk. gesetzt sind,
   a) Abst. dieser Polk, wenn $m'=m$; Fig. 490 u. 494.
   b) Zusch. der Polecke - - - $<$ - Fig. 492 u. 493.
   c) Zusch. der Mittelecke - - - $>$ - Fig. 491 u. 495.

CG. $m''(m-m')+n''(m'-m'')m=0$

6) $\infty\breve{P}\infty$, Abst. der makrod. Mittelecke, Fig. 497.
$\infty\bar{P}\infty$ - - brachyd. - - - Fig. 498.
CG. $mn'' - m'' = 0$

7) oP, Abst. der Polecke, Fig. 496.

§. 438.

Combinationen des Prismas ∞P.

Es bilden am Prisma ∞P:

1) $m'P$, beiderseits vierfl. Zusp., die Zuspfl. auf die Flächen gerad aufgesetzt; Fig. 500.

2) $m'\breve{P}n'$ oder $m'\bar{P}n'$, dergl. Zusp, je zwei Zuspfl. auf die scharfen oder stumpfen Seitenkanten gesetzt; Fig. 501 oder 502.
CG. $m''(n''-1)n' - n''(n'-1)m' = 0$

3) $m'\breve{P}\infty$ oder $m'\bar{P}\infty$, Zusch beider Enden, die Zuschfl. auf die scharfen oder stumpfen Seitenkanten gesetzt; Fig. 504 oder 503.
CG. $m''(n''-1) - m'n'' = 0$

4) oP, die gerad angesetzte Endfläche; Fig. 505.

5) $\infty\breve{P}n'$ oder $\infty\bar{P}n'$, Zusch. der scharfen oder stumpfen Seitenkanten; Fig. 506 oder 507.

6) $\infty\breve{P}\infty$ oder $\infty\bar{P}\infty$, Abst. der scharfen oder stumpfen Seitenkanten; Fig. 508 oder 509.

Ist die Basis oP mit vorhanden, so erscheinen die Combinationen *sub* 1, 2 und 3 wie Fig. 510, Fig. 511, 512 und Fig. 513.

§. 439.

Combinationen der drei Flächenpaare.

Jedes der drei Flächenpaare oP, $\infty\bar{P}\infty$ und $\infty\breve{P}\infty$ kann eine Tafel bilden, welche horizontal für oP, vertical für die beiden andern Flächenpaare erscheint.

Digitized by Google

Nach Maassgabe der diese Flächenpaare begränzenden Gestalten erscheint die Tafel:

1) rhombisch, mit zweireihig schief angesetzten Randflächen; die begränzende Gestalt ist irgend eine Pyramide; Fig. 514.

2) rhombisch, mit gerad angesetzten Randflächen; Fig. 515; so

oP mit irgend einem verticalen Prisma
$\infty\bar{P}\infty$ mit irgend einem brachyd. horiz. Prisma
$\infty\breve{P}\infty$ - - - - - makrod. - - - -

3) rectangulär, mit zweireihig schief angesetzten Randflächen, Fig. 516; so

oP mit irgend zwei ungleichnamigen horiz. Prismen,
$\infty\bar{P}\infty$ mit einem verticalen und einem makrod. horiz. Prisma,
$\infty\breve{P}\infty$ mit einem verticalen und einem brachyd. horiz. Prisma.

4) rectangulär mit gerad angesetzten Randflächen, Fig. 517, die Combination eines vorherrschenden Flächenpaares mit den beiden andern.

§. 440.

Wichtigste Combinationsregeln.

Da von den bisher aufgefundenen Regeln der binären Combinationen und den sie betreffenden Formen der Combinationsgleichung einige besonders häufig in Anwendung kommen, weil sich die ihnen entsprechenden Fälle in der Natur sehr oft verwirklicht finden, so ist es vortheilhaft, sie als Specialregeln auszuheben, und dem Gedächtnisse einzuprägen, indem man dadurch in Stand gesetzt wird, die gewöhnlich vorkommenden Combinationen aus dem Stegreife zu entwickeln.

Nächst den in den §§. 430 und 432 stehenden allgemeinen Regeln sind besonders folgende Specialregeln zu berücksichtigen:

Digitized by Google

1) Dasjenige horizontale Prisma, welches die makrod. Polk. von $m\breve{P}n$ oder die brachyd. Polk. von $m\bar{P}n$ abstumpft, ist $m\breve{P}\infty$ oder $m\bar{P}\infty$; dasjenige aber, welches die brachyd. Polk. von $m\breve{P}n$ oder die makrod. Polk. von $m\bar{P}n$ abstumpft, ist $\frac{m}{n}\bar{P}\infty$ oder $\frac{m}{n}\breve{P}\infty$.

2) Die makrod. Polk. von mP werden also durch $m\breve{P}\infty$, die brachyd. Polk. durch $m\bar{P}\infty$ abgestumpft, dieselben Polkanten durch $m\breve{P}n$ oder $m\bar{P}n$ zugeschärft.

3) Dasjenige horizontale Prisma, welches die makrod. oder brachyd. Combinationsecke der beiden Pyramiden mP und $m'P$ so abstumpft, dass seine Flächen als Rhomben erscheinen, ist $\frac{2mm'}{m+m'}\breve{P}\infty$ oder $\frac{2mm'}{m+m'}\bar{P}\infty$.

4) Dasjenige horizontale Prisma also, welches die makrod. oder brachyd. Combinationsecke zwischen mP und ∞P auf dieselbe Weise abstumpft, ist $2m\breve{P}\infty$ oder $2m'\bar{P}\infty$.

5) Diejenige Pyramide, welche die CK. zwischen mP und $\infty\breve{P}\infty$ abstumpft, ist eine $mn\breve{P}n$.

6) Diejenige Pyramide, welche die CK. zwischen ∞P und $m\breve{\bar{P}}\infty$ abstumpft, ist eine $m'\breve{\bar{P}}\frac{m'}{m'-m}$.

7) Dasjenige horizontale Prisma, welches die Combinationsecke zwischen $\infty\breve{\bar{P}}n$ und $m\breve{\bar{P}}\infty$ so abstumpft, dass seine Flächen als Rhomben erscheinen, ist $mn\breve{\bar{P}}\infty$.

8) Diejenigen horizontalen Prismen, welche die Combinationsecke zwischen mP und $\infty\breve{\bar{P}}n$ so ab-

stumpfen, dass ihre Flächen als Rhomben erscheinen, sind $m(n'+1)\breve{\bar{\bar{P}}}\infty$ und $m\frac{(n'+1)}{n'}\bar{\bar{\bar{P}}}\infty$; jenes stumpft die höheren, dieses die tieferen CE. ab. Man könnte diese Specialregeln leicht um einige vermehren; da jedoch die vorstehenden zur Entwicklung der am häufigsten vorkommenden Combinationen ausreichend sind, so würde die Hinzufügung noch mehrer Regeln eine wenig nützliche Vervielfältigung derselben seyn.

§. 441.

Berechnung der Combinationskante.

Die Berechnung der Combinationskanten ist für dieses System eine sehr einfache Aufgabe. Da wir uns nämlich bei der Seltenheit der hemiëdrischen Combinationen auf die Berechnung der Combinationskanten holoëdrischer Gestalten beschränken können, so haben wir es auch nur mit heteropolaren CK. zu thun. Nennen wir sie Π, so gilt für die beiden Gestalten G und G' in §. 433 unmittelbar die Gleichung aus §. 22.

$$\cos\Pi = -\frac{aabb' + cc'aa' + bb'cc'}{\sqrt{a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2}\,\sqrt{a'^2b'^2+c'^2a'^2+b'^2c'^2}}$$

Sind nun beide Gestalten gleichnamig, so hat man für $m\bar{P}n$ und $m'\bar{P}n'$

$$a = ma,\quad b = nb,\quad c = c$$
$$a' = m'a,\quad b' = n'b,\quad c' = c$$

oder für $m\breve{P}n$ und $m'\breve{P}n'$

$$a = ma,\quad b = b,\quad c = nc$$
$$a' = m'a,\quad b' = b,\quad c' = n'c$$

zu setzen. Sind dagegen beide Gestalten ungleichnamig, so ist, wenn die makrodiagonale Gestalt die accentuirten Buchstaben erhält,

$$a = ma,\quad b = b,\quad c = nc$$
$$a' = m'a,\quad b' = n'b,\quad c' = c$$

Digitized by Google

zu setzen, wobei unter a, b und c durchgängig die Halbaxen der Grundgestalt zu verstehen sind.

Wenn jedoch die CK., wie dies sehr häufig der Fall, einem der drei Hauptschnitte parallel ist, so würde die Anwendung dieser Formeln weniger schnell zum Ziele führen. Vortheilhafter ist es dann, die Neigungswinkel beider Flächen zu diesem Hauptschnitte zu berechnen, wenn solche nicht schon bekannt sind; das Supplement ihrer Differenz ist die gesuchte Combinationskante, also:

$$\Pi = 180° - (X - X')$$

oder $$\Pi = 180° - (Y - Y')$$

oder auch $$\Pi = 180° - (Z - Z')$$

je nachdem die CK. dem makrodiagonalen, brachydiagonalen oder basischem Hauptschnitte parallel ist.

Auch kann man sich für solche CK., welche keinem der Hauptschnitte parallel sind, einer anderen Berechnung bedienen, indem man für beide Flächen die resp. Neigungswinkel zu einem und demselben Hauptschnitte (also X und X', oder Y und Y', oder auch Z und Z'), ausserdem aber auch noch die Neigungswinkel ihrer gleichnamigen Intersectionen gegen eine und dieselbe Axe dieses Hauptschnittes berechnet. Nennt man hierauf das Supplement der Differenz der beiden letzten Winkel Σ, so sind in dem schiefwinkligen Triëder der ebene Winkel Σ nebst den anliegenden Kantenwinkeln bekannt, woraus dann die CK. Π als dritter Kantenwinkel entweder nach der bekannten Formel, oder auch mittels der Neperschen Analogien zu berechnen ist.

B. Beispiele.

§. 442.

Combination des Arragonites.

Die in Fig. 518 dargestellte Combination des Arragonites ist eine achtzählige, holoëdrische Combina-

Digitized by Google

tion, für welche es am vortheilhaftesten scheint, die mit *P* bezeichnete Pyramide zur Grundgestalt zu wählen; dadurch bestimmt sich

$$a : b : c = 0{,}7205 : \;1\; : 0{,}6215$$
$$\text{oder} \;\; - \; - \; - = \;1{,}16\; : 1{,}61 : \;1$$

Die Zeichnung ist so entworfen, dass die Brachydiagonale auf den Beobachter zuläuft; daher ordnen sich die Gestalten, wie folgt; es gehören

1) in die Hauptreihe, *P* und *M*,
2) in die brachyd. Nebenreihe, *x*, *k*, *i* und *h*,
3) in brachyd. Zwischenreihen, *n* und *s*.

Durch ihre Verhältnisse zur Grundgestalt bestimmen sich unmittelbar

$$M = \infty P \;(\S.\,437,\,4)$$
$$h = \infty\breve{P}\infty$$
$$k = \breve{P}\infty \;(\S.\,440,\,2)$$

Da die Flächen *n* die makrodiagonalen Polkanten von P zuschärfen würden, so ist

$$n = \breve{P}n$$

und, wegen der horizontalen CK. zwischen *n* und *s*,

$$s = m\breve{P}n$$

Nun stumpfen die Flächen *s* nicht nur die CK. zwischen P und $\infty\breve{P}\infty$, sondern auch jene zwischen ∞P und $\breve{P}\infty$ ab, folglich ist

$$s = n\breve{P}n \;(\S.\,440,\,5)$$
$$\text{auch} \;\; - = n\breve{P}\frac{n}{n-1} \;(\S.\,440,\,6)$$
$$\text{daher} \;\; - = 2\breve{P}2$$
$$\text{und} \;\; n = \breve{P}2$$

Da nun das horizontale Prisma *i* die makrod. Polk. der Pyramide $2\breve{P}2$ abstumpft, so ist

$$i = 2\breve{P}\infty$$

Die Bestimmung des horizontalen Prismas *x* fordert eine Messung; misst man seine Polkante, so

Digitized by Google

findet man 140° 23′; da nun die Polk. von $\breve{P}\infty =$ 108° 27′, und $\cot 70° 11{,}5' = 2 \cot 54° 13{,}5'$, so folgt, dass

$$x = \tfrac{1}{2}\breve{P}\infty$$

Die Combination ist nun vollständig entwickelt, und ihr Zeichen:

$$\infty P.\infty\breve{P}\infty.\breve{P}\infty.P.2\breve{P}2.\breve{P}2.2\breve{P}\infty.\tfrac{1}{2}\breve{P}\infty.$$

§. 443.

Combinationen des Topases.

Fig. 519 ist eine achtzählige Combination des Brasilianischen Topases; wählen wir die mit *o* bezeichnete Pyramide zur Grundgestalt, so wird

$$a : b : c = 0{,}8985 : 1{,}893 : 1$$

oder sehr nahe $= 0{,}9 : 1{,}9 : 1$

Da nun in der Zeichnung die Brachydiagonale wiederum die Richtung auf den Beobachter hat*), so ordnen sich die Gestalten, wie folgt; es gehören

1) in die Hauptreihe, *c*, *s*, *o* und *M*,
2) in die brachyd. Nebenreihe, *n* und *y*,
3) in die makrod. Nebenreihe, *m*,
4) in eine brachyd. Zwischenreihe, *l*.

Um die Pyramide *s* zu bestimmen, messe man die CK. *s* : *M*; man findet 124° 9′, und, nach Abzug von 90°, für die halbe Mittelkante der Pyramide 34° 9′; da nun dieselbe Kante in der Grundgestalt 45° 27,5′ misst, und die Tangente jenes Winkels $= \tfrac{2}{3}$ der Tangente dieses Winkels, so folgt

$$s = \tfrac{2}{3}P$$

Das horizontale Prisma *m* stumpft die brachydiagonalen Polk. von $\tfrac{2}{3}P$ ab, und ist daher

$$m = \tfrac{2}{3}\bar{P}\infty \text{ (§. 440, 2)}$$

Weil nun dasselbe horizontale Prisma die Com-

*) Dies gilt auch für die folgenden Figuren.

Digitized by Google

binationsecke zwischen *c* und *o* so abstumpft, dass seine Flächen als Rhomben erscheinen würden, wenn sie nicht zugleich die Durchschnitte mit *s* erlitten, so wird für die Pyramide $c = mP$

$$\tfrac{2}{3} = \frac{2m}{1+m} \text{ (§. 440, 3)}$$

und daher $c = \tfrac{1}{2}P$

Das verticale Prisma *l* bestimmt sich aus einer Messung seiner makrod. Seitenkante, welche 93° 8′ giebt, durch Vergleichung dieses Werthes mit dem Werthe 55° 41′ derselben Kante in ∞P; nämlich

$$l = \infty\breve{P}2$$

Da nun das horizontale Prisma *n* die höheren Combinationsecke zwischen $\infty\breve{P}2$ und $\tfrac{2}{3}P$ so abstumpft, dass seine Flächen als Rhomben erscheinen würden, so wird

$$n = 2\breve{P}\infty \text{ (§. 440, 8)}$$

Die Bestimmung des horizontalen Prismas *y* endlich ist nur mittels einer Messung möglich; misst man die CK. $y : n$, so findet man 161° 7′; da nun die halbe Polk. von $2\breve{P}\infty = 46° 30′$, so findet sich nach der Formel

$$\Pi = 180° - (X - X')$$

in §. 441, die halbe Polk. von $y = 27° 37′$, und aus dem Verhältnisse der beiderseitigen Cotangenten

$$y = 4\breve{P}\infty$$

Die Combination ist nun entwickelt, und ihr Zeichen:

$$\infty P . \infty\breve{P}2 . P . \tfrac{2}{3}P . \tfrac{1}{2}P . \tfrac{2}{3}\breve{P}\infty . 2\breve{P}\infty . 4\breve{P}\infty.$$

§. 444.

Fortsetzung.

Fig. 520 stellt eine neunzählige Combination des Schneckensteiner Topases dar, in welcher die Pyramide *o*, durch eine Messung der CK. $o : M$, als dieselbe Grundgestalt erkannt wird, welche wir in Fig.

519 annahmen. Für die Gestalten *s*, *M*, *l*, *n*, *y* gelten dieselben Schlüsse wie im vorigen §.; es ist daher wiederum

$$M = \infty P$$
$$s = \tfrac{2}{3}P$$
$$l = \infty \breve{P}2$$
$$n = 2\breve{P}\infty$$
$$y = 4\breve{P}\infty$$

Da sich nun auch *P* unmittelbar als *o*P bestimmt, so bleibt uns nur noch die Bestimmung der brachydiagonalen Pyramide *x*, so wie des brachyd. verticalen Prismas *u* übrig.

Da *x* mit *l* horizontale CK. bildet, so ist

$$x = m\breve{P}2$$

und da sie auch die CK. zwischen P und $2\breve{P}\infty$ abstumpft, so wird

$$x = \tfrac{4}{3}\breve{P}2 \text{ (§. 437, 5, CG.)}$$

Das Prisma *u* bestimmt sich durch eine Messung, eben so wie im vorigen §. das Prisma *l*, als $\infty\breve{P}3$. Die Combination ist somit vollständig entwickelt, und ihr Zeichen:

$$\infty P.\infty\breve{P}2.\infty\breve{P}3.oP.P.\tfrac{2}{3}P.2\breve{P}\infty.4\breve{P}\infty.\tfrac{4}{3}\breve{P}2.$$

§. 445.

Combination des Chrysolithes.

Fig. 521 stellt eine elfzählige Combination des Chrysolithes aus dem Meteoreisen von Krasnojarsk dar. Wählen wir die mit *e* bezeichnete Pyramide zur Grundgestalt, so wird

$$a : b : c = 1{,}2626 : 2{,}153 : 1$$

und es ordnen sich die Gestalten, wie folgt; es gehören

1) in die Hauptreihe, *P*, *e*, und *n*,
2) in die brachyd. Nebenreihe, *k*, *i*, *T*,
3) in die makrod. Nebenreihe, *d*,
4) in brachyd. Zwischenreihen, *f*, *l*, *s* und *r*.

Digitized by Google

Unmittelbar bestimmen sich sogleich:

$$P = o\mathrm{P}$$
$$T = \infty\breve{\mathrm{P}}\infty$$
$$n = \infty\mathrm{P}$$
$$d = \bar{\mathrm{P}}\infty$$

Da die CK. $f:e$ und $l:e$ nicht nur einander, sondern auch der brachyd. Polkante von P parallel sind, so haben die Pyramiden f und l resp. gleiche Ableitungszahlen, und sind daher von der Form $m\breve{\mathrm{P}}m$ und $m'\breve{\mathrm{P}}m'$; da nun s mit f und r mit l horizontale CK. bildet, so ist $s = \infty\breve{\mathrm{P}}m$ und $r = \infty\breve{\mathrm{P}}m'$.

Misst man die CK. $T:r$ und $T:s$, so findet man, nach Abzug von 90°, die halbe makrod. Seitenkante im Prisma $r = 54° 20'$, im Prisma $s = 42° 54'$; da nun dieselbe Kante im Prisma $\infty\mathrm{P}$ 24° 55′ misst, und sich die Tangenten dieser Winkel verhalten wie 1 : 2 : 3, so wird:

$$r = \infty\breve{\mathrm{P}}3$$
$$s = \infty\breve{\mathrm{P}}2$$

und folglich auch

$$l = 3\breve{\mathrm{P}}3$$
$$f = 2\breve{\mathrm{P}}2$$

Die Bestimmung der beiden horizontalen Prismen k und i erfordert für jedes eine Messung; misst man CK. $P:k$ und $P:i$, und vergleicht man die Tangenten ihrer Supplemente mit der Tangente der halben Mittelkante von $\breve{\mathrm{P}}\infty$, so findet man

$$k = 2\breve{\mathrm{P}}\infty$$
$$i = 4\breve{\mathrm{P}}\infty$$

Das Zeichen der nun vollständig entwickelten Combination wird:

$$o\mathrm{P}.\infty\breve{\mathrm{P}}\infty.\infty\mathrm{P}.\infty\breve{\mathrm{P}}2.\infty\breve{\mathrm{P}}3.\mathrm{P}.2\breve{\mathrm{P}}2.3\breve{\mathrm{P}}3.\bar{\mathrm{P}}\infty.2\breve{\mathrm{P}}\infty.4\breve{\mathrm{P}}\infty.$$

§. 446.

Combination des Barytes.

Fig. 522 stellt eine zehnzählige, tafelartige Com-

Digitized by Google

bination des Barytes vor, für welche sich die Pyramide *z* als die bequemste Grundgestalt darbietet; dann wird

$$a:b:c = 1{,}6113:1{,}2275:1$$

und die verschiedenen Gestalten ordnen sich, wie folgt; es gehören

1) in die Hauptreihe, *P*, *z* und *M*,
2) in die brachyd. Nebenreihe, *o* und *k*,
3) in die makrod. Nebenreihe, *d* und *s*,
4) in eine brachyd. Zwischenreihe, *y* und *q*,
5) in eine makrod. Zwischenreihe, *t*.

Von diesen Gestalten bestimmen sich zuvörderst unmittelbar:

$$P = o\mathrm{P}$$
$$s = \infty\bar{\mathrm{P}}\infty$$
$$k = \infty\breve{\mathrm{P}}\infty$$
$$M = \infty\mathrm{P}$$
$$o = \breve{\mathrm{P}}\infty$$

Misst man die CK. $k:q$, so findet man 148° 27′, und, nach Abzug von 90°, 58° 27′ für die halbe makrod. Seitenkante des Prismas *q*; da nun derselbe Winkel im Prisma $\infty\mathrm{P}$ 39° 10′ misst, so folgt

$$q = \infty\breve{\mathrm{P}}2$$

Die Pyramide *y* ist, wegen ihrer horizontalen CK. zu *q*, eine $m\breve{\mathrm{P}}2$, und wegen ihrer Verhältnisse zur Grundgestalt, eine $\breve{\mathrm{P}}n$; folglich:

$$y = \breve{\mathrm{P}}2$$

Das horizontale Prisma *d* stumpft die brachyd. Polk. der Pyramide $\breve{\mathrm{P}}2$ ab; folglich wird

$$d = \tfrac{1}{2}\breve{\mathrm{P}}\infty \text{ (§. 440, 1)}$$

Endlich bestimmt sich durch Messung der CK. $t:s$, welche 151° 30′

$$t = \infty\bar{\mathrm{P}}\tfrac{3}{2}$$

Das Zeichen der nun vollständig entwickelten Combination ist:

$$o\mathrm{P}.\tfrac{1}{2}\bar{\mathrm{P}}\infty.\breve{\mathrm{P}}\infty.\infty\bar{\mathrm{P}}\infty.\infty\breve{\mathrm{P}}\infty.\infty\mathrm{P}.\mathrm{P}.\breve{\mathrm{P}}2.\infty\breve{\mathrm{P}}2.$$

Digitized by Google

§. 447.

Combinationen des Bittersalzes.

Die in Fig. 523 und 524 dargestellten Combinationen des Bittersalzes sind durch ihren hemiëdrischen Charakter sehr ausgezeichnet. Wählen wir das Sphenoid *l* zur Grundgestalt, so wird

$$a:b:c = 0{,}577:1{,}011:1$$

und wir erhalten unmittelbar für Fig. 523 das Zeichen:

$\frac{P}{2}.\infty P.\infty\breve{P}\infty.$

In Fig. 524 erscheinen beide complementäre Sphenoide $l = \frac{P}{2}$ und $l' = -\frac{P}{2}$; ausserdem

$$M = \infty P$$
$$o = \infty\breve{P}\infty$$
$$p = \infty\bar{P}\infty$$
$$n = \breve{P}\infty$$
$$m = \bar{P}\infty$$

welche Gestalten insgesammt durch die Hemiëdrie nicht afficirt werden. Dagegen erscheinen die Flächen *s* und *t*, von welchen jene einer makrodiagonalen, diese einer brachydiagonalen Pyramide angehören, nur zu je vier, mithin als Sphenoide; da sie die CK. zwischen P und $\infty\breve{P}\infty$ einerseits, $\infty\bar{P}\infty$ anderseits, so wie die CK. zwischen ∞P und $\breve{P}\infty$ einerseits, $\bar{P}\infty$ anderseits abstumpfen, so folgt, dass

$$s = \frac{2\bar{P}2}{2}$$

$$t = \frac{2\breve{P}2}{2}$$

Nun sind die CK. zwischen *q* und *s* dem brachydiagonalen, die CK. zwischen *r* und *t* dem makrodiagonalen Hauptschnitte parallel; folglich ist

$$q = 2\bar{P}\infty$$
$$r = 2\breve{P}\infty$$

Digitized by Google

Diese, wegen ihrer sphenoidischen Hemiëdrie sehr merkwürdige Combination ist nun gleichfalls, und zwar unabhängig von allen Messungen entwickelt, und ihr vollständiges Zeichen:

$$\infty P . \infty \breve{P}\infty . \infty \bar{P}\infty . \frac{P}{2} . -\frac{P}{2} . \breve{P}\infty . \bar{P}\infty . \frac{2\breve{P}2}{2} . \frac{2\bar{P}2}{2} . 2\breve{P}\infty . 2\bar{P}\infty .$$

Fünfter Abschnitt.

Vom monoklinoëdrischen Systeme.

Erstes Capitel.

Von den Axen und einzelen Gestalten des monoklinoëdrischen Systemes.

§. 448.

Axen und Hauptschnitte.

Das monoklinoëdrische System *) ist nach §. 45 der Inbegriff aller derjenigen Krystallformen, deren geometrischer Grundcharakter durch drei Coordinatebenen bestimmt wird, von welchen sich zwei unter einem schiefen Winkel C schneiden, während die dritte auf ihnen rechtwinklig ist. Die drei Axen, welche sich als die Durchschnittslinien dieser Ebenen ergeben, scheinen jedenfalls in dem Verhältnisse der Ungleichheit zu stehen, also durch $a : b : c$ repräsentirt werden zu müssen, obgleich die Verhältnisse der Gleichheit zweier gegen eine ungleiche, und selbst der durchgängigen Gleichheit aller drei Axen dem we-

---

*) Hemiprismatisches System, Mohs; zwei-und-eingliedriges, so wie ein-und-zweigliedriges S., Weiss; hemirhombisches S., Breithaupt; klinorhombisches S. nach meiner früheren Benennung.

Digitized by Google

sentlichen Charakter des Systemes nicht widerstreiten würden *). Zwischen den drei Axen finden dieselben Neigungsverhältnisse Statt, wie zwischen den drei Coordinatebenen, d. h. zwei derselben schneiden sich unter einem schiefen Winkel $\gamma = C$, während die dritte auf ihnen beiden rechtwinklig ist. Die eine Coordinatebene, welche im Vergleiche zu den beiden andern einen eminenten Charakter besitzt, und den ganzen Inbegriff von Ebenen und Linien in zwei congruente Hälften theilt, bestimmt auch die normale Stellung des Systemes, welches dem Beobachter nur dann in der grössten Symmetrie erscheint, wenn jene Ebene vertical steht und auf ihn zuläuft. Da nun in derselben Ebene die beiden schiefwinkligen Axen enthalten sind, so wird auch nur eine dieser Axen zur Hauptaxe erwählt, und nur nach einer von ihnen die aufrechte Stellung bestimmt werden können. Die beiden andern Axen erhalten dann die Bedeutung von Nebenaxen, welche durch ihre Lage wesentlich verschieden sind, indem die eine rechtwinklig, die andere schiefwinklig gegen die Hauptaxe, und daher bei aufrechter Stellung jene horizontal, diese geneigt ist. Da sie nun zugleich die Diagonalen der durch sie gehenden, geneigten rhombischen Basis des Systemes bilden, so unterscheiden wir sie ein für alle Mal als Orthodiagonale und Klinodiagonale, und benennen auf gleiche Weise die Coordinatebene durch die Hauptaxe und geneigte Nebenaxe den klinodiagonalen Hauptschnitt, die Coordinatebene durch die Hauptaxe und horizontale Nebenaxe den ortho-

*) Auf der andern Seite würden aber auch diese Verhältnisse für die Erscheinungsweise der Gestalten keine grössere Symmetrie zur Folge haben, indem mit diesem Neigungsverhältnisse der Axen ein, durch kein Grössenverhältniss auszugleichender Charakter der Unsymmetrie eintritt.

Digitized by Google

diagonalen Hauptschnitt. Die schiefe Lage der rhombischen Basis ist ein besonders hervorstechendes Merkmal der Krystallformen dieses Systemes.

§. 449.

Rechtfertigung des geometrischen Grundcharakters.

Man hat dieses System als eine blosse hemiëdrische Modification des rhombischen Systemes zu deuten, und somit die Selbständigkeit und Eigenthümlichkeit desselben zweifelhaft zu machen gesucht. Da diese Vorstellungsweise von der hier befolgten wesentlich abweicht, so erlaube ich mir zur Rechtfertigung der von mir adoptirten, und hier zu Grunde gelegten Ansicht folgende Bemerkungen.

Nicht zu läugnen ist es, dass die Zurückführung der monoklinoëdrischen Krystallformen auf das rhombische System für die Berechnung grosse Vortheile gewährt, weil der schiefe Neigungswinkel ein den Calcül nicht wenig erschwerendes Element ist. Allein hierin, und allenfalls in dem Zusammenhange, welcher dadurch für einigermaassen verwandte Formen gewonnen wird, scheint mir der einzige erhebliche Vortheil dieser Ansicht zu liegen Die Symmetrie der Combinationen, die Einfachheit der Bezeichnung und die Leichtigkeit der Uebersicht müssen mehr oder weniger aufgeopfert werden, um jene Vereinfachung des Calcüls zu gewinnen. Ausserdem scheinen aber noch folgende Umstände der Deutung des monoklinoëdrischen, als eines blos hemirhombischen Systemes entgegen zu stehen.

1) Die Art der Hemiëdrie, wie solche für die Ableitung der monoklinoëdrischen Formen aus dem rhombischen Systeme gefordert wird, findet kein Analogon, weder im tetragonalen, noch im hexagonalen oder tesseralen Systeme; ihr Gesetz ist eben so abweichend, als ihre Resultate fremd-

artig sind, so dass eher von einer unsymmetrischen Halbirung als von einer Hemiëdrie die Rede seyn kann (vergl. §. 451).

2) Die Erscheinung der Gegenkörper oder complementären hemiëdrischen Formen, welche in allen übrigen, der Hemiëdrie fähigen Systemen häufig beobachtet wird, ist kaum für eine der monoklinoëdrischen Krystallreihen mit hinlänglicher Evidenz dargethan.

3) In den bekannten rhombischen Krystallreihen sind die gegenseitigen Verhältnisse der einzelen Gestalten und die ihnen entsprechenden Ableitungszahlen sehr einfach; diese Einfachheit geht für die monoklinoëdrischen Krystallreihen grossentheils verloren, wenn man solche als hemirhombische betrachtet; und man begreift nicht, warum die angebliche Hemiëdrie nur in diesem Systeme solche Störungen veranlassen soll, von welchen sich in den übrigen Systemen keine Spur findet, indem in ihrer hemiëdrischen Erscheinungsweise dieselben einfachen Verhältnisse obwalten wie in ihrer holoëdrischen Ausbildung.

4) In den bekannten rhombischen Krystallreihen ist die Erscheinung der drei, auf einander rechtwinkligen Flächenpaare etwas ganz Gewöhnliches. Da nun die angebliche Hemiëdrie diese Flächenpaare nicht verdrängen kann, so ist es sehr zu verwundern, dass bis jetzt das gleichzeitige Vorkommen derselben kaum für eine einzige monoklinoëdrische Krystallreihe bestimmt nachgewiesen werden konnte.

5) In den entwickelteren rhombischen Krystallreihen erscheinen neben den verticalen auch beide Arten von horizontalen Prismen; während gerade in den entwickeltsten monoklinoëdrischen Kry-

stallreihen nie drei auf einander rechtwinklige Prismen oder Hemiprismen zu beobachten sind.

Ausser diesen Gründen, welche für die folgenden beiden, als tetartoëdrische Modificationen des rhombischen Systemes gedeuteten Krystallsysteme auf ähnliche Weise gelten, lassen sich noch andre aus den physischen Verhältnissen der monoklinoëdrischen Krystallreihen ableiten, welche für die Annahme schiefwinkliger Axen sprechen, so dass ich mich unbedingt zur Beibehaltung derselben entschlossen habe, zumal da sich neuerdings sehr competente Auctoritäten für dieselben ausgesprochen haben *).

§. 450.

Construction einer monoklinoëdrischen Gestalt.

Wenn wir um ein monoklinoëdrisches Axensy-

---

*) Man kann besonders den Wolfram und Pyroxen als ein paar wichtige Instanzen gegen die Annahme eines monoklinoëdrischen, und für die Realität eines eigenthümlichen hemirhombischen Systemes anführen, da die Zwillingsbildung für beide Species auf eine von Messungen ganz unabhängige Art den orthometrischen Charakter darthut (vergl. §. 657 und 660). Allein abgesehen davon, dass sie vielleicht die einzigen Species sind, für welche dies als erwiesen betrachtet werden kann (während die Dimensionen der übrigen monoklinoëdrischen Krystallreihen, und selbst jene des Orthoklases, mit der Annahme rechtwinkliger Axen nicht wohl vereinbar sind), so scheint auch der Habitus und die ganze Entwicklung ihrer Krystallformen weit mehr für ihre Einordnung in das monoklinoëdrische System zu sprechen, in welchem man also, wie dies schon von Mohs geschehen ist, einige Krystallreihen anzunehmen haben würde, in denen die Abweichung der Klinodiagonale von der horizontalen Lage = 0, oder der Winkel $C = 90°$ ist. Wenn also durch solche Krystallreihen eine Art von Verknüpfung zwischen dem monoklinoëdrischen und rhombischen Systeme indicirt zu seyn scheint, so ist doch die wesentliche Verschiedenheit ihrer beiderseitigen Gestaltungsgesetze qualitativ zu scharf ausgesprochen, und in den meisten monoklinoëdrischen Krystallreihen quantitativ zu fest begründet, um die Deutung aller dieser letzteren als blosser hemirhombischer Krystallreihen zu gestatten.

Digitized by Google

stem, in Uebereinstimmung mit dem in §. 46 aufgestellten Begriffe von Gestalt, für das Verhältniss dreier ungleicher Parameter *a*, *b* und *c* den vollständigen Inbegriff aller möglichen isoparametrischen Flächen construiren, so finden wir die Zahl derselben jedenfalls auf acht beschränkt, und zugleich das merkwürdige, aber sehr begreifliche Resultat, dass diese, sich gegenseitig zu Dreiecken begränzenden acht Flächen zweierlei verschiedenen Werthes sind, indem die, in dem spitzen Winkelraume des basischen und orthodiagonalen Hauptschnittes gelegenen vier Dreiecke von den, in dem stumpfen Winkelraume derselben Hauptschnitte gelegenen vier Dreiecken wie durch ihre Lage, so durch ihre Figur abweichen. Die beiderlei Dreiecke haben nämlich zwei Seiten gleich, aber die dritte Seite ungleich, und zwar die über dem spitzen Winkel *C* gelegenen die kleinere, die andern die grössere dritte Seite. Da nun jede einfache Gestalt nicht nur von isoparametrischen, sondern auch von gleichen und ähnlichen Flächen umschlossen seyn muss (§. 46), so kann die so construirte monoklinoëdrische Gestalt auch keine einfache, sondern nur eine zusammengesetzte, und zwar eine dimerische oder aus zwei Theilgestalten zusammengesetzte Gestalt seyn.

§. 451.

Selbständigkeit der Theilgestalten.

In dem zusammengesetzten Charakter seiner Gestalten liegt der Grund der so eigenthümlichen Erscheinungsweise dieses Systemes, welche es auf den ersten Blick vom rhombischen Systeme unterscheiden lässt, selbst wenn der Winkel *C* einem rechten sehr nahe kommen, und daher die schiefe Lage der Basis der unmittelbaren Beobachtung entgehen sollte. Es besteht nämlich zwischen den beiden Theilgestalten

Digitized by Google

einer jeden monoklinoëdrischen Gestalt eine so völlige Unabhängigkeit ihres Auftretens, dass nichts weniger als ein nothwendiges Zusammenvorkommen oder eine gleichzeitige und gleichmässige Ausbildung derselben gefordert wird, vielmehr die eine ganz unabhängig von der andern in die Combinationen eingeht; weshalb denn auch von vielen Gestalten der bekannten monoklinoëdrischen Krystallreihen bis jetzt nur einzele Theilgestalten beobachtet sind, und diejenigen Fälle, da beide Theilgestalten zugleich und im Gleichgewichte vorkommen, zu den seltneren gehören.

Diese Zerfällbarkeit der Gestalten in zwei wesentlich verschiedene, und von einander unabhängige Elemente ist also eine dem gegenwärtigen Krystallsysteme ganz eigenthümliche Art der Hemiëdrie, welche mit dem gleichnamigen Verhältnisse in den bisher betrachteten Krystallsystemen nicht wohl als identisch betrachtet werden kann,

1) weil in der verschiedenen Lage und Figur der beiderlei Flächen eine Disposition, ich möchte sagen eine innere Nothwendigkeit, zu jener Zerfällung gegeben ist, von welcher in den holoëdrischen Gestalten der übrigen Krystallsysteme keine Andeutung zu finden;
2) weil die Theilgestalten offene, oder den Raum nicht umschliessende Gestalten sind, während die hemiëdrischen Gestalten der bisherigen Krystallsysteme eben so wohl, als ihre respectiven Muttergestalten geschlossene Gestalten waren;
3) weil die beiden Theilgestalten einer und derselben Stammform keine gleichwerthigen Gestalten sind, da doch je zwei aus einer und derselben Muttergestalt abzuleitende hemiëdrische Gegenkörper als zwei, nur durch ihre Stellung oder die Verknüpfung ihrer Begränzungselemente verschiedene Ebenbilder befunden wurden.

Digitized by Google

§. 452.

Einzeln Gestalten des Systemes.

Die verschiedenen Gestalten dieses Systemes sind

1) Monoklinoëdrische, in zwei Theilgestalten zerfallende (dimerische) Pyramiden.

Die in §. 450 construirte monoklinoëdrische Gestalt wird nämlich im Allgemeinen als eine Pyramide zu bezeichnen seyn, da sie eine von acht Dreiecken umschlossene Gestalt ist, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen. Obgleich nun diese monoklinoëdrischen Pyramiden selten vollständig, sondern gewöhnlich nur zur Hälfte, mit einer ihrer Theilgestalten ausgebildet sind, so müssen wir doch sowohl für die Betrachtung der einzelen Gestalten, als auch ganz besonders für die Lehren der Ableitung eine vollständige Erscheinungsweise derselben voraussetzen, weil es ausserdem nicht wohl möglich seyn würde, eine geordnete Uebersicht der verschiedenen Gestalten dieses Systemes und der sie verknüpfenden Verhältnisse zu gewinnen.

2) Prismen, welche, je nachdem sie der Hauptaxe, der Klinodiagonale oder Orthodiagonale parallel sind, als verticale, geneigte und horizontale Prismen erscheinen; diese letzteren zerfallen in zwei, von einander unabhängige Hemiprismen.

2) Die drei Coordinatebenen des Systemes, als basisches, orthodiagonales und klinodiagonales Flächenpaar.

§. 453.

Monoklinoëdrische Pyramiden.

Die vollständig erscheinenden monoklinoëdrischen Pyramiden, Fig. 530, sind von acht, zweierlei ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen, und haben 12 Kanten, 6 Ecke.

Digitized by Google

Die Flächen gruppiren sich in vier Flächenpaare, indem immer je zwei gleiche und ähnliche Flächen ein Flächenpaar bilden, und je zwei gleichwerthige Paare für einander als Gegenflächenpaare erscheinen. Die ganze Pyramide zerfällt also in zwei Hemipyramiden, und jede Hemipyramide wiederum in zwei einander gegenüberliegende Glieder. Wir nennen diejenige Theilgestalt, deren Flächen über dem spitzen Winkel *C* liegen, die positive, die andre die negative Hemipyramide, und unterscheiden sie in der Bezeichnung durch Vorsetzung der Hülfselemente + und —.

Die Kanten sind viererlei: 2 symmetrische, längere, stumpfere Polkanten der negativen; 2 dergleichen, kürzere, schärfere Polkanten der positiven Hemipyramide; 4 unregelmässige, von beiden Hemipyramiden gebildete Polkanten, und 4 eben dergleichen Mittelkanten. Von diesen Kanten sind die beiden erst genannten Polkanten von besonderer Wichtigkeit.

Die Ecke sind unregelmässig, vierflächig und dreierlei: 2 dreierleikantige Polecke, 2 dergleichen Mittelecke, an den Endpuncten der Klinodiagonale, und 2 zweierleikantige Mittelecke an den Endpuncten der Orthodiagonale.

Der basische und orthodiagonale Hauptschnitt sind Rhomben, der klinodiagonale Hauptschnitt ist ein Rhomboid.

§. 454.

Hemipyramiden.

Jede Hemipyramide stellt für sich allein einen Inbegriff von vier, ihren Polkanten parallelen Flächen, also eigentlich eine offene, prismen-ähnliche Gestalt dar, welche sich jedoch von den eigentlichen Prismen dadurch unterscheidet, dass ihre Flächen keiner der krystallographischen Axen parallel sind (§. 56). Sie

kann übrigens eben so wenig, als irgend ein Prisma, selbständig, sondern nur in Combination mit andern, ihre indefinite Ausdehnung begränzenden Gestalten auftreten. Weil aber je zwei zusammengehörige oder coordinirte Hemipyramiden nur selten zugleich, und noch seltner im Verhältnisse des Gleichgewichtes in einer und derselben Combination aufzutreten pflegen, so wird die Bestimmung ihrer selbständigen Erscheinungsweise von noch grösserer Wichtigkeit, als die Bestimmung ihres gemeinschaftlichen Vorkommens in der vollständigen monoklinoëdrischen Pyramide.

Die Hemipyramiden zerfallen in ein oberes und ein unteres Glied oder Flächenpaar, und haben 4 Kanten.

Ihre Kanten sind einander parallel, aber zweierlei: zwei, im klinodiagonalen Hauptschnitte liegende Polkanten, und zwei Mittelkanten.

Jede Fläche einer Hemipyramide kommt mit den drei Hauptschnitten zum Durchschnitte, und bildet daher eine basische, orthodiagonale und klinodiagonale Intersection, welche Intersectionen nur dann als wirkliche Kanten erscheinen, wenn das, dem resp. Hauptschnitte entsprechende Flächenpaar mit der Hemipyramide wirklich combinirt ist.

Die Neigungswinkel jeder Pyramidenfläche gegen die drei Coordinatebenen werden gleichfalls nach den Namen dieser Ebenen als die basische, orthodiagonale und klinodiagonale Kante der Hemipyramide unterschieden.

Von den übrigen Gestalten des Systemes kann erst im folgenden Capitel die Rede seyn, weil solche nur als die Gränzgestalten der Pyramiden zu betrachten sind.

Digitized by Google

Zweites Capitel.
Von der Ableitung der monoklinoëdrischen Gestalten.

§. 455.
Grundgestalt.

Für die Ableitungen in diesem Systeme wählen wir irgend eine vollständige monoklinoëdrische Pyramide als Grundgestalt, bezeichnen sie mit $\pm$P, indem wir die Zeichen ihrer Theilgestalten zusammenziehen, und setzen das Verhältniss ihrer Hauptaxe, Klinodiagonale und Orthodiagonale $= a : b : c$, den Neigungswinkel der schiefen Axen $= \gamma$.

Aus dieser vollständigen Pyramide leiten wir die übrigen Gestalten gerade so ab, als ob auch sie jedenfalls vollständig und in derjenigen Regelmässigkeit erschienen, welche ein vollkommenes Gleichgewicht in der Ausbildung ihrer resp. Theilgestalten voraussetzen würde. Obgleich nun die Wirklichkeit dieser Voraussetzung nur selten, und auch dann nur annäherungsweise entspricht, so müssen wir sie doch als Hülfsvorstellung gelten lassen, um zu einer leichten Uebersicht sämmtlicher Gestalten, und zu einer bestimmten Einsicht in ihren gegenseitigen Zusammenhang zu gelangen.

§. 456.
Hauptreihe monoklinoëdrischer Pyramiden.

Aus der Grundgestalt $\pm$P lässt sich eine Reihe monoklinoëdrischer Pyramiden von gleicher Basis und Flächenstellung ableiten.

Man multiplicire die Hauptaxe der Grundgestalt mit einem Coëfficienten m, der $>$ oder $<$ 1, und lege für jeden Werth von m Ebenen durch die Mittelkanten und die Endpuncte der verlängerten oder

verkürzten Hauptaxe, so wird jedenfalls über derselben Basis eine monoklinoëdrische Pyramide von *m*facher Axe construirt, deren Zeichen $= \pm m$P. Da nun *m* alle rationalen Werthe zwischen 0 und ∞, auch diese Gränzwerthe selbst annehmen kann, so erhalten wir einen zahllosen Inbegriff von dergleichen Pyramiden, der sich unter dem Schema der Reihe

$$\begin{matrix} & m < 1 & & m > 1 & \\ o\mathrm{P} \ldots\ldots & \pm m\mathrm{P} \ldots\ldots & \pm\mathrm{P} \ldots\ldots & \pm m\mathrm{P} \ldots\ldots & \infty\mathrm{P} \end{matrix}$$

darstellen lässt, in welcher die Glieder linker Hand von P lauter flachere, die Glieder rechter Hand aber lauter spitzere Pyramiden sind, als $\pm$P.

Diese Reihe heisst wieder die Hauptreihe, ist aber eigentlich eine Doppelreihe, indem die positiven und negativen Hemipyramiden in gegenseitiger Unabhängigkeit neben einander fortlaufen, und jedes $+m$P keinesweges an sein $-m$P so gebunden ist, dass beide zugleich auftreten müssten. Nur in den Gränzgliedern verschwindet diese Zweideutigkeit, indem *o*P die schiefe Basis oder jede ihr parallele Fläche, und ∞P ein verticales Prisma von rhombischem Querschnitte bedeutet, welches immer auf dieselbe Weise erscheint, man mag es als $+\infty$P oder als $-\infty$P betrachten, wiewohl seine Flächen eine verschiedene Bedeutung haben, indem zwei auf die obere, und zwei auf die untere Hälfte der Hauptaxe zu beziehen sind. Die Combination ∞P.*o*P stellt daher ein verticales rhombisches Prisma mit schief angesetzter Endfläche (ein Hendyoëder) dar.

§. 457.

Reihen der orthodiagonalen und klinodiagonalen Gestalten.

Aus jedem Gliede der Hauptreihe lassen sich zwei Reihen von Gestalten ableiten, in welchen einerseits die Klinodiagonale, anderseits die Orthodiagonale der Grundgestalt noch unverändert enthalten ist.

Digitized by Google

Da wegen des verschiedenen Werthes der beiden Nebenaxen für dieses und die folgenden Krystallsysteme die für das rhombische System in §. 414 aufgestellte Regel zu berücksichtigen, und daher für die ferneren Ableitungen jede Diagonale besonders in Anspruch zu nehmen ist, so werden sich auch aus jedem Gliede $\pm m$P der Hauptreihe zwei verschiedene Inbegriffe von Gestalten ableiten lassen. Wir werden diese Gestalten nach dem Namen derjenigen Diagonale, durch deren Veränderung sie erhalten werden, als orthodiagonale und klinodiagonale Gestalten, und die Zeichen der letzteren von den Zeichen der ersteren dadurch unterscheiden, dass wir selbige in Klammern schliessen.

Man vervielfache also in irgend einem $\pm m$P zuvörderst die Orthodiagonale nach einem rationalen Coëfficienten n, dessen Gränzwerthe 1 und ∞, und verbinde die Endpuncte der Klinodiagonale mit den Endpuncten der so verlängerten Orthodiagonale, so wird jedenfalls in der Ebene der Basis ein Rhombus von den Diagonalen $2b$ und $2nc$ construirt. Legt man nun Ebenen durch die Seiten dieses Rhombus und durch die Pole der Hauptaxe von $\pm m$P, so wird eine monoklinoëdrische Pyramide, zwar von gleicher Hauptaxe und Klinodiagonale mit $\pm m$P, aber von grösserer Orthodiagonale, daher auch von verschiedener Basis und Flächenstellung zum Vorscheine kommen, deren Zeichen $= \pm m$Pn.

Da nun n alle rationalen Werthe von 1 bis ∞ annehmen kann, so folgt aus jedem Gliede der Hauptreihe eine Reihe orthodiagonaler Gestalten:

$$\pm m\text{P} \ldots\ldots \pm m\text{P}n \ldots\ldots \pm m\text{P}\infty$$

welche gleichfalls eigentlich eine Doppelreihe ist, weil jede ihrer Gestalten in zwei, von einander unabhängige Theilgestalten zerfällt. Ihre Gränzglieder sind einerseits $\pm m$P, oder das der Ableitung zu Grunde

Digitized by Google

gelegte Glied der Hauptreihe, anderseits $\pm m$P∞, oder ein horizontales Prisma von rhomboidischem Querschnitte, welches wegen der verschiedenen Lage und Ausdehnung seiner Flächen in zwei, von einander unabhängige Hemiprismen zerfällt.

Ganz auf ähnliche Art gelangt man aus jedem $\pm m$P, indem man, bei constanter Orthodiagonale, den Coëfficienten n auf die Klinodiagonale bezieht, auf eine Reihe von klinodiagonalen Gestalten

$$\pm m\text{P} \ldots\ldots \pm(m\text{P}n) \ldots\ldots (m\text{P}\infty)$$

welche wiederum, mit Ausnahme des letzten Gliedes, eine Doppelreihe ist. Dieses, von dem Gränzgliede der vorigen Reihe wesentlich verschiedene letzte Glied ist nämlich ein geneigtes Prisma oder Klinoprisma von rhombischen Querschnitten, und eine einfache Gestalt, deren vier Flächen jederzeit vollständig erscheinen.

§. 458.

Reihen der orthodiagonalen und klinodiagonalen Prismen.

Machen wir die Ableitungen des vorhergehenden §. auf ∞P, oder das verticale Prisma der Hauptreihe geltend, so erhalten wir zwei verschiedene Reihen verticaler Prismen. Die erste dieser Reihen, oder die Reihe der orthodiagonalen Prismen hat die Form

$$\infty\text{P} \ldots\ldots \infty\text{P}n \ldots\ldots \infty\text{P}\infty$$

ihre mittleren Glieder bilden Zuschärfungen, ihr letztes Glied Abstumpfungen der klinodiagonalen Seitenkanten von ∞P, indem dieses letzte Glied ein, dem orthodiagonalen Hauptschnitte paralleles Flächenpaar darstellt, und daher den Namen des orthodiagonalen Flächenpaares führt.

Die zweite Reihe, oder die Reihe der klinodiagonalen Prismen hat die Form

$$\infty\text{P} \ldots\ldots (\infty\text{P}n) \ldots\ldots (\infty\text{P}\infty)$$

ihre mittleren Glieder bilden Zuschärfungen, ihr letz-

Digitized by Google

tes Glied Abstumpfungen der orthodiagonalen Seitenkanten von ∞P, indem dieses letzte Glied ein, dem klinodiagonalen Hauptschnitte paralleles Flächenpaar darstellt, und daher den Namen des *klinodiagonalen Flächenpaares* führt.

Anmerkung. Um die verschiedenen Prismen, welche in diesem Systeme vorkommen, kurz und bezeichnend unterscheiden zu können, wollen wir uns künftig für verticale Prismen des Wortes *Prisma* schlechthin; für horizontale Prismen, weil solche nur in ihren Theilgestalten erscheinen, des Wortes *Hemiprisma*, und für geneigte Prismen des Wortes *Klinoprisma* bedienen.

§. 459.

Schema des monoklinoëdrischen Systemes.

In den Resultaten der vorhergehenden §§. ist die Aufgabe der Ableitung vollständig gelöst; eine Zusammenstellung jener Resultate lässt uns zu folgender schematischen Uebersicht der sämmtlichen Gestalten des Systemes gelangen:

	$m<1$		$m>1$	
$oP\infty$	$\pm mP\infty$	$\pm P\infty$	$\pm mP\infty$	$\infty P\infty$
oPn	$\pm mPn$	$\pm Pn$	$\pm mPn$	∞Pn
oP	$\pm mP$	$\pm P$	$\pm mP$	∞P
(oPn)	$\pm(mPn)$	$\pm(Pn)$	$\pm(mPn)$	(∞Pn)
$(oP\infty)$	$(mP\infty)$	$(P\infty)$	$(mP\infty)$	$(\infty P\infty)$

Der blosse Anblick dieses Schemas lehrt uns folgende Verhältnisse der in ihm enthaltenen Gestalten kennen:

Digitized by Google

1) Die mittelste horizontale Reihe, oder die Hauptreihe des Systemes enthält alle Pyramiden, so wie das Prisma von gleicher Basis und Flächenstellung mit der Grundgestalt; die sämmtlichen Pyramiden erscheinen als Hemipyramiden.

2) Das ganze Schema wird durch die Hauptreihe in zwei Hälften getheilt, von welchen die obere die orthodiagonale, die untere die klinodiagonale Hälfte genannt wird; die Hauptreihe selbst hat einen neutralen Charakter, und ihre Gestalten lassen sich eben so gut der einen wie der andern Hälfte beirechnen.

3) Die oberste horizontale Reihe, welche wir die orthodiagonale Nebenreihe nennen, enthält die sämmtlichen Hemiprismen, so wie das orthodiagonale Flächenpaar.

4) Die unterste horizontale Reihe, welche wir die klinodiagonale Nebenreihe nennen, enthält die sämmtlichen Klinoprismen, so wie das klinodiagonale Flächenpaar; keine der in ihr enthaltenen Gestalten zerfällt in Theilgestalten.

5) Die mittleren horizontalen Reihen der oberen Hälfte des Schemas, oder die orthodiagonalen Zwischenreihen enthalten alle orthodiagonalen Pyramiden und Prismen; jede Pyramide zerfällt in zwei Hemipyramiden.

6) Die mittleren horizontalen Reihen der unteren Hälfte des Schemas, oder die klinodiagonalen Zwischenreihen enthalten sämmtliche klinodiagonale Pyramiden und Prismen; jede Pyramide zerfällt in zwei Hemipyramiden.

7) Jede verticale Reihe enthält Gestalten von gleicher Länge der Hauptaxe (daher die äusserste Reihe rechter Hand sämmtliche Prismen), zerfällt aber, wie das ganze Schema, in eine orthodiagonale und eine klinodiagonale Hälfte;

Digitized by Google

jene begreift lauter Gestalten, in welchen der klinodiagonale Hauptschnitt, diese lauter Gestalten, in welchen der orthodiagonale Hauptschnitt des Gliedes der Hauptreihe noch unverändert enthalten ist.

Drittes Capitel.

Von der Berechnung der monoklinoëdrischen Gestalten.

§. 460.

Vorbereitung.

Wegen des isolirten Auftretens ihrer Theilgestalten ist die Berechnung der vollständigen monoklinoëdrischen Pyramiden von weit geringerer Wichtigkeit, als die Berechnung der Hemipyramiden. Weil aber diese letzteren keine geschlossene Gestalten sind, so müssen wir ihrer Ausdehnung dieselben Gränzen setzen, welche ihr in der vollständigen Pyramide zukommen, indem wir für jedes Glied einer Hemipyramide, nächst seinen zwei eigenthümlichen Flächen, den basischen und orthodiagonalen Hauptschnitt als Begränzungsflächen setzen. Um nun die Berechnung in der grössten Allgemeinheit zu führen, haben wir selbige auf die Hemipyramide +P oder —P, von dem Verhältnisse $a:b:c$ und dem Neigungswinkel $C=\gamma$ zu gründen. Wir bezeichnen in P

die klinodiagonale Kante mit X
- orthodiagonale - - Y
- basische - - Z

die ebenen Winkel jeder Fläche, analog den ihnen gegenüberliegenden Kanten, mit ξ, v und ζ, und dieselben Kanten und Winkel in der negativen Hemipy-

ramide — P mit den accentuirten Buchstaben X', Y', Z', ξ', v' und ζ'.

Endlich bezeichnen wir in P den Neigungswinkel
d. klinod. Polk. gegen die Hauptaxe mit μ
- - - - - - - Klinodiagonale mit ν
- orthod. Kante - - - Axe mit π
- basischen Kante - - Klinodiagonale mit σ
und die beiden ersteren Winkel in der negativen Hemipyramide mit μ' und ν'.

§. 461.

Flächen-Normale.

Die Gleichungen der Flächen-Normale für die positive Hemipyramide P sind die in §. 28 stehenden Gleichungen (25), (26) und (27), wenn man in ihnen γ statt ϱ schreibt, also

$$\frac{x}{b - a\cos\gamma} - \frac{y}{a - b\cos\gamma} = 0$$

$$\frac{z}{ab\sin^2\gamma} - \frac{x}{c(b - a\cos\gamma)} = 0$$

$$\frac{y}{c(a - b\cos\gamma)} - \frac{z}{ab\sin^2\gamma} = 0$$

setzt man $\cos\gamma$ negativ, so gelten dieselben Gleichungen für die Flächen-Normale der negativen Hemipyramide.

Durch Combination der orthometrischen Gleichungen der Flächen-Normale (22), (23) und (24) in §. 28 mit der gleichfalls orthometrischen Gleichung der Fläche F erhält man die orthometrischen Coordinaten x_1, y_1 und z ihres Durchschnittspunctes; addirt man die Quadrate derselben, und zieht aus der Summe die Quadratwurzel, so erhält man die Länge der Flächennormale

$$N = \frac{abc\sin\gamma}{\sqrt{a^2b^2\sin^2\gamma + c^2(a^2 + b^2 \mp 2ab\cos\gamma)}}$$

in welchem Ausdrucke die oberen Zeichen für die po-

Digitized by Google

sitive, die unteren für die negative Hemipyramide gelten. Setzt man den Nenner $= M$ oder $= M'$, je nachdem $\cos\gamma$ positiv oder negativ ist, so wird

$$N = \frac{abc \sin\gamma}{M}$$

$$N' = \frac{abc \sin\gamma}{M'}$$

§. 462.

Kantenlinien oder Intersectionen.

Die klinodiagonale Kantenlinie ist in der positiven Hemipyramide kleiner als in der negativen, weil sie für jene den spitzen, für diese den stumpfen, zwischen den Seiten a und b eingeschlossenen Winkel γ schliesst; es wird daher

$$X = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma}$$
$$X' = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos\gamma}$$

Die orthodiagonale und basische Kantenlinie Y und Z haben dagegen für beide Hemipyramiden dieselben Werthe, nämlich

$$Y = \sqrt{a^2 + c^2}$$
$$Z = \sqrt{b^2 + c^2}$$

§. 463.

Volumen und Oberfläche.

Das Volumen v jeder Hemipyramide ist gleich dem doppelten Volumen φ eines ihrer Glieder. Betrachtet man die halbe Basis $= bc$ als Grundfläche eines solchen Gliedes, so wird $a \sin\gamma$ die Höhe desselben, und daher

$$\varphi = \tfrac{1}{3} abc \sin\gamma$$
$$v = 2\varphi = \tfrac{2}{3} abc \sin\gamma$$

und endlich das Volumen der vollständigen Pyramide

$$V = 2v = 4\varphi = \tfrac{4}{3} abc \sin\gamma$$

Dividirt man $3v$ durch die Flächennormale N oder

N', so folgt für die Oberfläche s oder s' der positiven oder negativen Hemipyramide

$$s = 2M, \quad s' = 2M'$$

und der Flächeninhalt einer Pyramidenfläche

$$F = \tfrac{1}{2}M, \quad F' = \tfrac{1}{2}M'$$

§. 464.

Flächenwinkel.

Die Sinus der Flächenwinkel finden sich unmittelbar aus den bekannten Flächeninhalten F und F', und den gleichfalls bekannten Seiten X, X', Y und Z, nach den Formeln

$$\sin\xi = \frac{2F}{YZ}, \quad \sin\xi' = \frac{2F'}{YZ} \text{ u. s. w.}$$

Die Cosinus derselben Winkel erhält man mittels der Formeln in §. 30, oder auch nach bekannten Formeln der Triëdrometrie

$$\cos\begin{Bmatrix}\xi\\ \xi'\end{Bmatrix} = \frac{c^2 \pm ab\cos\gamma}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$\cos\begin{Bmatrix}v\\ v'\end{Bmatrix} = \frac{b(b \mp a\cos\gamma)}{\sqrt{a^2+b^2 \mp 2ab\cos\gamma}\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$\cos\begin{Bmatrix}\zeta\\ \zeta'\end{Bmatrix} = \frac{a(a \mp b\cos\gamma)}{\sqrt{a^2+b^2 \mp 2ab\cos\gamma}\sqrt{a^2+c^2}}$$

Kennt man erst M und M', so werden diese Winkel am leichtesten durch ihre Tangenten bestimmt, wie folgt:

$$\tan\xi = \frac{M}{c^2+ab\cos\gamma}, \quad \tan\xi' = \frac{M'}{c^2-ab\cos\gamma}$$

$$\tan v = \frac{M}{b(b-a\cos\gamma)}, \quad \tan v' = \frac{M'}{b(b+a\cos\gamma)}$$

$$\tan\zeta = \frac{M}{a(a-b\cos\gamma)}, \quad \tan\zeta' = \frac{M'}{a(a+b\cos\gamma)}$$

Es ist *in praxi* sehr wichtig, diese Winkel, zumal aber v und ζ, als Functionen der Kantenwinkel X, Y und Z und der Hauptschnittwinkel μ, ν, π

Digitized by Google

und σ zu kennen; diese Ausdrücke sind nach bekannten Regeln

$$\cos v = \cot X \cot Z \qquad \cos v' = \cot X' \cot Z'$$
$$= \cos \nu \cos \sigma \qquad = \cos \nu' \cos \sigma$$
$$\tan v = \frac{\tan \nu}{\cos X} \qquad \tan v' = \frac{\tan \nu'}{\cos X'}$$
$$= \frac{\tan \sigma}{\cos Z} \qquad = \frac{\tan \sigma}{\cos Z'}$$
$$\cos \zeta = \cot X \cot Y \qquad \cos \zeta' = \cot X' \cot Y'$$
$$= \cos \mu \cos \pi \qquad = \cos \mu' \cos \pi$$
$$\tan \zeta = \frac{\tan \mu}{\cos X} \qquad \tan \zeta' = \frac{\tan \mu'}{\cos X'}$$
$$= \frac{\tan \pi}{\cos Y} \qquad = \frac{\tan \pi}{\cos Y'}$$

§. 465.

Winkel der Hauptschnitte.

Die Winkel der Hauptschnitte μ, μ' ν, ν', π und σ spielen eine so wichtige Rolle bei den Berechnungen im Gebiete dieses Systemes, dass es nöthig ist, sie als Functionen sowohl der Axen als auch der Kantenwinkel zu kennen.

Man findet zuvörderst

$$\tan \begin{Bmatrix} \mu \\ \mu' \end{Bmatrix} = \frac{b \sin \gamma}{a \mp b \cos \gamma}$$

$$\tan \begin{Bmatrix} \nu \\ \nu' \end{Bmatrix} = \frac{a \sin \gamma}{b \mp a \cos \gamma}$$

$$\tan \pi = \frac{c}{a}$$

$$\tan \sigma = \frac{c}{b}$$

Da die vorstehenden Ausdrücke für $\tan \mu$ und $\tan \nu$ sehr oft in Rechnung kommen, so wird es vortheilhaft seyn, sie etwas bequemer einzurichten, indem man sie zunächst auf die Form

Digitized by Google

$$\frac{\frac{b}{a}\sin\gamma}{1\mp\frac{b}{a}\cos\gamma} \text{ und } \frac{\frac{a}{b}\sin\gamma}{1\mp\frac{a}{b}\cos\gamma}$$

bringt, und dann $\frac{b}{a}\sin\gamma = p$, $\frac{b}{a}\cos\gamma = q$, $\frac{a}{b}\sin\gamma = p'$, und $\frac{a}{b}\cos\gamma = q'$ setzt. Man hat dann für jede Krystallreihe nur ein für alle Mal die Werthe von p, q, p' und q' in der Grundgestalt zu berechnen, um dann mit Leichtigkeit $tang\,\mu$ und $tang\,\nu$ für alle abgeleiteten Gestalten zu finden.

Als Functionen der Kantenwinkel finden sich:

$$\cos\mu = \frac{\cos Y}{\sin X},\ \cos\mu' = \frac{\cos Y'}{\sin X'}$$

$$\cos\nu = \frac{\cos Z}{\sin X},\ \cos\nu' = \frac{\cos Z'}{\sin X'}$$

$$\cos n = \frac{\cos X}{\sin Y} = \frac{\cos X'}{\sin Y'}$$

$$\cos\sigma = \frac{\cos X}{\sin Z} = \frac{\cos X'}{\sin Z'}.$$

§. 466.

Kantenwinkel.

Aus der in §. 29 stehenden Formel für $\cos W$ finden sich unmittelbar die Cosinus der Winkel X, Y, Z, X', Y' und Z', indem man successiv den Parameter c', b' und $a' = 0$ setzt; man erhält so, nach Vertauschung des Buchstaben ϱ mit γ,

$$\cos X = \frac{ab\sin\gamma}{M},\ \cos X' = \frac{ab\sin\gamma}{M'}$$

$$\cos Y = \frac{c(a - b\cos\gamma)}{M},\ \cos Y' = \frac{c(a + b\cos\gamma)}{M'}$$

$$\cos Z = \frac{c(b - a\cos\gamma)}{M},\ \cos Z' = \frac{c(b + a\cos\gamma)}{M'}$$

Jede Fläche von $\pm$P bildet mit dem klinodiago-

Digitized by Google

nalen und orthodiagonalen, so wie mit dem klinodiagonalen und basischen Hauptschnitte ein rechtwinkliges Triëder, aus welchem sich sehr leicht nach den bekannten Regeln die Tangenten für X, Y u. s. w. finden lassen; nämlich

$$tang \begin{cases} X \\ X' \end{cases} = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2 \mp 2ab\cos\gamma}}{ab\sin\gamma}$$

$$tang \begin{cases} Y \\ Y' \end{cases} = \frac{b\sin\gamma\sqrt{a^2 + c^2}}{c(a \mp b\cos\gamma)}$$

$$tang \begin{cases} Z \\ Z' \end{cases} = \frac{a\sin\gamma\sqrt{b^2 + c^2}}{c(b \mp a\cos\gamma)}$$

Als Functionen der Hauptschnittwinkel ausgedrückt, werden dieselben Tangenten:

$$tang\,X = \frac{tang\,\sigma}{\sin(\gamma + \mu)} = \frac{tang\,\pi}{\sin\mu}$$

$$tang\,X' = \frac{tang\,\sigma}{\sin(\gamma - \mu')} = \frac{tang\,\pi}{\sin\mu'}$$

$$tang\,Y = \frac{tang\,\mu}{\sin\pi}$$

$$tang\,Y' = \frac{tang\,\mu'}{\sin\pi}$$

$$tang\,Z = \frac{tang(\gamma + \mu)}{\sin\sigma}$$

$$tang\,Z' = \frac{tang(\gamma - \mu')}{\sin\sigma}$$

Uebrigens ist zu bemerken, dass $\gamma + \mu = 180° - \nu$, und $\gamma - \mu' = \nu'$, daher auch $\sin\nu$ statt $\sin(\gamma + \mu)$ und $\sin\nu'$ statt $\sin(\gamma - \mu')$ geschrieben werden kann.

§. 467.

Allgemeiner Gebrauch der erhaltenen Resultate.

Die in vorstehenden §§. berechneten Formeln, welche sich zunächst auf die Grundgestalt beziehen, sind dessenungeachtet allgemein brauchbar für alle übrigen Gestalten des Systemes, wenn man nur die ih-

Digitized by Google

nen entsprechenden Coëfficienten m und n den resp. Buchstaben a, b und c als Factoren vorsetzt. Man hat also

1) ma statt a,
2) ma statt a, und nc statt c,
3) ma statt a, und nb statt b

einzuführen, um dieselben Formeln für irgend ein mP, mPn oder (mPn) geltend zu machen.

Bei der grossen Einfachheit dieser Substitutionen würde die besondere Darstellung ihrer Resultate überflüssig seyn; wir wollen daher nur noch die Formeln für die Kantenwinkel der dreierlei Prismen hersetzen, weil von selbigen besonders häufig Gebrauch gemacht wird.

1) Setzt man $a = \infty$, so folgt für ∞P oder das Prisma der Hauptreihe

$$tang\,X = \frac{c}{b\,sin\,\gamma} = tang\,X' = cot\,Y$$

$$cos\,2X = \frac{b^2\,sin^2\gamma - c^2}{b^2\,sin^2\gamma + c^2}$$

welche Formeln für alle verticalen Prismen ∞Pn oder (∞Pn) gelten, wenn man c oder b mit n multiplicirt.

2) Setzt man $c = \infty$, so folgt für die horizontalen Hemiprismen P∞ und $-$P∞

$$tang\left\{\begin{matrix}Y\\Y'\end{matrix}\right. = \frac{b\,sin\,\gamma}{a \mp b\,cos\,\gamma} = \frac{p}{1 \mp q} \quad (\S.\ 465)$$

$$tang\left\{\begin{matrix}Z\\Z'\end{matrix}\right. = \frac{a\,sin\,\gamma}{b \mp a\,cos\,\gamma} = \frac{p'}{1 \mp q'}$$

welche Formeln für alle übrigen Hemiprismen $\pm m$P∞ gelten, wenn man in ihnen ma statt a setzt, oder auch

$$tang\left\{\begin{matrix}Y\\Y'\end{matrix}\right. = \frac{p}{m \mp q}$$

$$tang\left\{\begin{matrix}Z\\Z'\end{matrix}\right. = \frac{mp'}{1 \mp mq'}$$

schreibt; die Grössen p, q, p' und q' sind für jede Krystallreihe besonders zu berechnen, aber für eine und dieselbe Krystallreihe constant. Uebrigens ist $Y = \mu$, $Z = \nu$ u. s. w., daher

$$Y + Z = 180^\circ - \gamma$$
$$Y' + Z' = \gamma$$

3) Setzt man $b = \infty$, so erhält man für das Klinoprisma (P∞)

$$tang\, X = tang\, X' = \frac{c}{a \sin\gamma}$$

$$tang\, Z = tang\, Z' = \frac{a \sin\gamma}{c} = cot\, X$$

$$tang \left\{ \begin{matrix} Y \\ Y' \end{matrix} \right. = \mp \frac{tang\,\gamma \sqrt{a^2 + c^2}}{c}$$

welche Formeln für alle Klinoprismen (mP∞) gelten, wenn man ma statt a schreibt.

§. 468.

Berechnung der Axen aus den gemessenen Winkeln.

Jede monoklinoëdrische Pyramide wird durch die numerische Angabe des Verhältnisses $a : b : c$ und des Winkels γ vollständig bestimmt, indem für jedes dergleichen Verhältniss nur eine Pyramide construirt werden kann. Weil es aber auch nur auf das Verhältniss und nicht auf die absolute Grösse der Axen ankommt, und daher eine derselben der Einheit gleich genommen werden kann; so setzt die vollständige Bestimmung einer jeden monoklinoëdrischen Pyramide, und folglich auch einer jeden Krystallreihe dieses Systemes nicht mehr und nicht weniger als drei, von einander unabhängige Beobachtungselemente voraus. Diese Elemente sind jedenfalls Kantenwinkel, aus denen man zunächst den Winkel γ, und zwei ebene Winkel aus zwei verschiedenen Hauptschnitten zu bestimmen sucht. Wie also auch die Beobachtungselemente beschaffen seyn mögen, so setze ich

Digitized by Google

voraus, dass entweder γ darunter befindlich ist, oder zunächst aufgesucht wird, bevor man zu andern Bestimmungen übergeht. Hierbei kommt Alles auf eine geschickte Benutzung der bekannten trigonometrischen und goniometrischen Formeln an; wer also im Besitze dieser ist, der wird ohne Schwierigkeit aus den gegebenen Elementen die gewünschten Resultate abzuleiten vermögen.

Zur Bestimmung von γ dienen sehr häufig die Formeln

$$tang\,\gamma = \frac{2 sin\,\mu\, sin\,\mu'}{sin(\mu - \mu')}$$

$$tang\,\gamma = \frac{2 sin\,\nu\, sin\,\nu'}{sin(\nu - \nu')}$$

weil man sehr oft die Neigung zweier coordinirter Hemiprismen gegen den basischen oder orthodiagonalen Hauptschnitt messen kann. Sind beide Hauptschnitte in den gleichnamigen Flächenpaaren ausgebildet, so ist der Winkel γ unmittelbar zu messen.

Ist γ bekannt, so findet man aus je zwei der andern Hauptschnittwinkel das Verhältniss $a:b:c$ wie folgt:

1) aus μ und π

$$a:b:c = 1 : \frac{sin\,\mu}{sin(\gamma + \mu)} : tang\,\pi$$

2) aus μ' und π

$$a:b:c = 1 : \frac{sin\,\mu'}{sin(\gamma - \mu')} : tang\,\pi$$

3) aus ν und σ

$$a:b:c = \frac{sin(\gamma + \mu)}{sin\,\mu} : 1 : tang\,\sigma$$

4) aus ν' und σ

$$a:b:c = \frac{sin(\gamma - \mu')}{sin\,\mu'} : 1 : tang\,\sigma$$

Digitized by Google

Viertes Capitel.

Von den Combinationen des monoklinoëdrischen Systemes.

A. Combinationslehre.

§. 469.

Erscheinungsweise der verschiedenen Gestalten.

Werfen wir nochmals einen Blick auf den Inbegriff der monoklinoëdrischen Gestalten, indem wir zugleich das Gesetz des selbständigen Auftretens aller Theilgestalten vor Augen behalten, so ergiebt sich das Resultat, dass die sämmtlichen combinationsfähigen Gestalten entweder vierzählige oder zweizählige Flächeninbegriffe, und, ihrer geometrischen Erscheinungsweise nach, nur zweierlei wesentlich verschiedene Formen, nämlich indefinite rhombische Prismen und indefinite parallele Flächenpaare sind. Es erscheinen nämlich

A. als vierzählige Flächeninbegriffe oder als indefinite rhombische Prismen
   1) die Hemipyramiden,
   2) die verticalen Prismen,
   3) die Klinoprismen;

B. als zweizählige Flächeninbegriffe oder als indefinite parallele Flächenpaare,
   4) die sämmtlichen Hemiprismen
   5) die Parallelflächen der drei Hauptschnitte.

Die relative Lage der klinodiagonalen Intersection aller dieser Gestalten gegen die Hauptaxe und Klinodiagonale bestimmt die krystallographische Bedeutung derselben, und, was geometrisch nur als ein indefinites rhombisches Prisma zu definiren war, wird krystallographisch ein verticales Prisma, ein Klinoprisma oder eine Hemipyramide, je nachdem die klinodiagonale Intersection entweder der gewählten Hauptaxe,

oder der Klinodiagonale parallel, oder gegen beide Linien geneigt ist. Hieraus ersieht man die wichtige Rolle, welche der klinodiagonale Hauptschnitt und das ihn repräsentirende Flächenpaar in diesem Systeme spielt; er ist die einzige absolut bestimmte, und keiner willkürlichen Deutung unterworfene Fläche; er bildet gleichsam den Aequator des ganzen Systemes nach rechts und links und den eigentlichen Moderator seiner Symmetrieverhältnisse. Daher lässt sich auch an die Orientirung einer monoklinoëdrischen Combination nicht wohl denken, bevor die Lage des klinodiagonalen Hauptschnittes ausgemittelt worden; glücklicherweise aber ist diese Ausmittelung auf den ersten Blick möglich, weil eine Ebene von so eminenter Lage, selbst wenn sie nicht in dem ihr entsprechenden Flächenpaare ausgebildet seyn sollte, doch niemals übersehen oder mit andern verwechselt werden kann.

§. 470.

Basis und aufrechte Stellung.

Die im vorigen §. erwähnte allgemeine Orientirung einer Combination, oder die krystallographische Deutung der verschiedenen in ihr enthaltenen Flächen, setzt aber auch die Lage der Hauptaxe und Klinodiagonale, oder, was dasselbe, die Lage des basischen und des orthodiagonalen Flächenpaares als bekannt voraus. Während nun im rhombischen Systeme alle drei Coordinatebenen, und somit alle drei Axen ihrer Lage nach vollkommen bestimmt waren, so dass an eine willkürliche Bestimmung derselben nicht gedacht werden konnte, finden wir hier nur eine der Coordinatebenen, nämlich den klinodiagonalen Hauptschnitt absolut bestimmt, die übrigen beiden Coordinatebenen dagegen unserer willkürlichen Bestimmung mehr oder weniger überlassen, indem

Digitized by Google

wir jedes auf dem klinodiagonalen Hauptschnitte rechtwinklige Flächenpaar als den Repräsentanten der Basis oP oder auch des orthodiagonalen Flächenpaares $\infty P\infty$ betrachten können. Indessen wird, wenigstens in den meisten Fällen, die Beschaffenheit der Combination ein sicheres Anhalten nicht nur für die Wahl der Basis, sondern auch für jene der aufrechten Stellung, oder, was dasselbe, für die Bestimmung der Lage der Hauptaxe und Klinodiagonale an die Hand geben. Man hat dabei ganz vorzüglich auf den Parallelismus der Combinationskanten, auf die besonders vorherrschenden Gestalten, bisweilen auch auf die vorherrschenden Dimensionen des Krystalles u. a. Verhältnisse Rücksicht zu nehmen, jedenfalls aber einen zu spitzen Werth des Winkels C oder γ zu vermeiden. — Uebrigens werden alle diese Bestimmungen gewöhnlich um so leichter, je zusammengesetzter die Combination ist, und einige Uebung so wie ein gewisses Gefühl für Symmetrie lassen bald dahin gelangen, in jedem Falle das Zweckmässigste zu ergreifen.

§. 471.

Grundgestalt.

Nachdem die Basis und aufrechte Stellung gewählt sind, sondern sich, nach der Lage ihrer klinodiagonalen Intersection, die verschiedenen vierflächigen Gestalten in verticale Prismen, Klinoprismen und Hemipyramiden, und die noch übrigen zweiflächigen Gestalten erhalten die Bedeutung von Hemiprismen. Aus den vorhandenen Hemipyramiden wählt man hierauf diejenige als Grundgestalt, deren Verhältnisse zu den übrigen Gestalten die leichteste Entwicklung der Combination gestatten. Dadurch wird auch das Verhältniss der Lineardimensionen $a : b : c$ der Krystallreihe vollständig bestimmt. Weil nämlich beide Theilge-

Digitized by Google

stalten einer jeden monoklinoëdrischen Pyramide, ohne in einer sonstigen Abhängigkeit von einander zu stehen, durch die Identität ihrer Parameter so unmittelbar mit einander verbunden sind, dass mit einer derselben zugleich die andere bekannt ist, so bedarf es auch nur des Auftretens einer der Theilgestalten der Grundgestalt, um diese, und daher die Krystallreihe selbst nach ihren Lineardimensionen zu bestimmen. Sind keine, oder keine zur Grundgestalt geeigneten Hemipyramiden vorhanden, so schliesst man aus den Verhältnissen der übrigen Gestalten auf dasjenige Dimensionsverhältniss, welches am vortheilhaftesten zu Grunde zu legen; oder bestimmt doch diejenigen Glieder desselben, welche sich aus den vorhandenen Gestalten ableiten lassen. Die Combination $oP.\infty P\infty.(\infty P\infty)$ lässt jedoch die Lineardimensionen gänzlich unbestimmt, und gestattet blos die Bestimmung der Angulardimension *C*.

Die Zähligkeit der Combinationen bestimmt sich hier wie in den bisherigen Systemen; nur darf man nicht vergessen, dass die einzelen Theilgestalten gezählt werden müssen.

§. 472.

Allgemeine Regeln der Entwicklung.

Wie durch die Wahl der Basis und aufrechten Stellung die verschiedenen Flächeninbegriffe im Allgemeinen als Hemipyramiden, Prismen, Klinoprismen und Hemiprismen unterschieden werden, so bestimmen sich durch die Wahl der Grundgestalt die verschiedenen Unterarten der Hemipyramiden und Prismen nach ihrem krystallographischen Standpuncte in den verschiedenen Abtheilungen unsers Schemas in §. 459. Ferner ergeben sich unmittelbar aus den Resultaten der Ableitung folgende Regeln:

1) Je zwei Gestalten, deren heteropolare Combina-

Digitized by Google

tionskanten dem basischen Hauptschnitte parallel laufen, haben dasselbe Verhältniss der Klinodiagonale und Orthodiagonale; sie sind also gleichnamig, und haben $n' = n$.

2) Je zwei Gestalten, deren heteropolare CK. dem orthodiagonalen Hauptschnitte parallel laufen, haben dasselbe Verhältniss der Hauptaxe und Orthodiagonale; sind sie also

a) gleichnamig, und zwar

α) orthodiagonal, so ist $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$,

β) klinodiagonal, so ist $m' = m$,

b) ungleichnamig, so ist $\frac{m'}{n'} = m$, wenn sich die accentuirten Buchstaben auf die orthodiagonale Gestalt beziehen.

3) Je zwei Gestalten, deren heteropolare CK. dem klinodiagonalen Hauptschnitte parallel laufen, haben dasselbe Verhältniss der Hauptaxe und Klinodiagonale; sind sie also

a) gleichnamig, und zwar

α) orthodiagonal, so ist $m' = m$,

β) klinodiagonal, so ist $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$,

b) ungleichnamig, so ist $m' = \frac{m}{n}$, wenn der accentuirte Buchstabe auf die orthodiagonale Gestalt bezogen wird.

§. 473.

Combinationsgleichung.

Es liesse sich auch für dieses und die folgenden Systeme eine Theorie der binären Combinationen aufstellen; wegen der Zerfällung aller Gestalten in zwei Theilgestalten würde jedoch diese Theorie nur die Combination zweier Prismen in allen möglichen La-

Digitized by Google

gen zum Gegenstande haben, für welche sie die verschiedene Lage der Combinationskanten und die dieser Lage entsprechenden Verhältnisse der Ableitungszahlen anzugeben hätte. Ihre Resultate würden daher im Ganzen wenig fruchtbar ausfallen, um so weniger, da die binären Combinationen vermöge der Natur dieses Systemes selten vorkommen, und für jede unbekannte Gestalt, wenn solche nicht durch zwei verschiedene Combinationskanten von eminenter Lage begränzt ist, Messungen erfordert werden.

Um so wichtiger wird in diesem und den folgenden Systemen der Gebrauch der allgemeinen Combinationsgleichung in §. 68; bei deren Anwendung man nur die, dem Namen der Gestalten entsprechenden Verhältnisse

$$m : n : 1$$

oder $$m : 1 : n$$

statt der Verhältnisse $m : n : r$ u. s. w. einzuführen, oder, mit andern Worten, die Grösse r oder die Grösse n der Einheit gleich zu setzen und, im letzteren Falle, r mit n zu vertauschen, dabei die nöthigen Vorzeichen der Parameter genau zu berücksichtigen braucht.

Uebrigens sind jedenfalls zweierlei, nämlich heteropolare und amphipolare Combinationskanten zu berücksichtigen.

§. 474.

Wichtigste Combinationsregeln.

Einige der wichtigsten Specialregeln, welche sich theils aus der Ableitung, theils aus der Combinationsgleichung ergeben, und zur Entwicklung der gewöhnlichsten Combinationen hinreichen, sind folgende:

1) Diejenige Gestalt, welche die klinodiagonalen Polkanten der Hemipyramide $\pm mPn$ abstumpft

oder zuschärft, ist das Hemiprisma $\pm m$P∞ oder die Hemipyramide $\pm m$Pn', wo $n' > n$.

2) Diejenige Gestalt, welche die klinodiagonalen Polkanten der Hemipyramide $\pm (m$P$n)$ abstumpft oder zuschärft, ist das Hemiprisma $\pm \frac{m}{n}$P∞ oder die Hemipyramide $\pm \frac{m}{n}$Pn'; doch kann die Zuschärfung auch durch eine Hemipyramide $\pm\left(\frac{m}{n}\text{P}n'\right)$ hervorgebracht werden, für welche dann $n' < n$.

3) Dasjenige horizontale Prisma, welches die klinodiagonalen Combinationsecke von $\pm m$P und ∞P so abstumpft, dass seine Flächen als Rhomben erscheinen, ist $\pm 2m$P∞.

4) Dasjenige Klinoprisma, welches die amphipolaren Combinationskanten zwischen mP oder $-m$P und ∞P abstumpft, ist $(2m$P$\infty)$.

5) Diejenige Hemipyramide, welche die Combinationskanten zwischen der Hemipyramide $\pm m$P und dem Flächenpaare ∞P∞ oder $(\infty$P$\infty)$ abstumpft, ist $\pm mn$Pn oder $\pm (mn$P$n)$.

6) Diejenige Hemipyramide, welche die Combinationskanten zwischen $\pm m$P∞ oder $(m$P$\infty)$ und ∞P abstumpft, ist $\pm m'$P$\frac{m'}{m'-m}$ oder $\left(m'\text{P}\frac{m'}{m'-m}\right)$.

7) Diejenige Pyramide der Hauptreihe, welche die Combinationskanten des Hemiprismas $\pm m$P∞ und des Klinoprismas $(m'$P$\infty)$ abstumpft, ist $\frac{mm'}{m+m'}$P.

Man könnte aus der Combinationsgleichung noch viele ähnliche Specialregeln ableiten; doch würde eine solche Vervielfältigung derselben ihrem Zwecke wenig entsprechen, welcher kein anderer seyn kann, als der, einen Inbegriff von Regeln zu haben, welche

den *in praxi* am häufigsten vorkommenden Fällen entsprechen, und leicht im Gedächtnisse zu behalten sind.

§. 475.

Berechnung der Combinationskanten.

Die Berechnung der Combinationskanten kann zwar in diesem Systeme nach der Formel für $\cos W$ in §. 29 ausgeführt werden, ist aber dann oft unbequem und weitläufig. Bequemer wird man in den meisten Fällen durch Hülfe der Triëdrometrie zum Ziele gelangen. Dabei sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden.

A. Die Combinationskante ist einem der Hauptschnitte parallel.

Dann berechnet man nach §. 466 die Neigungswinkel beider Flächen gegen denselben Hauptschnitt; das Supplement der Differenz, oder, wenn beide Flächen zu verschiedenen Seiten des Hauptschnittes liegen, die Summe dieser Winkel ist die gesuchte Combinationskante.

B. Die Combinationskante ist keinem der Hauptschnitte parallel.

Dann berechnet man zuvörderst die Neigungswinkel beider Flächen gegen einen und denselben (und zwar am besten gegen den orthodiagonalen oder basischen) Hauptschnitt, zugleich aber auch den Neigungswinkel Σ ihrer beiden Intersectionen in diesem Hauptschnitte. Dadurch findet man zwei Kantenwinkel nebst dem eingeschlossenen Flächenwinkel eines schiefwinkligen Triëders, in welchem die dem letzteren Winkel gegenüberliegende Kante, welches die gesuchte Combinationskante ist, mittels der Neperschen Analogien oder auch durch Einführung eines Hülfswinkels leicht berechnet werden kann.

Digitized by Google

B. Beispiele.

§. 476.

Combination des Glaubersalzes.

Es stellt Fig. 525 in perspectivischer und horizontaler Projection *) eine zwölfzählige Combination des Glaubersalzes dar, für welche sich sogleich die mit *P* bezeichneten Flächen als das klinodiagonale Flächenpaar ($\infty P \infty$) bestimmen. Setzen wir nun

$$T = 0P$$
$$M = \infty P \infty$$
und $$n = P$$

so wird es uns leicht gelingen, die Combination, ohne Beihülfe irgend einer Messung, durch alleinige Anwendung der Combinationsregeln und Combinationsgleichung vollständig zu entwickeln. Zuvörderst ist klar, dass sich die übrigen in ihr enthaltenen Gestalten ordnen, wie folgt; es gehören:

1) in die Hauptreihe die Flächen *y*, *o* und *d*;
2) in die orthodiagonale Nebenreihe d. F. *t*, *r* und *w*;
3) in die klinodiagonale Nebenreihe d. F. *z* und *v*.

Von diesen Gestalten bestimmt sich sogleich

$$o = \infty P$$

und das die Polkanten von P abstumpfende Hemiprisma

$$r = P\infty$$

Da nun die CK. von *z* und *n* in eine Parallelebene des orthodiagonalen Hauptschnittes fallen, so ist das Klinoprisma

$$z = (P\infty)$$

*) Da die Combinationen der klinoëdrischen Krystallsysteme einen geringeren Grad von Regelmässigkeit besitzen als die Combinationen der vorhergehenden Systeme, so wird es zur richtigen Auffassung ihrer Verhältnisse nicht nur nöthig, die hinteren Kanten mit zu zeichnen, sondern auch vortheilhaft, der perspectivischen Zeichnung eine orthographische Projection der Gestalten entweder auf die Horizontalebene oder auf den klinodiagonalen Hauptschnitt beizufügen.

Digitized by Google

und wegen desselben Parallelismus der CK. zwischen *z* und *d* die Hemipyramide

$$d = -P$$

Nun erscheint die Hemipyramide *y* mit parallelen CK. zwischen $z = (P\infty)$ und $r = P\infty$, also ist

$$y = \tfrac{1}{2}P$$

und daher auch das Hemiprisma

$$t = \tfrac{1}{2}P\infty$$

Das Klinoprisma *v* stumpft die amphipolaren CK. zwischen $n = P$ und $o = \infty P$ ab, und ist daher

$$v = (2P\infty)$$

Was endlich das Hemiprisma *w* betrifft, so erscheint es mit parallelen CK. zwischen einer linken Fläche *d* und einer rechten Fläche *z*, oder es stumpft das Combinationseck dieser beiden Gestalten in der Art ab, dass die Abstfl. als ein Rhombus erscheint; daraus folgt, dass

$$w = -\tfrac{1}{2}P\infty$$

Somit ist die gegebene Combination vollständig entwickelt, und das krystallographische Zeichen derselben etwa folgender Weise zu schreiben:

$$\infty P.\infty P\infty.P.P\infty.-P.(P\infty).\tfrac{1}{2}P.-\tfrac{1}{2}P\infty.\tfrac{1}{2}P\infty.0P.(2P\infty).(\infty P\infty).$$

§. 477.

Fortsetzung.

Zur Berechnung der Dimensionen des Glaubersalzes mögen uns folgende Beobachtungselemente gegeben seyn:

$$o : o = 86°\ 31'$$
$$t : M = 104°\ 41'$$
$$w : M = 132°\ 4'$$

Es ist also für das Prisma $o = \infty P$:

$$\text{Winkel } X = 43°\ 15{,}5'$$

für das Hemiprisma $t = \tfrac{1}{2}P\infty$:

$$\text{Winkel } Y = 75°\ 19' = \mu$$

Digitized by Google

für das Hemiprisma $w = -\frac{1}{2}P\infty$:

$$\text{Winkel } Y = 47^\circ\ 56' = \mu'$$

Da nun t und w coordinirte Hemiprismen sind, so folgt nach §. 468

$$tang\,\gamma = \frac{2 sin\,\mu\ sin\,\mu'}{sin(\mu - \mu')}$$

und daher

$$\gamma = C = 72^\circ\ 15'$$

Setzen wir nun die Klinodiagonale $= 1$, so folgt nach §. 467 aus den bekannten Winkeln X und γ

$$c = tang\,X\,sin\,\gamma = 0{,}8962$$

In dem Hemiprisma $\frac{1}{2}P\infty$ war der eine Hauptschnittwinkel

$$\mu = 75^\circ\ 19'$$

daraus folgt der zweite Winkel

$$\nu = 180^\circ - (\mu + \gamma) = 32^\circ\ 26'$$

und endlich

$$\tfrac{1}{2}a = \frac{sin\,\nu}{sin\,\mu}$$

$$\text{oder}\quad a = \frac{2 sin\,\nu}{sin\,\mu} = 1{,}109$$

Die Krystallreihe des Glaubersalzes wird also durch folgende Dimensionen bestimmt:

$$C = \gamma = 72^\circ\ 15'$$

$$a : b : c = 1{,}109 : 1 : 0{,}8962$$

und es ist zu bemerken, dass sehr nahe

$$2b = a + c$$

ist. Nachdem solchergestalt die Dimensionen gefunden, ist es leicht, die Winkel irgend einer beliebigen Gestalt oder auch die CK. irgend zweier beliebiger Gestalten zu berechnen. Will man z. B. die Winkel X und Z der Hemipyramide P berechnen, so sucht man zuvörderst die resp. Hauptschnittwinkel ν und σ; es ist aber

$$a + b : a - b = tang\,\tfrac{1}{2}(180^\circ - \gamma) : tang\,x$$

und der Winkel

$$\nu = (180^\circ - \gamma) + x = 57^\circ\ 55{,}5'$$

ferner ist

$$tang\,\sigma = \frac{c}{b}$$

daher der Winkel

$$\sigma = 41° \; 52'$$

und endlich, weil

$$tang\,X = \frac{tang\,\sigma}{sin\,\nu},\; tang\,Z = \frac{tang\,\nu}{sin\,\sigma}$$

$$X = 46° \; 36', \qquad Z = 67° \; 18'$$

Will man nun z. B. die CK. $n:o$ wissen, so berechnet man für ∞P den Winkel Z', nach der Formel

$$tang\,Z' = \frac{tang\,\gamma}{sin\,\sigma}$$

und findet die CK.

$$Z + Z' = 145° \; 14{,}5'$$

Auf diese und ähnliche Art lassen sich alle übrigen Winkel berechnen.

§. 478.

Combination des Pyroxenes.

Die Fig. 526 stellt in perspectivischer und horizontaler Projection eine siebenzählige Combination des Pyroxenes dar. Stellen wir dieselbe nach dem Prisma M aufrecht, so erhalten wir für die Basis $t =$ 0P zwei positive Hemipyramiden s und o, von welchen wir die erstere zur Grundgestalt wählen. Die Flächen z bilden ein Klinoprisma, die Flächen P ein positives Hemiprisma. Es bestimmen sich sogleich

$$P = \mathrm{P}\infty$$
$$M = \infty\mathrm{P}$$
$$r = \infty\mathrm{P}\infty$$

und bleibt daher nur noch die Bestimmung der Flächen z und o übrig. Da nun z die amphipolaren CK. der Hemipyramide P und des Prismas ∞P abstumpft, so folgt

$$z = (2\mathrm{P}\infty)$$

und da die Flächen o mit parallelen CK. zwischen

r und z einerseits, zwischen t und M anderseits erscheinen, und folglich die erstere CK. dem orthodiagonalen, die zweite CK. dem basischen Hauptschnitte parallel läuft, so folgt, dass

$$o = 2P$$

Die Combination ist nun vollständig entwickelt und ihr Zeichen:

$$\infty P . 2P . P . 0P . \infty P\infty . (2P\infty) . P\infty .$$

Zur Berechnung der Dimensionen der Krystallreihe mögen folgende Elemente gegeben seyn:

$$M : M = 87° \ 6'$$
$$r : t = 105° \ 59'$$
$$s : s = 120° \ 39'$$

oder auch der Winkel

$$C = \gamma = 74° \ 1'$$

im Prisma ∞P

der Winkel $X = 43° \ 33'$

und in der Hemipyramide P

der Winkel $X' = 60° \ 19{,}5'$

Nun ist nach §. 466

$$\tan g X = \frac{\tan g \sigma}{\sin \gamma}$$

also wird für P

$$\sigma = 42° \ 25{,}5'$$

und, wenn die Klinodiagonale $b = 1$,

$$c = \tan g \sigma = 0{,}9139$$

ferner wird für P

$$\sin \nu = \tan g \sigma \cot X$$

daher $\nu = 31° \ 23'$

$$\mu = 180° - (\nu + \gamma) = 74° \ 36'$$

und endlich die Hauptaxe

$$a = \frac{\sin \nu}{\sin \mu} = 0{,}5401$$

Die Krystallreihe des Pyroxenes wird also durch folgende Dimensionen bestimmt:

Digitized by Google

$$C = \gamma = 74° \; 1'$$

$$a : b : c = 0{,}5401 : 1 : 0{,}9139$$

und es ist bemerkenswerth, dass sehr nahe

$$2a = 2b - c$$

§. 479.

Combination des Orthoklases.

Die Fig. 528 stellt in perspectivischer und horizontaler Projection eine neunzählige Combination des Orthoklases dar, deren Flächen, wenn wir *P* als Basis, *T* als das Prisma ∞P, und *o* als die positive Hemipyramide P betrachten, sich folgenderweise ordnen; es gehören:

1) in die Hauptreihe, *P*, *o* und *T*;
2) in die orthodiagonale Nebenreihe, *q*, *x* und *y*;
3) in die klinodiagonale Nebenreihe, *n* und *M*;
4) in eine klinodiagonale Zwischenreihe, *z*.

Zuvörderst bestimmt sich das Flächenpaar

$$M = (\infty P \infty)$$

und das, die Polkante von P abstumpfende Hemiprisma

$$x = P\infty$$

Da nun das Klinoprisma *n* die amphipolaren CK. zwischen $o = P$ und $T = \infty P$ abstumpft, so ist

$$n = (2P\infty)$$

und da das positive Hemiprisma *y* zwischen einem vorderen *o* und hinterem *T* mit parallelen CK. erscheint, oder das Combinationseck zwischen P und ∞P so abstumpft, dass seine Flächen durch diese Gestalten allein als Rhomben begränzt erscheinen würden, so ist

$$y = 2P\infty$$

Das klinodiagonale Prisma $z = (\infty P n'')$ erscheint mit parallelen CK. zwischen einem oberen *o* und einem unteren *n*; setzt man also in der Combinationsgleichung des §. 68

Digitized by Google

$$m = n = r = 1,$$
$$m' = -2, \quad n' = \infty, \; r' = 1$$
$$m'' = \infty, \quad n'' = n'', \; r'' = 1$$

so folgt $n'' = 3$, und daher

$$z = (\infty P3)$$

Das positive Hemiprisma $q = m''P\infty$ erscheint zwischen einem hinteren o und vorderen n mit parallelen CK.; setzt man also in der CG. a. a. O.

$$m = n = r = 1$$
$$m' = 2, \quad n' = \infty, \; r' = -1$$
$$m'' = m'', \quad n'' = 1, \quad r'' = \infty$$

so folgt $m'' = \frac{2}{3}$, und daher

$$q = \tfrac{2}{3}P\infty$$

Die Combination ist nun vollständig entwickelt, und ihr Zeichen:

$$\infty P.(\infty P\infty).(\infty P3).0P.2P\infty.P\infty.\tfrac{2}{3}P\infty.P.2P\infty.$$

Der Berechnung der Dimensionen wollen wir folgende Beobachtungen Kupffers zu Grunde legen:

$$C = \gamma = 63° \; 53'$$

Winkel Y in $P\infty = 65° \; 47{,}3' = \mu$ in P

Winkel X in $\infty P = 59° \; 24{,}3'$

Aus den bekannten Winkeln μ und γ folgt für die Grundgestalt

$$\nu = 50° \; 19{,}7'$$

und daher, wenn die Klinodiagonale $b = 1$, die Hauptaxe

$$a = \frac{\sin\nu}{\sin\mu} = 0{,}84396$$

Der Winkel σ des basischen Hauptschnittes findet sich nach der Formel

$$\tan\sigma = \tan X \sin\gamma = c = 1{,}5185$$

also der Winkel $\sigma = 56° \; 38'$

Die Krystallreihe des Orthoklases wird also durch folgende Dimensionen bestimmt:

$$C = 63° \; 53'$$
$$a : b : c = 0{,}8439 : 1 : 1{,}5185$$

§. 480.

Combination des Amphibols.

Die Fig. 527 stellt in perspectivischer und horizontaler Projection eine achtzählige Combination der basaltischen Hornblende dar, in welcher sich die Flächen x sogleich als die Repräsentanten des klinodiagonalen Hauptschnittes zu erkennen geben. Wählen wir nun die Fläche p zur Basis für die Flächen r als die positive Hemipyramide P, so ordnen sich die übrigen Gestalten wie folgt:

1) in die Hauptreihe, q;
2) in die klinodiagonale Nebenreihe, z;
3) in klinodiagonale Zwischenreihen, c und t.

Weil $p = 0\mathrm{P}$ und $r = \mathrm{P}$, so ist

$$M = \infty\mathrm{P}$$

und weil das Klinoprisma z die amphipolaren CK. zwischen r und M abstumpft, so ist

$$z = (2\mathrm{P}\infty)$$

folglich auch

$$q = -\mathrm{P}$$

weil die Flächen desselben Klinoprismas die amphipolare CK. zwischen q und M abstumpfen. Da ferner die klinodiagonalen Hemipyramiden c und t die CK. zwischen dem Klinoprisma z und dem Prisma M abstumpfen, so sind beide von der Form

$$m\mathrm{P}\frac{m}{m-2}$$

und da ihre CK. mit P und —P dem klinodiagonalen Hauptschnitte parallel laufen, so sind sie auch von der Form

$$m\mathrm{P}m$$

folglich wird

$$m = \frac{m}{m-2} = 3$$

und daher

$$c = (3\mathrm{P}3)$$
$$t = -(3\mathrm{P}3)$$

Digitized by Google

Die Combination ist nun vollständig entwickelt, und ihr Zeichen folgendes:

$$\infty P.(\infty P\infty).0P.P.-P.(2P\infty).(3P3).-(3P3).$$

Zur Berechnung der Dimensionen seyen uns folgende Beobachtungselemente gegeben:

Winkel X in $\infty P = 62°\ 15'$
Winkel X in $P = 74°\ 15' = X'$
CK. $0P : \infty P = 103°\ 1' = \Pi$

Man erhält sogleich für P oder ∞P

$$\cos\sigma = \frac{\cos X}{\sin \Pi},\ \cos\gamma = \frac{\cos \Pi}{\sin X}$$

und daher

$$\sigma = 61°\ 27'$$
$$\gamma = C = 75°\ 15'$$

Ferner wird für P

$$\sin\nu = \tang\sigma\cot X'$$
also $\nu = 31°\ 13'$
und $\mu = 73°\ 32'$

Setzen wir also die Klinodiagonale $b = 1$, so ist die Orthodiagonale

$$c = \tang\sigma = 1{,}838$$

und die Hauptaxe

$$a = \frac{\sin\nu}{\sin\mu} = 0{,}5405$$

Die Krystallreihe des Amphibols wird also durch folgende Elemente bestimmt:

$$C = \gamma = 75°\ 15'$$
$$a : b : c = 0{,}5405 : 1 : 1{,}838$$

wobei zu bemerken, dass

$$4a + c = 4b$$

§. 481.

Combination des Epidotes.

Die Fig. 529 stellt in perspectivischer und klinodiagonaler Projection eine zwölfzählige Combination des Epidotes dar, in welcher das klinodiagonale Flä-

Digitized by Google

chenpaar zwar nicht ausgebildet ist, aber sogleich seiner Lage nach als dasjenige erkannt wird, welches auf den Flächen *M* und *l* rechtwinklig seyn würde. Wir setzen

$$l = 0P$$
$$M = \infty P \infty$$

Der Neigungswinkel beider Flächen ist nur wenig von 90° verschieden; der stumpfere Winkel wird durch die Flächen *r*, der spitzere durch die Flächen *T* abgestumpft. Wollen wir daher die Flächen *n* als eine Hemipyramide der Grundgestalt betrachten, so kann dies nur die negative Hemipyramide seyn; daher ist

$$n = -P$$

Die übrigen Gestalten ordnen sich nun auf folgende Weise; es gehören

1) in die Hauptreihe, *z*;
2) in die orthodiagonale Nebenreihe, *r* und *T*;
3) in die klinodiagonale Nebenreihe, *y* und *q*;
4) in orthodiagonale Zwischenreihen, *x*, *o*, *d* und *u*.

Da die CK. der Flächen *q* und *n* in eine Parallelebene des orthodiagonalen Hauptschnittes fällt, so ist das Klinoprisma

$$q = (P\infty)$$

und aus demselben Grunde die Hemipyramide

$$z = P$$

Das Hemiprisma *r* stumpft die Polkante von —P, das Hemiprisma *T* die Polkante von P ab; folglich wird

$$r = -P\infty$$
$$T = P\infty$$

Die Hemipyramiden *x* und *d* stumpfen die heteropolaren CK. von —P und P mit ∞P∞ ab, und haben daher gleiche Ableitungszahlen, oder allgemein das Zeichen $m''Pm''$; sie erscheinen aber auch eben so wie die Flächen des Prismas *o* mit parallelen CK. zwi-

schen den Flächen der Hemipyramide n und des Hemiprismas T einerseits, der Hemipyramide z und des Hemiprismas r anderseits.

Setzt man also in der allgemeinen Combinationsgleichung

$$m = 1,\ m' = -1,\ m'' = -m''$$
$$n = 1,\ n' = \quad 1,\ n'' = \quad 1$$
$$r = 1,\ r' = \quad \infty,\ r'' = \quad n''$$

so folgt für die drei Gestalten x, d und o die gemeinschaftliche Bedingung:

$$n'' = \frac{2m''}{m'' - 1}$$

§. 482.

Fortsetzung.

Da nun o ein verticales Prisma, so wird für selbiges $m'' = \infty$, folglich $n'' = 2$, und

$$o = \infty P2$$

Da ferner die Hemipyramiden x und d, vermöge ihrer Verhältnisse zu n, z und M gleiche Ableitungszahlen haben, oder von der Form $m''Pm''$ sind, so wird für sie

$$1 = \frac{2}{m'' - 1}$$

und daher

$$x = -3P3$$
$$d = \quad 3P3$$

Das Klinoprisma y und die Hemipyramide u, welche wegen ihrer Verhältnisse zu z ein Pn seyn muss, bestimmen sich gegenseitig, weil ihre CK. in eine Parallelebene des orthodiagonalen Hauptschnittes fällt; ist also $u = Pn$, so wird, weil beide Gestalten ungleichnamig sind,

$$y = \left(\frac{1}{n}P\infty\right) \text{ (§. 474)}$$

Das Klinoprisma y aber ist durch seine Verhält-

Digitized by Google

nisse zu *n* und *o* vollkommen bestimmt, indem die Fläche *n* mit parallelen CK. zwischen *o* und *y* auftritt; setzt man also in der CG.

$$m = \infty,\ m' = m,\ m'' = 1$$
$$n = 1,\ n' = \infty,\ n'' = 1$$
$$r = 2,\ r' = 1,\ r'' = 1$$

so findet sich

$$y = (\tfrac{1}{2}P\infty)$$

und folglich

$$u = P2$$

Die Combination ist nun vollständig entwickelt, und ihr Zeichen etwa auf folgende Art zu schreiben:

$\infty P\infty.0P.P\infty.-P\infty.-P.P.(P\infty).(\frac{1}{2}P\infty).\infty P2.3P3.-3P3.$
$P2.$

§. 483.

Fortsetzung.

Was die Berechnung der Dimensionen betrifft, so mögen uns als Beobachtungselemente folgende Winkel gegeben seyn:

Winkel Y oder μ in $P\infty = 64°\ 36'$
Winkel Y' oder μ' in $-P\infty = 63°\ 43'$
Winkel X in $-P = 35°\ 16{,}5'$

Da die beiden ersteren Winkel coordinirten Hemiprismen angehören, oder die Winkel μ und μ' der Grundgestalt sind; so folgt nach der Formel

$$tang\,\gamma = \frac{2 sin\,\mu\, sin\,\mu'}{sin\,(\mu-\mu')}$$
$$C = \gamma = 89°\ 27'$$

und sogleich

$$\nu' = \gamma - \mu' = 25°\ 44'$$

daher, wenn die Klinodiagonale $b = 1$, die Hauptaxe

$$a = \frac{sin\,\nu'}{sin\,\mu'} = 0{,}48425$$

Digitized by Google

Ferner ergiebt sich

$$tang\,\sigma = tang\,X\,sin\,\nu$$

also $\sigma = 17^\circ\ 4'$

und $c = tang\,\sigma = 0{,}30713$

Die Krystallreihe des Epidotes wird daher durch folgende Dimensionen bestimmt:

$$C = \gamma = 89^\circ\ 27'$$

$$a : b : c = 0{,}48425 : 1 : 0{,}30713$$

Diese Beispiele werden hinreichen, um die Methode der Entwicklung und Berechnung monoklinoëdrischer Combinationen zu erläutern, und zur Entwicklung schwierigerer Fälle die nöthige Anleitung zu geben.

Sechster Abschnitt.

Vom diklinoëdrischen Systeme.

Erstes Capitel.

Von den Axen und einzelen Gestalten des Systemes.

§. 484.

Grundcharakter, Axen, Stellung.

Das diklinoëdrische System ist nach §. 43 der Inbegriff aller derjenigen Krystallformen, deren wesentlicher geometrischer Grundcharakter durch drei Coordinatebenen bestimmt wird, von welchen sich zwei unter einem rechten Winkel schneiden, während die dritte auf beiden schiefwinklig ist. Die Axen, als

Digitized by Google

die Durchschnittslinien dieser Ebenen, scheinen auch hier unter dem Verhältnisse der durchgängigen Ungleichheit zu stehen. Weil aber diejenige Axe, welche die Intersection der beiden rechtwinkligen Coordinatebenen ist, vermöge dieser Lage einen eminenten Werth erhält, so wird sie die natürliche Hauptaxe, und daher die aufrechte Stellung des Systemes nach ihr zu bestimmen seyn. Die beiden andern Axen erhalten dadurch die Bedeutung von Nebenaxen, für welche freilich nur die verschiedene Grösse einen Unterscheidungsgrund darbietet. Alle acht Raumoctanten bilden noch immer rechtwinklige Triëder, oder ihre Intersectionen mit einer, um den Mittelpunct des Axensystemes construirten Kugeloberfläche, rechtwinklige sphärische Dreiecke. Die Neigungswinkel der Axen aber sind durchgängig schiefe.

§. 485.

Diklinoëdrische Gestalten.

Construirt man um ein diklinoëdrisches Axensystem für ein gegebenes endliches Verhältniss dreier Parameter $a : b : c$, den Inbegriff aller möglichen isoparametrischen Flächen, so gelangt man auf eine von acht Dreiecken umschlossene Gestalt, deren Flächen jedoch viererlei verschiedenen Werthes sind. Dies Resultat ist eine nothwendige Folge der verschiedenen Neigungswinkel je zweier Axen, und so unabhängig von dem Grössenverhältnisse der Parameter, dass es für Verhältnisse wie $a : b : b$ oder $a : a : a$ ganz auf gleiche Weise Statt finden würde. Die construirte Gestalt ist also jedenfalls eine tetramerische, aus vier Theilgestalten zusammengesetzte Gestalt. Ihren allgemeinen Eigenschaften nach wird sie als eine diklinoëdrische Pyramide, und daher jede ihrer Theilgestalten als eine Viertelpyramide oder Tetartopyramide zu bezeichnen seyn. Wie die zwei

Theilgestalten einer monoklinoëdrischen, so sind auch die vier Theilgestalten einer diklinoëdrischen Pyramide in ihrer Erscheinung von einander völlig unabhängig, weshalb wir erwarten können, den vollständigen diklinoëdrischen Pyramiden in der Natur eben so selten zu begegnen, als den vollständigen monoklinoëdrischen Pyramiden.

Nächst den Pyramiden giebt es noch in diesem Systeme verticale Prismen von rhombischen Querschnitten, welche einfache Gestalten sind, zweierlei geneigte Prismen von rhomboidischen Querschnitten, welche dimerische, aus zwei Hemiprismen zusammengesetzte Gestalten sind, und endlich die drei, den Coordinatebenen entsprechenden Flächenpaare des Systemes.

Zweites Capitel.

Von der Ableitung der diklinoëdrischen Gestalten.

§. 486.

Grundgestalt.

Dieselben Gründe, welche uns im monoklinoëdrischen Systeme bestimmten, den Ableitungen eine vollständige monoklinoëdrische Pyramide zu Grunde zu legen, nöthigen uns, auch für die Ableitungen dieses Systemes eine vollständige, mit allen vier, im Gleichgewichte ausgebildeten Theilgestalten erscheinende Pyramide als Grundgestalt anzunehmen. Wir setzen also irgend eine dergleichen Pyramide von dem Verhältnisse der Hauptaxe zur grösseren und kleineren Nebenaxe $= a : b : c$, und den schiefen Neigungswinkeln B und C, und bezeichnen sie mit ,P',. Da nämlich in dem Zeichen der Grundgestalt die Zeichen aller vier

Theilgestalten enthalten seyn müssen, so scheint es vortheilhaft, die einzelen Viertelpyramiden nach der, bei aufrechter und normaler Stellung der Gestalt Statt findenden, Lage ihrer Glieder in der vorderen Pyramidenhälfte zu bezeichnen, wie folgt:

die Viertelpyramide, deren vordere Fläche
oben rechts erscheint, mit P′
oben links - - - ′P
unten rechts - - - P,
unten links - - - ,P

nur auf diese oder eine ähnliche Art ist es möglich, ein Gesammtzeichen für die vollständige Grundgestalt zu geben, weil sich diese vier Zeichen in das einzige Zeichen ;P; zusammenziehen lassen. Die oberen und unteren Theilgestalten werden also jederzeit durch den oben oder unten, die rechten und linken Theilgestalten durch den rechts oder links stehenden Accent unterschieden *).

*) Für die Bezeichnung der Gestalten dieses und des folgenden Systemes lassen sich mancherlei Methoden in Vorschlag bringen. Käme es blos darauf an, die einzelen Flächen, und nicht die Theilgestalten als solche zu bezeichnen, so würde der Weissischen Bezeichnung vor allen übrigen der Vorzug gebühren, weil selbige in der That nur eine eigenthümliche Schreibart der Flächengleichungen ist. Will man sich aber allgemein für jede Theilgestalt des Symboles P bedienen, so könnte man die verschiedenen Theilgestalten nach der Lage ihrer Glieder in der vorderen Gestalthälfte durch Vorsetzung der Buchstabenbinionen *or* (oben rechts), *ol* (oben links), *ur* (unten rechts) und *ul* (unten links) unterscheiden, wie dies neulich in ähnlicher Art für die Unterscheidung der einzelen Flächen der tesseralen Gestalten von Ettinghausen vorgeschlagen worden. Mir scheint jedoch die Accentuirung zu diesem Behufe noch vortheilhafter, nicht nur, weil sie kürzer und repräsentativer ist, sondern auch, weil sie den Vortheil gewährt, dass sich beliebig die Zeichen je zweier, dreier oder auch aller vier Theilgestalten in ein einziges Zeichen zusammenziehen lassen. Früher bediente ich mich zur Unterscheidung der oberen und unteren Theilgestalten auch in

Digitized by Google

Die Nebenaxen der Grundgestalt führen, wie im rhombischen Systeme, die Namen der Makrodiagonale und Brachydiagonale.

§. 487.

Hauptreihe.

Aus der Grundgestalt leiten wir zuvörderst ganz und gar nach der in den übrigen Krystallsystemen befolgten Methode, durch Vervielfältigung der Hauptaxe nach einem Coëfficienten *m*, eine Hauptreihe von folgender Form ab:

$$\begin{array}{ccc} & m < 1 & & m > 1 & \\ 0P \ldots\ldots & m\,{}_{,}^{\prime}P_{,}^{\prime} \ldots\ldots & {}_{,}^{\prime}P_{,}^{\prime} \ldots\ldots & m\,{}_{,}^{\prime}P_{,}^{\prime} \ldots\ldots & \infty P \end{array}$$

Diese Reihe ist eigentlich eine vierfache Reihe, indem ihre sämmtlichen Glieder, mit Ausnahme der beiden äussersten, in vier Theilgestalten zerfallen. Jedes Glied mit endlichem Werthe von *m* ist nämlich eine tetramerische Pyramide, von gleicher Basis und Flächenstellung mit ${}_{,}^{\prime}P_{,}^{\prime}$, deren Viertelpyramiden in völliger Unabhängigkeit auftreten. Das eine Gränzglied 0P bedeutet hier, wie überall, die Basis oder jede ihr parallele Fläche; das andre Gränzglied ∞P dagegen ein verticales Prisma von rhombischem Querschnitte und vier gleichwerthigen Flächen, welches daher n i c h t in zwei Hemiprismen zerfällt, sondern jedenfalls vollständig erscheint.

§. 488.

Makrodiagonale und brachydiagonale Gestalten.

Aus jedem (vollständig gedachten) Gliede der Hauptreihe lassen sich nun einerseits durch Vergrösserung

---

diesem und dem folgenden Krystallsysteme der Zeichen + und —; allein wie bestimmt und bezeichnend dieselben, wegen ihrer Beziehung auf den Cosinus des Neigungswinkels *C*, im monoklinoëdrischen Systeme, so unbestimmt und nichts sagend werden sie in dem diklinoëdrischen und triklinoëdrischen Systeme.

der Makrodiagonale bei constanter Brachydiagonale, anderseits durch Vergrösserung der Brachydiagonale bei constanter Makrodiagonale zwei Inbegriffe verschiedener Gestalten ableiten, welche wir nach dem Namen derjenigen Diagonale, durch deren Vergrösserung sie erhalten wurden, als makrodiagonale und brachydiagonale Gestalten unterscheiden. Setzen wir den Vergrösserungscoëfficienten wie bisher $= n$, so erhalten wir, weil n alle Werthe von 1 bis ∞ annehmen kann, aus jedem $m^{\prime}_{\prime}\mathrm{P}^{\prime}_{\prime}$ eine Reihe makrodiagonaler Gestalten

$$m^{\prime}_{\prime}\mathrm{P}^{\prime}_{\prime} \ldots\ldots\ldots m^{\prime}_{\prime}\bar{\mathrm{P}}^{\prime}_{\prime}n \ldots\ldots\ldots m^{\prime}_{\prime}\bar{\mathrm{P}}^{\prime}_{\prime}\infty$$

und eine Reihe brachydiagonaler Gestalten

$$m^{\prime}_{\prime}\mathrm{P}^{\prime}_{\prime} \ldots\ldots\ldots m^{\prime}_{\prime}\breve{\mathrm{P}}^{\prime}_{\prime}n \ldots\ldots\ldots m^{\prime}_{\prime}\breve{\mathrm{P}}^{\prime}_{\prime}\infty$$

Die Gränzglieder dieser Reihen sind einerseits $m\bar{\mathrm{P}}\infty$, oder ein makrodiagonales Klinoprisma, anderseits $m\breve{\mathrm{P}}\infty$, oder ein brachydiagonales Klinoprisma, beide von rhomboidischen Querschnitten, daher beide dimerisch, und aus zwei Hemiprismen zusammengesetzt. Alle mittleren Glieder sind tetramerische Pyramiden von verschiedener Basis, aber gleicher Axe mit dem Gliede der Hauptreihe, mit welchem sie entweder den brachydiagonalen oder den makrodiagonalen Hauptschnitt gemein haben.

Die Bezeichnung der beiden Theilgestalten jedes Klinoprismas bestimmt sich nach Maassgabe der normalen Stellung der Krystallreihe; ist der makrodiagonale Hauptschnitt auf den Beobachter gerichtet, so sind die beiden makrodiagonalen Hemiprismen mit $m_{\prime}\bar{\mathrm{P}}^{\prime}\infty$ und $m^{\prime}\mathrm{P}_{\prime}\infty$, die beiden brachydiagonalen Hemiprismen mit $m^{\prime}\breve{\mathrm{P}}^{\prime}\infty$ und $m_{\prime}\breve{\mathrm{P}}_{\prime}\infty$ zu bezeichen; bestimmt der brachydiagonale Hauptschnitt die normale Stellung, so vertauschen beiderlei Prismen ihre Accente. Allgemein ist für die Theilgestalten derjenigen Klinoprismen, deren Axe auf den Beobachter zu-

Digitized by Google

läuft, der Unterschied von rechts und links, und für die Theilgestalten der andern der Unterschied von oben und unten geltend zu machen.

§. 489.

Verticale Prismen.

Aus dem Prisma ∞P lassen sich nach demselben Verfahren zwei Inbegriffe verticaler Prismen ableiten, welche jedenfalls, gleichwie ∞P selbst, rhombische Querschnitte haben, und daher als einfache Gestalten auch jedenfalls vollständig, mit allen vier Flächen erscheinen; eine Erscheinungsweise, in welcher sich die Verschiedenheit zwischen diesem und dem folgenden Krystallsysteme besonders auffallend zu erkennen giebt. Die Gränzglieder dieser beiden Reihen von verticalen Prismen, $\infty\bar{P}\infty$ und $\infty\breve{P}\infty$, sind das makrodiagonale und brachydiagonale Flächenpaar, deren gegenseitige Rechtwinkligkeit das zweite ausgezeichnete Merkmal des Systemes bildet.

Die wesentliche Eigenthümlichkeit des diklinoëdrischen Krystallsystemes offenbart sich also überhaupt nur in der Erscheinungsweise der verticalen Gestalten, welche durch nichts von jener der verticalen Gestalten des monoklinoëdrischen Systemes verschieden ist, während die Erscheinungsweise aller übrigen Gestalten mit jener der Gestalten des triklinoëdrischen Systemes vollkommen übereinstimmt. Man kann daher mit allem Rechte von diesem Krystallsysteme sagen, dass es als ein neutrales oder vielmehr zwitterartiges zwischen dem monoklinoëdrischen und triklinoëdrischen Systeme mitten inne steht.

Anmerkung. Die Resultate der Ableitung lassen sich auch hier leicht in ein Schema zusammenfassen; bei der noch sehr untergeordneten Wichtigkeit dieses Systemes glaubte ich mich jedoch in der

Digitized by Google

Darstellung seiner Verhältnisse möglichst kurz fassen zu müssen; daher ist das Schema hier weggeblieben, welches übrigens mit dem in §. 508 stehenden Schema des triklinoëdrischen Systemes gänzlich übereinstimmt, nur dass in der äussersten verticalen Reihe rechter Hand die Accente weggelassen werden müssen.

Drittes Capitel.

Berechnung des diklinoëdrischen Systemes.

§. 490.

Gleichungen der Flächen.

In der Grundgestalt war das Verhältniss der Hauptaxe, Makrodiagonale und Brachydiagonale $= a:b:c$; ferner der Neigungswinkel

des basischen u. makrod. Hauptschnitts $= B$
- - - - brachyd. - - $= C$
beider Diagonalen zu einander ..... $= \alpha$
der Hauptaxe zur Brachydiagonale ... $= \beta$
- - - - Makrodiagonale ... $= \gamma$

Da jeder Raumoctant ein rechtwinkliges Triëder ist, so findet sich nach bekannten Regeln:

$$\cos\alpha = \cos\beta \cos\gamma = \cot B \cot C$$

$$\cos\beta = \frac{\cos B}{\sin C}$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos C}{\sin B}$$

Die ferneren Rechnungen können wir theils nach der Methode der analytischen Geometrie, theils nach den Regeln der Trigonometrie führen.

Wollen wir analytisch verfahren, so haben wir zuvörderst die diklinoëdrische Flächengleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

in welcher x, y und z die schiefwinkligen, den drei Axen parallelen Coordinaten, und a, b, c die in diese Axen fallenden Parameter bedeuten, orthometrich zu machen (§. 12). Diese Transformation ist leicht, weil zwei der Coordinatebenen noch rechtwinklig sind.

In der Coordinatebene (xy) haben wir den schiefen Winkel γ zwischen den Parametern a und b, in der Coordinatebene (xz) den schiefen Winkel β zwischen den Parametern a und c. Man mache nun die gegebene Gleichung zuvörderst orthometrisch in Bezug auf x und y, d. h. man setze

statt x die Grösse $x_1 - y_1\frac{cos\,\gamma}{sin\,\gamma}$

- y - - - $y_1\frac{1}{sin\,\gamma}$

so wird sie

$$\frac{x_1}{a} + \frac{(a - b\,cos\,\gamma)\,y_1}{ab\,sin\,\gamma} + \frac{z}{c} = 1$$

und bezieht sich in dieser Form auf ein monoklinoëdrisches Axensystem, in welchem die Axen der x_1 und y_1 sowohl, als auch die Axen der y_1 und z auf einander rechtwinklig sind, während noch die Axe der x_1 gegen die Axe der z unter dem schiefen Winkel β geneigt ist.

Man mache nun diese Gleichung orthometrisch in Bezug auf x_1 und z, d. h. man setze

statt x_1 die Grösse $x_{11} - z_1\frac{cos\,\beta}{sin\,\beta}$

- z - - - $z_1\frac{1}{sin\,\beta}$

so wird sie endlich

$$\frac{x_{11}}{a} + \frac{(a - b\,cos\,\gamma)\,y_1}{ab\,sin\,\gamma} + \frac{(a - c\,cos\,\beta)\,z_1}{ac\,sin\,\beta} = 1$$

welches die orthometrische Form der ursprünglichen diklinoëdrischen Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

ist.

Digitized by Google

§. 491.

Gleichungen der Flächennormalen.

Die Gleichungen der Flächennormale N lassen sich nun unmittelbar aus der gefundenen orthometrischen Gleichung der Fläche ablesen, wie in §. 21; sie werden nämlich

$$\frac{(a - b\cos\gamma)x_{11}}{ab\sin\gamma} - \frac{y_1}{a} = 0$$
$$\frac{(a - c\cos\beta)x_{11}}{ac\sin\beta} - \frac{z_1}{a} = 0$$
$$\frac{(a - c\cos\beta)y_1}{ac\sin\beta} - \frac{(a - b\cos\gamma)z_1}{ab\sin\gamma} = 0$$

Diese Gleichungen beziehen sich natürlich auf das rechtwinklige Axensystem, und sind daher für die ferneren Berechnungen am bequemsten. Will man sie für das gegebene schiefwinklige Axensystem transformiren, so hat man nur x_{11}, y_1 und z_1 als Functionen von x, y und z auszudrücken, und die erhaltenen Ausdrücke in vorstehende Gleichungen zu substituiren; es ist aber

$$\begin{aligned} x_{11} &= x_1 + z\cos\beta \\ &= x + y\cos\gamma + z\cos\beta \\ y_1 &= y\sin\gamma \\ z_1 &= z\sin\beta \end{aligned}$$

welche Werthe in obige drei Gleichungen gesetzt werden müssen, um solche nöthigenfalls als Functionen der schiefwinkligen Coordinaten x, y und z auszudrücken.

§. 492.

Grösse der Flächennormale.

Durch die im vorigen §. gefundenen orthometrischen Gleichungen wird die Lage der Flächennormale bestimmt; ihre Länge aber findet sich, indem man je zwei dieser Gleichungen mit der orthometrischen Gleichung der Fläche in §. 490 combinirt, dadurch die

Digitized by Google

Coordinaten ihres gegenseitigen Durchschnittspunctes bestimmt, und aus der Summe ihrer Quadrate die Wurzel auszieht.

Aus den beiden ersten Gleichungen in §. 491 folgt

$$y_1 = \frac{a - b\cos\gamma}{b\sin\gamma} x_{11}$$

$$z_1 = \frac{a - c\cos\beta}{c\sin\gamma} x_{11}$$

substituirt man diese Werthe in die zu Ende des § 490 stehende Gleichung, so erhält man die Coordinate x_{11} des Endpunctes der Flächennormale, und daraus y_1 und z_1, wie folgt:

$$x_{11} = \frac{abc\sin\beta\sin\gamma}{M^2} \times bc\sin\beta\sin\gamma$$

$$y_1 = \frac{abc\sin\beta\sin\gamma}{M^2} \times c\sin\beta(a - b\cos\gamma)$$

$$z_1 = \frac{abc\sin\beta\sin\gamma}{M^2} \times b\sin\gamma(a - c\cos\beta)$$

wenn nämlich

$$M = \sqrt{b^2c^2\sin^2\beta\sin^2\gamma + c^2\sin^2\beta(a-b\cos\gamma)^2 + b^2\sin^2\gamma(a-c\cos\beta)^2}$$

Da nun

$$N = \sqrt{x_{11}^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

so folgt

$$N = \frac{abc\sin\beta\sin\gamma}{M}$$

Man darf jedoch nicht vergessen, dass es, weil die Winkel γ und β entweder beide spitz, oder beide stumpf sind, oder der eine spitz, der andre stumpf ist, für M, und folglich auch für N vier verschiedene Werthe giebt, welche den vier verschiedenen Viertelpyramiden P′, ′P, P, und ,P entsprechen. Daher ist jedesmal sehr darauf zu achten, von welcher Beschaffenheit die Winkel β und γ in demjenigen Raumoctanten sind, in welchem die Fläche liegt, deren Normale gesucht wird. Dies gilt eben so für die oben mitgetheilten Gleichungen, welche zunächst für

den Fall berechnet wurden, da sowohl β als γ spitze Winkel sind.

§. 493.

Kantenlinien.

Die aufgefundenen Gleichungen bilden die Grundlage für alle ferneren Berechnungen des Systemes nach der analytisch-geometrischen Methode; doch scheint es vortheilhafter, sich für die folgenden Probleme der trigonometrischen Berechnung zu bedienen.

Wir bezeichnen in jeder Viertelpyramide allgemein

die makrodiagonale Kante mit X
die brachydiagonale Kante mit Y
die basische Kante mit . . . . Z

die diesen Kanten gegenüberliegenden ebenen Winkel jeder Fläche mit ξ, v und ζ; ferner die Hauptschnittwinkel wie folgt: den Neigungswinkel

von X zur Axe mit . . . . μ
- - - Makrodiagonale ν
- Y - Axe mit . . . . π
- - - Brachydiagonale ϱ
- Z - Makrodiagonale σ
- - - Brachydiagonale τ

Die Kantenlinie X bildet als Gegenseite des Winkels γ mit den Seiten a und b, die Kantenlinie Y als Gegenseite des Winkels β mit a und c, die Linie Z als Gegenseite des Winkels α mit b und c ein Dreieck, folglich wird

$$X = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$
$$Y = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$
$$Z = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

je nachdem die Kante über dem spitzen oder stumpfen Winkel α, β oder γ liegt, ist der entsprechende Cosinus positiv oder negativ zu nehmen.

Digitized by Google

§. 494.

Volumen und Oberfläche.

Der Inhalt des von den Seiten a und b im makrodiagonalen Hauptschnitte gebildeten Dreieckes ist

$$\tfrac{1}{2}ab\,sin\gamma$$

Betrachtet man dieses Dreieck als die Grundfläche der von einer Pyramidenfläche und den drei Hauptschnitten eingeschlossenen dreiseitigen Pyramide, so wird $c\,sin\beta$ die Höhe derselben, und daher

$$\varphi = \tfrac{1}{6}abc\,sin\beta\,sin\gamma$$

das Volumen eines Gliedes der Viertelpyramide; folglich

$$V = 8\varphi = \tfrac{4}{3}abc\,sin\beta\,sin\gamma$$

das Volumen der vollständigen diklinoëdrischen Pyramide.

Dividirt man 3φ durch N, so folgt der Inhalt einer Pyramidenfläche

$$\triangle = \tfrac{1}{2}M$$

§. 495.

Flächenwinkel und Winkel der Hauptschnitte.

Die Cosinus der Flächenwinkel ξ, v und ζ bestimmen sich nach bekannten Regeln als Functionen der Kantenwinkel:

$$cos\,\xi = \frac{cos\,C + cos\,Y\,cos\,Z}{sin\,Y\,sin\,Z}$$

$$cos\,v = \frac{cos\,B + cos\,X\,cos\,Z}{sin\,X\,sin\,Z}$$

$$cos\,\zeta = cot\,X\,cot\,Y$$

dieselben Cosinus als Functionen der Hauptschnittwinkel

$$cos\,\xi = \frac{cos\,\tau}{cos\,\varphi}\,cos(\varrho - \varphi)$$

$$\text{wenn}\quad tang\,\varphi = tang\,\tau\,cos\,C$$

$$cos\,v = \frac{cos\,\sigma}{cos\,\varphi}\,cos(\nu - \varphi$$

wenn $tang\,\varphi = tang\,\sigma\,cos\,B$

$cos\,\zeta = cos\,\mu\,cos\,\pi$

Die Cosinus der Hauptschnittwinkel bestimmen sich als Functionen der Kantenwinkel, wie folgt:

$$cos\,\mu = \frac{cos\,Y}{sin\,X}$$

$$cos\,\nu = \frac{cos\,Z + cos\,X\,cos\,B}{sin\,X\,sin\,B}$$

$$cos\,\pi = \frac{cos\,X}{sin\,Y}$$

$$cos\,\varrho = \frac{cos\,Z + cos\,Y\,cos\,C}{sin\,Y\,sin\,C}$$

$$cos\,\sigma = \frac{cos\,X + cos\,Z\,cos\,B}{sin\,Z\,sin\,B}$$

$$cos\,\tau = \frac{cos\,Y + cos\,Z\,cos\,C}{sin\,Z\,sin\,C}$$

Die Tangenten derselben Winkel als Functionen der Axen:

$$tang\,\mu = \frac{b\,sin\,\gamma}{a - b\,cos\,\gamma}$$

$$tang\,\nu = \frac{a\,sin\,\gamma}{b - a\,cos\,\gamma}$$

$$tang\,\pi = \frac{c\,sin\,\beta}{a - c\,cos\,\beta}$$

$$tang\,\varrho = \frac{a\,sin\,\beta}{c - a\,cos\,\beta}$$

$$tang\,\sigma = \frac{c\,sin\,\alpha}{b - c\,cos\,\alpha}$$

$$tang\,\tau = \frac{b\,sin\,\alpha}{c - b\,cos\,\alpha}$$

Uebrigens ist zu beachten, dass

$$\alpha + \sigma + \tau = 180^\circ$$

$$\beta + \pi + \varrho = 180^\circ$$

$$\gamma + \mu + \nu = 180^\circ$$

Digitized by Google

§. 496.

Kantenwinkel.

Zwar lassen sich die Kantenwinkel unmittelbar als Functionen der Axen ausdrücken; doch sind diese Ausdrücke, wenigstens für die Pyramiden, *in praxi* nicht bequem, weshalb es vortheilhafter scheint, sie nur mittelbar auf die Axen zu beziehen, indem man sie zunächst als Functionen der Hauptschnittwinkel und der beiden Winkel B und C ausdrückt. Es ist für jede Viertelpyramide P

$$tang\,X = \frac{tang\,\pi}{sin\,\mu}$$

$$tang\,Y = \frac{tang\,\mu}{sin\,\pi}$$

$$sin\,Z = \frac{sin\,X\,sin\,\nu}{sin\,\sigma} = \frac{sin\,Y\,sin\,\varrho}{sin\,\tau}$$

Diese Formeln sind für den Gebrauch die bequemsten, wiewohl die Kenntniss des Winkels Z von X oder Y abhängig gemacht wird. Will man dies vermeiden, so kann man auch Z mittels eines Hülfswinkels als Function von B, ν und σ, oder C, ϱ und τ bestimmen,

$$cot\,Z = \frac{cot\,B}{sin\,\psi}\,sin\,(\sigma - \psi)$$

wenn $tang\,\psi = tang\,\nu\,cos\,B$

oder $cot\,Z = \dfrac{cot\,C}{sin\psi}\,sin\,(\tau - \psi)$

wenn $tang\,\psi = tang\,\varrho\,cos\,C$

Durch Anwendung der Neperschen Analogien lassen sich auch X und Z oder Y und Z zugleich als Functionen von B, ν und σ oder C, ϱ und τ finden; nämlich

$$tang\,\tfrac{1}{2}(X + Z) = cot\,\tfrac{1}{2}B\,\frac{cos\,\tfrac{1}{2}(\sigma - \nu)}{cos\,\tfrac{1}{2}(\sigma + \nu)}$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}(X - Z) = cot\,\tfrac{1}{2}B\,\frac{sin\,\tfrac{1}{2}(\sigma - \nu)}{sin\,\tfrac{1}{2}(\sigma + \nu)}$$

Digitized by Google

und eben so

$$tang\,\tfrac{1}{2}(Y+Z) = cot\,\tfrac{1}{2}C\frac{cos\,\frac{1}{2}(\tau-\varrho)}{cos\,\frac{1}{2}(\tau+\varrho)}$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}(Y-Z) = cot\,\tfrac{1}{2}C\frac{sin\,\frac{1}{2}(\tau-\varrho)}{sin\,\frac{1}{2}(\tau+\varrho)}$$

§. 497.

Kantenwinkel der zur Grundgestalt gehörigen Prismen.

Die Winkel μ, ν sind in den brachydiagonalen Hemiprismen $\breve{P}\infty$, die Winkel π, ϱ in den makrodiagonalen Hemiprismen $\bar{P}\infty$, und die Winkel σ, τ in dem verticalen Prisma ∞P identisch mit denen der Grundgestalt. Die Kantenwinkel der erwähnten Hemiprismen werden aber nur von je einem dieser Winkel abhängig seyn, und eignen sich daher ganz besonders zu Beobachtungselementen, um aus ihnen jene Hauptschnittwinkel abzuleiten. Es wird nämlich:

a) in jedem Hemiprisma $\breve{P}\infty$

$$tang\,Y = \frac{tang\,\mu}{sin\,\beta}$$

$$tang\,X = \frac{tang\,\beta}{sin\,\mu}$$

$$\text{und}\quad Z = 180° - (Y + C)$$

b) in jedem Hemiprisma $\bar{P}\infty$

$$tang\,X = \frac{tang\,\pi}{sin\,\gamma}$$

$$tang\,Y = \frac{tang\,\gamma}{sin\,\pi}$$

$$\text{und}\quad Z = 180° - (X + B)$$

In dem verticalen Prisma ∞P dagegen ist zuvörderst jederzeit

$$Y + X = 90°$$

und ferner

$$sin\,Z : sin\,\gamma = sin\,X : sin\,\sigma$$

$$sin\,\beta : sin\,Z = sin\,\tau : sin\,Y$$

daher

$$tang\, X = \frac{\sin\sigma \sin\beta}{\sin\tau \sin\gamma} = \frac{\sin\sigma \sin B}{\sin\tau \sin C}$$

und folglich, weil $\frac{\sin\sigma}{\sin\tau} = \frac{c}{b}$

$$tang\, X = \frac{c \sin B}{b \sin C}$$

endlich

$$\sin Z = \frac{\sin X \sin\gamma}{\sin\sigma} = \frac{\sin Y \sin\beta}{\sin\tau}$$

§. 498.

Berechnung der Dimensionen der Grundgestalt.

Zur Bestimmung einer jeden diklinoëdrischen Krystallreihe wird die Kenntniss der beiden Winkel B und C und des Verhältnisses $a : b : c$ erfordert. Diese Bestimmung setzt also jedenfalls vier, von einander unabhängige Beobachtungselemente voraus, unter welche, wenn anders die Beschaffenheit der Krystalle es gestattet, wo möglich die Winkel B und C selbst aufzunehmen sind. Dann findet man sogleich α, β und γ, oder die Mittelpunctswinkel der Hauptschnitte, und die fernere Aufgabe reducirt sich darauf, noch irgend zwei Winkel aus zwei Hauptschnitten zu berechnen, weil mit ihnen das Verhältniss $a : b : c$ gegeben ist. Kennt man nämlich ausser α, β und γ noch zwei Hauptschnittwinkel, so kennt man auch die dritten Winkel derselben Hauptschnitte, weil immer

$$\alpha + \sigma + \tau = 180°$$
$$\beta + \pi + \varrho = 180°$$
$$\gamma + \mu + \nu = 180°$$

und gelangt dann leicht mittels zweier der Proportionen

$$\sin\mu : \sin\nu = b : a$$
$$\sin\varrho : \sin\pi = a : c$$
$$\sin\sigma : \sin\tau = c : b$$

zur Bestimmung des Verhältnisses $a : b : c$.

Digitized by Google

Man hat daher überhaupt ausser *B* und *C* noch zwei Kanten zu messen, und diese Kanten wo möglich so zu wählen, dass sich aus ihnen mit Leichtigkeit zwei verschiedene Hauptschnittwinkel berechnen lassen. Am vortheilhaftesten ist es z. B., die Neigungswinkel einer und derselben Viertelpyramide der Grundgestalt gegen den makrodiagonalen und brachydiagonalen Hauptschnitt, oder auch die Neigungswinkel zweier ungleichnamiger Hemiprismen gegen dieselben beiden Hauptschnitte zu messen, weil man dann sehr leicht zur Bestimmung der Winkel μ und π gelangt.

§. 499.

Allgemeine Gültigkeit der vorhergehenden Berechnungen.

Dass die bisher geführten Berechnungen allgemein gültig für jede abgeleitete Gestalt sind, obwohl sie sich zunächst nur auf die Grundgestalt und die zu ihr gehörigen Prismen bezogen, ist einleuchtend. Man darf nämlich nur statt a, b und c die der abgeleiteten Gestalt entsprechenden Multipla derselben nach m und n einführen, um dieselben Resultate für irgend eine andre Gestalt brauchbar zu machen. Da übrigens die Hauptschnittwinkel μ, ν, π, ϱ, σ und τ eine sehr wichtige Rolle in allen Berechnungen spielen, und selbige sowohl bei Berechnung der Axen aus den gegebenen Kantenwinkeln, als auch bei Berechnung dieser aus jenen unentbehrlich sind, so hat man jedenfalls seine Aufmerksamkeit zunächst auf sie zu richten.

Viertes Capitel.
Von den Combinationen des diklinoëdrischen Systemes.

§. 500.
Ueberblick der Gestalten und Orientirung der Combination.

Eingedenk der Resultate der Ableitung können wir in einer diklinoëdrischen Combination überhaupt nur zweierlei, ihrer geometrischen Erscheinungsweise nach verschiedene Gestalten erwarten, nämlich

1) vierflächige Gestalten, wohin ausschliesslich die verticalen Prismen, und
2) zweiflächige Gestalten, wohin alle übrigen Gestalten gehören.

Weil die aufrechte Stellung absolut ist, und sowohl durch die rhombischen Prismen, als auch durch die beiden, auf einander rechtwinkligen Hauptschnitte indicirt wird, so kommt Alles auf die zweckmässige Wahl der Basis und Grundgestalt an, wobei denn wiederum, wie in den vorhergehenden Systemen, auf den Parallelismus der Kanten möglichst Rücksicht genommen werden muss. Nachdem diese Wahl getroffen, bestimmen sich sogleich die Stellen der einzelen Theilgestalten in den verschiedenen Reihen, auf welche die Ableitung gelangen liess, und die weitere Entwicklung der Combination geschieht dann nach denselben Regeln, wie im rhombischen, monoklinoëdrischen und dem folgenden triklinoëdrischen Systeme. Da bis jetzt nur eine einzige diklinoëdrische Krystallreihe, nämlich die des unterschwefelsauren Kalkes genau bekannt ist, so wird es auch hinreichend seyn, die von Mitscherlich gezeichneten Combinationen dieses Salzes zum Gegenstande unsrer Betrachtungen zu machen, um die Methode der Berechnung und Entwicklung diklinoëdrischer Combinationen zu erläutern.

Digitized by Google

§. 501.

Combinationen des unterschwefelsauren Kalkes.

Die Figg. 531 bis 533 stellen drei verschiedene Combinationen des unterschwefelsauren Kalkes, und zwar die beiden ersteren in perspectivischer, die letztere in horizontaler Projection dar. Die Flächen *a* und *b* sind auf einander rechtwinklig, und die vier gleichwerthigen Flächen *M* bilden ein rhombisches Prisma, dessen scharfe Seitenkanten dem Beobachter zugekehrt sind. Setzen wir also dieses Prisma $= \infty P$, so wird

$$a = \infty\breve{P}\infty \text{ und } b = \infty\bar{P}\infty$$

Die Fläche *P* bietet sich von selbst als Basis dar, und nun bestimmen sich die übrigen Gestalten, wie folgt: es gehören

1) in die Hauptreihe, die Viertelpyramiden *k*, *m*, *n* und *l*,
2) in die brachydiagonale Nebenreihe, die Hemiprismen *c*, *d*, *e* und *f*,
3) in die makrodiagonale Nebenreihe, die Hemiprismen *i*, *g* und *h*.

Die Viertelpyramiden *k*, *n* und *l* sind offenbar isoparametrisch, weil die CK. zwischen *n* und *k* dem brachydiagonalen, die CK. zwischen *n* und *l* dem makrodiagonalen Hauptschnitte parallel läuft; setzen wir daher

$$k = {}'P$$

so ist nothwendig

$$n = P', \text{ und } l = {}_,P$$

Aus denselben Gründen bestimmen sich die Hemiprismen

$$c = {}'\breve{P}'\infty, \quad f = {}_,\breve{P}_,\infty$$
$$i = {}_,\bar{P}'\infty, \quad g = {}'\bar{P}_,\infty$$

Da die Viertelpyramide *m* die CK. zwischen den Hemiprismen *f* und *g* abstumpft, so ist

$$m = \tfrac{1}{2}P_,$$

Digitized by Google

und dann wiederum wegen des Parallelismus der beiderseitigen CK. mit dem makrodiagonalen und brachydiagonalen Hauptschnitte

$$h = \tfrac{1}{2}'\bar{P},\infty$$
$$e = \tfrac{1}{2},\breve{P},\infty$$

Die einzige, unmittelbar nicht zu bestimmende Gestalt ist daher das brachydiagonale Hemiprisma *d*, welches sich jedoch durch Messung der CK. *d*:*P* als $\tfrac{1}{2}'\breve{P}'\infty$ bestimmt.

Man wird nun leicht die Zeichen der vier Combinationen zusammenstellen können.

§. 502.

Berechnung der Dimensionen des unterschwefelsauren Kalkes.

Nach Mitscherlichs Messungen ist

$$\text{Winkel } P:a = 107°\ 2' = C$$
$$P:b = 98°\ 21' = B$$

welche beide Winkel in den oben rechts gelegenen Octanten fallen; daher wird für denselben Octanten:

$\alpha = 87°\ 25'$, und das Supplement $\alpha' = 92°\ 35'$
$\beta = 98°\ 44'$ - - - - $\beta' = 81°\ 16'$
$\gamma = 107°\ 13\tfrac{1}{4}'$ - - - - $\gamma' = 72°\ 46\tfrac{3}{4}'$

Ferner maass Mitscherlich den Winkel

$$P:f \text{ oder } oP:,\breve{P},\infty = 69°\ 2' = Z'$$

da nun $Y' = 180° - (Z' + C')$
so wird für *f* $Y' = 38°\ 0'$

$$\tan\mu' = \tan Y' \sin\beta'$$

daher für *f* $\mu' = 37°\ 40\tfrac{1}{2}'$

$$\nu' = 180° - (\mu' + \beta') = 69°\ 32\tfrac{1}{4}'$$

und endlich

$$b : a = \sin\mu' : \sin\nu' = 0{,}6112 : 0{,}9370$$

oder, für $b = 1$,

$$a = 1{,}533 = \sqrt{2{,}35}$$

Mitscherlich fand ferner die makrodiagonale Seitenkante des Prismas ∞P

$$M:M = 78°\ 10' = 2X$$

Digitized by Google

da nun $$\frac{c}{b} = \frac{tang\,X\,sin\,C}{sin\,B}$$

so wird, wiederum für $b = 1$,

$$c = 0{,}7849 = \sqrt{0{,}616}$$

folglich das Verhältniss der Dimensionen

$$a : b : c = 1{,}533 : 1 : 0{,}7849$$

und sehr nahe

$$a = c + \tfrac{3}{4}b = 1{,}5349$$

Nun ist es auch leicht, die Ableitungszahl m des Hemiprismas d zu finden; es ist nämlich

$$d : P = 149^\circ\ 19'$$

also für d, $$Z = 30^\circ\ 41'$$

und $$Y = 180^\circ - (Z + C) = 42^\circ\ 17'$$

da nun $$tang\,\mu = tang\,Y\,sin\,\beta$$

so wird $$\mu = 41^\circ\ 57'$$

$$\nu = 180^\circ - (\mu + \gamma) = 30^\circ\ 50'$$

und $$m = \frac{sin\,\nu}{a\,sin\,\mu} = \tfrac{1}{2}$$

Die Berechnung der Kantenwinkel der übrigen, krystallographisch bestimmten Gestalten gegen die drei Hauptschnitte ist gleichfalls ein leichtes Geschäft. Will man z. B. die Kantenwinkel irgend eines Hemiprismas $m\breve{P}\infty$ haben, so berechnet man, entweder unmittelbar nach der Formel

$$tang\,\mu = \frac{sin\,\gamma}{ma - cos\,\gamma}$$

den Winkel μ allein, oder auch nach der bekannten Regel der Trigonometrie, durch die Proportion

$$ma + 1 : ma - 1 = tang\,\tfrac{1}{2}(\mu + \nu) : tang\,\tfrac{1}{2}(\mu - \nu)$$

die beiden Winkel μ und ν zugleich, und gelangt dann leicht auf die Winkel X, Y und Z.

Eben so gelangt man für ein Hemiprisma $m\bar{P}\infty$, entweder durch die Formel

$$tang\,\pi = \frac{c\,sin\,\beta}{ma - c\,cos\,\beta}$$

Digitized by Google

oder durch die Proportion

$$ma + c : ma - c = tang\,\tfrac{1}{2}(\pi + \varrho) : tang\,\tfrac{1}{2}(\pi - \varrho)$$

auf den Winkel π, und mittels dieses Winkels auf *X*, *Y* und *Z*. Die Supplemente von *X*, *Y* und *Z* sind die Neigungen der Hemiprismen gegen $\infty\bar{P}\infty$, $\infty\breve{P}\infty$ und 0P.

Siebenter Abschnitt.

Vom triklinoëdrischen Systeme.

Erstes Capitel.

Von den Axen und Gestalten des Systemes.

§. 503.

Grundcharakter des Systemes.

Das triklinoëdrische System*) ist nach §. 43 der Inbegriff aller derjenigen Krystallformen, deren geometrischer Grundcharakter durch drei, auf einander schiefwinklige Coordinatebenen bestimmt wird. In dieser durchgängigen Schiefwinkligkeit der Coordinatebenen liegt die wesentliche Eigenthümlichkeit des Systemes, für dessen drei Axen sich, seinem Charakter unbeschadet, eben so wohl das Verhältniss der durchgängigen Gleichheit, oder der Gleichheit zweier gegen eine ungleiche, als das Verhältniss der durchgängigen Ungleichheit denken lässt. Betrachten wir dieses letztere, weil es nicht nur bis jetzt das allein beobachtete, sondern auch das dem Neigungsverhält-

*) Tetartoprismatisches System nach Mohs, ein-und-eingliedriges System nach Weiss, tetartorhombisches System nach Breithaupt.

Digitized by Google

nisse der Coordinatebenen allein entsprechende ist, als das naturgesetzliche Verhältniss, so finden wir in gegenwärtigem Systeme eine absolute Ungleichheit der Angular- und Lineardimensionen, und die grösste Abweichung von der Regelmässigkeit des Tesseralsystemes. Wie also für dieses letztere System in der durchgängigen Rechtwinkligkeit der Coordinatebenen und Gleichheit der Axen die Bedingungen für das Maximum der Regelmässigkeit, so sind für das triklinoëdrische System in der durchgängigen Schiefwinkligkeit der Coordinatebenen und Ungleichheit der Axen die Bedingungen für das Maximum der Unregelmässigkeit gegeben, welche überhaupt unter Voraussetzung eines trimetrischen Axensystemes realisirt werden konnte.

Den drei schiefen Neigungswinkeln *A*, *B* und *C* der Coordinatebenen entsprechen die drei Neigungswinkel α, β und γ der Axen, welche in der Regel gleichfalls alle schief sind, wiewohl auch einer derselben ein rechter seyn kann.

Da weder für die aufrechte, noch für die normale Stellung bestimmte Indicationen vorhanden sind, so haben wir willkürlich die erstere nach einer der Axen als Hauptaxe, und die andere nach einer der durch die Hauptaxe gehenden Coordinatebenen zu bestimmen, welche die Richtung auf den Beobachter erhält.

§. 504.

Triklinoëdrische Pyramiden und Prismen.

Construiren wir um ein triklinoëdrisches Axensystem für irgend ein endliches Verhältniss der Parameter $a : b : c$ den vollständigen Inbegriff der isoparametrischen Flächen, so erhalten wir ein Resultat, welches seiner allgemeinen Beschaffenheit nach mit dem im vorhergehenden Systeme gefundenen Resultate übereinstimmt. Es ist nämlich die so construirte

Gestalt wiederum eine von acht viererlei (in der Regel) ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Gestalt, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen, und welche daher den Namen einer triklinoëdrischen Pyramide führt.

Von den Flächen dieser Pyramide sind je zwei Gegenflächen gleich und ähnlich, weshalb es überhaupt viererlei Flächen, und daher auch vier Theilgestalten giebt, deren jede einzele nur ein paralleles Flächenpaar darstellt.

Die Kanten zerfallen in sechs, durch ihre Länge wie durch ihr Winkelmaass verschiedene Kantenpaare, von denen immer ein längeres und ein kürzeres in einen der drei Hauptschnitte fallen.

Die Ecke sind insgesammt viererleikantig und dreierlei, nämlich zwei Polecke, zwei spitzere Mittelecke an den Endpuncten der längeren, und zwei stumpfere Mittelecke an den Endpuncten der kürzeren Nebenaxe.

Die Hauptschnitte und alle ihnen parallele Schnitte sind Rhomboide.

Die triklinoëdrischen Pyramiden erscheinen jedoch nie so vollständig mit allen vier, im Gleichgewichte ausgebildeten Theilgestalten, wie solches die vorstehende Beschreibung derselben voraussetzt; vielmehr sind diese Theilgestalten von einander gänzlich unabhängig, und daher die Pyramiden selbst gewöhnlich nur in einzelen Viertelpyramiden ausgebildet.

Ausser den Pyramiden finden wir noch dreierlei, nämlich verticale und zwei Arten geneigte Prismen, welche insgesammt rhomboidische Querschnitte haben, und daher in zwei Hemiprismen zerfallen, so wie endlich die drei, den Coordinatebenen entsprechenden Flächenpaare des Systemes.

Digitized by Google

§. 505.
Symmetrieverhältnisse des Systemes.

Weil die Pyramiden dieses Systemes in vier, und die verschiedenen Prismen desselben in zwei Theilgestalten zerfallen, so begegnen wir in selbigem überhaupt nur solchen Gestalten, welche aus lauter ungleichwerthigen Flächenpaaren zusammengesetzt sind, indem für jede Fläche einzig und allein in ihrer Gegenfläche eine gleichwerthige vorhanden ist. Diese Vereinzelung aller Flächen hat in vielen Fällen für die Erscheinungsweise der triklinoëdrischen Krystallformen einen Mangel an Symmetrie zur Folge, durch welchen sie sich auffallend von den Krystallformen aller bisherigen Systeme unterscheiden *), während sich dagegen in andern Fällen durch gleichzeitige Ausbildung der coordinirten Theilgestalten eine Annäherung an die Symmetrie des monoklinoëdrischen Systemes zu erkennen giebt **).

Wie dem aber auch sey, so müssen wir doch, sowohl bei gegenwärtiger allgemeiner Darstellung des Systemes, als auch bei der besondern Betrachtung einer jeden triklinoëdrischen Krystallreihe, die, nur in ihrer Zerstückelung erscheinenden Gestalten in Gedanken ergänzen, indem wir die einzelen Theilgestalten, als die *disjecta membra* derselben, immer mit ihren respectiven Complementen in Beziehung setzen, und so die, nur theilweis ausgebildeten Formen in unsrer Vorstellung vervollständigen. Ohne dieses Hülfsmittel würde keine klare Uebersicht in einem Systeme möglich seyn, dessen Krystallformen nur Aggregate von Flächenpaaren, und dessen Symmetrieverhältnisse oft so versteckt sind, dass man an dem Vorhandenseyn derselben zweifeln möchte.

---

*) Z. B. Axinit und Kupfervitriol.

**) Z. B. Tetartin, Anorthit.

Zweites Capitel.
Von der Ableitung der triklinoëdrischen Gestalten.

§. 506.

Grundgestalt; Hauptreihe.

Indem wir die zu Ende des vorigen §. erwähnte Hülfsvorstellung zu Grunde legen, wählen wir irgend eine vollständige triklinoëdrische Pyramide zur Grundgestalt, bezeichnen sie mit ,'P',, und bestimmen ihre aufrechte Stellung. Ferner bezeichnen wir die halbe Hauptaxe mit a, die halbe längere Nebenaxe mit b, die halbe kürzere Nebenaxe mit c; die drei Neigungswinkel der Coordinatebenen, wie solche an a, b und c anliegen, mit A, B und C, und die ihnen gegenüberliegenden Neigungswinkel der Axen mit α, β und γ. Auch unterscheiden wir hier, wie im rhombischen und diklinoëdrischen Systeme zum Behufe der Nomenclatur der abgeleiteten Gestalten die beiden Nebenaxen der Grundgestalt durch die Namen der Makrodiagonale und Brachydiagonale (§. 412).

Aus der Grundgestalt wird zunächst folgende Hauptreihe triklinoëdrischer Pyramiden abgeleitet:

$$\begin{array}{ccc} & m<1 & & m>1 & \\ 0P \ldots\ldots & m,'P', \ldots\ldots & ,'P', \ldots\ldots & m,'P', \ldots\ldots & \infty,'P' \end{array}$$

in welcher, wie immer, die Glieder rechter Hand spitzer, die Glieder linker Hand flacher sind als ,'P',.

Sie ist eigentlich eine vierfache Reihe, indem jedes ihrer Glieder, mit Ausnahme der beiden äussersten, in vier Viertelpyramiden mP', m'P, mP, und m,P zerfällt, welche von einander gänzlich unabhängig sind. Das eine Gränzglied 0P ist, wie immer, das basische Flächenpaar; das andre Gränzglied ∞,'P' ein Prisma von rhomboidischem Querschnitte, welches daher in die zwei Hemiprismen ∞P' und ∞,'P zerfällt.

Digitized by Google

Auf diesen hemiprismatischen Charakter der verticalen Prismen einerseits, so wie auf die Schiefwinkligkeit der beiden verticalen Hauptschnitte anderseits beschränkt sich die ganze Verschiedenheit in der Erscheinungsweise dieses und des vorhergehenden Krystallsystemes.

§. 507.

Makrodiagonale und brachydiagonale Gestalten.

Aus jedem Gliede $m'_{,}\mathrm{P}'_{,}$ der Hauptreihe lassen sich zwei Reihen Pyramiden ableiten, in welchen einerseits die Brachydiagonale, anderseits die Makrodiagonale der Grundgestalt noch unverändert enthalten ist.

Man verfahre mit $m'_{,}\mathrm{P}'_{,}$ auf ähnliche Art wie in den vorhergehenden Systemen, d. h. man vergrössere einmal die Brachydiagonale bei constanter Makrodiagonale, das andre Mal die Makrodiagonale bei constanter Brachydiagonale nach einem Coëfficienten n, so erhält man mittels der bekannten Construction für jeden besondern Werth von n in jenem Falle eine brachydiagonale Pyramide mit unveränderter Makrodiagonale, in diesem Falle eine makrodiagonale Pyramide mit unveränderter Brachydiagonale der Grundgestalt. Bezeichnen wir allgemein jene mit $m'_{,}\breve{\mathrm{P}}'_{,}n$, diese mit $m'_{,}\bar{\mathrm{P}}'_{,}n$, so lässt sich der Inbegriff aller möglichen Gestalten beider Arten in folgende zwei Reihen zusammenfassen

$$m'_{,}\mathrm{P}'_{,} \ldots\ldots\ldots m'_{,}\breve{\mathrm{P}}'_{,}n \ldots\ldots\ldots m'_{,}\breve{\mathrm{P}}'_{,}\infty$$
$$m'_{,}\mathrm{P}'_{,} \ldots\ldots\ldots m'_{,}\bar{\mathrm{P}}'_{,}n \ldots\ldots\ldots m'_{,}\bar{\mathrm{P}}'_{,}\infty$$

Die Gränzen dieser Reihen sind geneigte Prismen mit rhomboidischen Querschnitten, welche daher jedenfalls in zwei Hemiprismen zerfallen. Je nachdem nun der makrodiagonale oder der brachydiagonale Hauptschnitt die Normalstellung bestimmt, werden die halben brachydiagonalen Klinoprismen mit $m'\breve{\mathrm{P}}'\infty$, $m_{,}\breve{\mathrm{P}}_{,}\infty$ und die halben makrodiagonalen Klinoprismen

Digitized by Google

mit $m,\bar{P}'\infty$, $m'\bar{P},\infty$ bezeichnet, oder umgekehrt, weil die Stellung der Accente der Lage entsprechen muss, in welcher sich die Flächen dieser Hemiprismen dem Beobachter präsentiren.

Wird dieselbe Ableitung auf $\infty,'P',$ angewandt, so gelangt man auf folgende zwei Reihen verticaler Prismen

$$\infty,'P,\ldots\ldots\infty,'\bar{P}'n\ldots\ldots\infty\bar{P}\infty$$
$$\infty,'P'\ldots\ldots\infty,'\breve{P}'n\ldots\ldots\infty\breve{P}\infty$$

Wir nennen die erstere die Reihe der **makrodiagonalen**, die zweite die Reihe der **brachydiagonalen verticalen Prismen**, und erkennen in ihren Gränzgliedern das makrodiagonale und brachydiagonale Flächenpaar, während die übrigen Glieder Prismen von rhomboidischen Querschnitten, und folglich aus zwei Hemiprismen zusammengesetzt sind, die als rechte und linke unterschieden werden.

§. 503.

Schema des triklinoëdrischen Systemes.

Vereinigen wir die Resultate der Ableitung, so erhalten wir folgendes übersichtliche Schema des triklinoëdrischen Systemes:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & m<1 & & & & m>1 & & \\
oP & \ldots & m,'\bar{P}',\infty & \ldots & ,'\bar{P}',\infty & \ldots & m,'\bar{P}',\infty & \ldots & \infty\bar{P}\infty \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oP & \ldots & m,'\bar{P}',n & \ldots & ,'\bar{P}',n & \ldots & m,'\bar{P}',n & \ldots & \infty,'\bar{P}',n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oP & \ldots & m,'P', & \ldots & ,'P', & \ldots & m,'P', & \ldots & \infty,'P', \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oP & \ldots & m,'\breve{P}',n & \ldots & ,'\breve{P}',n & \ldots & m,'\breve{P}',n & \ldots & \infty,'\breve{P}',n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oP & \ldots & m,'\breve{P}',\infty & \ldots & ,'\breve{P}',\infty & \ldots & m,'\breve{P}',\infty & \ldots & \infty\breve{P}\infty
\end{array}
$$

Die verschiedenen Gestalten des Systemes grup-

Digitized by Google

piren sich in die verschiedenen Reihen dieses Schemas, wie folgt:

1) Die mittelste horizontale Reihe, oder die Hauptreihe, begreift alle Pyramiden so wie das verticale Prisma von gleicher und ähnlicher Basis mit der Grundgestalt; sie theilt das ganze Schema in zwei ungleichartige Hälften, und ihre Gestalten lassen sich eben so wohl zu der einen wie zu der andern Hälfte zählen.

2) Die oberste horizontale Reihe, oder die makrodiagonale Nebenreihe, enthält die sämmtlichen makrodiagonalen Klinoprismen, so wie das gleichnamige Flächenpaar.

3) Die unterste horizontale Reihe, oder die brachydiagonale Nebenreihe, enthält die sämmtlichen brachydiagonalen Klinoprismen, so wie das gleichnamige Flächenpaar.

4) Die mittleren horizontalen Reihen der oberen Hälfte des Schemas, oder die makrodiagonalen Zwischenreihen, begreifen alle makrodiagonalen Pyramiden und die gleichnamigen verticalen Prismen.

5) Die mittleren horizontalen Reihen der unteren Hälfte des Schemas, oder die brachydiagonalen Zwischenreihen, begreifen alle brachydiagonalen Pyramiden, so wie die gleichnamigen verticalen Prismen des Systemes.

Drittes Capitel.

Von der Berechnung der triklinoëdrischen Gestalten.

§. 509.

Berechnung der Mittelpunctswinkel.

Für jede Viertelpyramide der Grundgestalt be-

Digitized by Google

zeichneten wir das Verhältniss der Axen oder Lineardimensionen mit

$$a : b : c$$

die drei, an den Axen anliegenden Neigungswinkel der Coordinatebenen mit A, B und C, und die drei, diesen Winkeln gegenüberliegenden Neigungswinkel der Axen mit α, β und γ. Wir bezeichnen noch ausserdem, ganz wie im vorigen Systeme, die Neigungswinkel der Pyramidenfläche gegen den makrodiagonalen, brachydiagonalen und basischen Hauptschnitt mit X, Y und Z, und endlich die Hauptschnittwinkel selbst mit μ und ν, π und ϱ, σ und τ.

Zuvörderst bestimmen sich die Winkel α, β und γ aus den Winkeln A, B und C nach bekannten Regeln, wie folgt:

$$\cos\alpha = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$$\cos\beta = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$$

bei welcher Bestimmung man sich auch der bekannten Formeln für $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\sin\frac{1}{2}\beta$ und $\sin\frac{1}{2}\gamma$ bedienen kann.

Für die ferneren Berechnungen ist darauf zu achten, dass

$$\mu + \nu + \gamma = 180^\circ$$
$$\pi + \varrho + \beta = 180^\circ$$
$$\sigma + \tau + \alpha = 180^\circ$$

Da man bisweilen zwei coordinirte (d. h. zu isoparametrischen Theilgestalten gehörige) Hauptschnittwinkel μ und μ', ν und ν' u. s. w. kennt, so kann man die Mittelpunctswinkel α, β und γ nach folgenden Formeln bestimmen:

$$\tan g\,\alpha = \frac{2\sin\sigma \sin\sigma'}{\sin(\sigma-\sigma')} = \frac{2\sin\tau \sin\tau'}{\sin(\tau-\tau')}$$

$$tang\,\beta = \frac{2\sin\pi\sin\pi'}{\sin(\pi-\pi')} = \frac{2\sin\varrho\sin\varrho'}{\sin(\varrho-\varrho')}$$

$$tang\,\gamma = \frac{2\sin\mu\sin\mu'}{\sin(\mu-\mu')} = \frac{2\sin\nu\sin\nu'}{\sin(\nu-\nu')}$$

§. 510.

Gleichung einer Fläche.

Will man die dieses Krystallsystem betreffenden Probleme nach analytisch-geometrischer Methode lösen, so mache man zuerst die triklinoëdrische Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

orthometrisch in Bezug auf die Winkel β und γ; sie verwandelt sich dann in

$$\frac{x_{II}}{a} + \frac{(a-b\cos\gamma)y_I}{ab\sin\gamma} + \frac{(a-c\cos\beta)z_I}{ac\sin\beta} = 1$$

oder, wenn man $\frac{ab\sin\gamma}{a-b\cos\gamma} = p$ und $\frac{ac\sin\beta}{a-c\cos\beta} = q$ setzt, in

$$\frac{x_{II}}{a} + \frac{y_I}{p} + \frac{z_I}{q} = 1$$

Die Coordinaten y_I und z_I schneiden sich noch unter dem schiefen Winkel A, und die Gleichung ist, wie sie hier steht, eigentlich eine monoklinoëdrische Gleichung; setzt man daher

$$y_I = y_{II} - z_{II}\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$z_I = z_{II}\frac{1}{\sin A}$$

so wird sie

$$\frac{x_{II}}{a} + \frac{y_{II}}{p} + \frac{(p-q\cos A)z_{II}}{pq\sin A} = 1$$

und ist in dieser orthometrischen Form zur analytischen Auflösung aller Probleme geeignet, welche sich auf die Lage der Flächen und ihrer Durchschnittslinien beziehen; eine Auflösung, welche freilich mehre

vorbereitende Rechnungen erfordert, um die Grössen p und q, so wie den Factor von z_{II} zu finden. Wenn man jedoch bedenkt, dass die inversen Grössen der Ausdrücke $\frac{p}{a}$ und $\frac{q}{a}$ auch in allen übrigen Berechnungen eine wichtige Rolle spielen, und daher in den meisten Fällen berechnet werden müssen, so überzeugt man sich, dass die Darstellung der orthometrischen Form einer triklinoëdrischen Gleichung nicht so weitläufig ist, als es den Anschein hat. Weil aber, mit Ausnahme des die Lage der Flächennormale betreffenden Problemes, die meisten *in praxi* nöthigen Rechnungen sehr leicht mittels der Triëdrometrie auszuführen sind, so wollen wir uns auch vorzugsweise dieser Methode bedienen.

§. 511.

Hauptschnittwinkel.

Die Tangenten der Hauptschnittwinkel bestimmen sich hier ganz so wie im diklinoëdrischen Systeme, nämlich:

$$tang\,\mu = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}$$

$$tang\,\nu = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$$

$$tang\,\pi = \frac{c\sin\beta}{a - c\cos\beta}$$

$$tang\,\varrho = \frac{c\sin\beta}{a - c\cos\beta}$$

$$tang\,\sigma = \frac{c\sin\alpha}{b - c\cos\alpha}$$

$$tang\,\tau = \frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha}$$

Bei dem Gebrauche dieser Formeln hat man sorgfältig darauf zu achten, welche von den Winkeln α, β und γ spitz oder stumpf sind, weil im letzteren Falle die Cosinus negativ genommen werden müssen.

Digitized by Google

Als Functionen der Kantenwinkel X, Y und Z findet man

$$\cos\mu = \frac{\cos Y + \cos X \cos A}{\sin X \sin A}$$

$$\cos\nu = \frac{\cos Z + \cos X \cos B}{\sin X \sin B}$$

$$\cos\pi = \frac{\cos X + \cos Y \cos A}{\sin Y \sin A}$$

$$\cos\varrho = \frac{\cos Z + \cos Y \cos C}{\sin Y \sin C}$$

$$\cos\sigma = \frac{\cos X + \cos Z \cos B}{\sin Z \sin B}$$

$$\cos\tau = \frac{\cos Y + \cos Z \cos C}{\sin Z \sin C}$$

wofür man sich auch der Formeln

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\mu = \frac{\cos(S-X)\cos(S-A)}{\sin X \sin A}$$

u. s. w. für die übrigen Winkel bedienen kann, indem $S = \frac{1}{2}(Y + X + A)$ u. s. w.; da man aber der Logarithmen für $\cos Y$, $\cos X$, $\cos A$ auch ausserdem bedarf, so sind die ersteren Formeln in vielen Fällen doch noch bequemer, obgleich man bei ihrem Gebrauche genöthigt ist, von Logarithmen auf Zahlen, und von diesen auf Logarithmen zurück zu gehen; denn die Bestimmung der Differenzen $S-X$, $S-A$ u. s. w. erfordert fast eben so viel Zeit, als jene Uebersetzung der Logarithmen zur Bildung der Summe $\cos Y + \cos X \cos A$.

Uebrigens bedarf man dieser Formeln nur zur Auffindung je eines Hauptschnittwinkels, da zwischen den Kanten- und Hauptschnittwinkeln folgende Relationen Statt finden:

$$\sin X : \sin Y = \sin\pi : \sin\mu$$
$$\sin Y : \sin Z = \sin\tau : \sin\varrho$$
$$\sin Z : \sin X = \sin\nu : \sin\sigma$$

Digitized by Google

daher auch

$$\sin\mu \sin\varrho \sin\sigma = \sin\nu \sin\pi \sin\tau$$

Hat man also z. B. μ nach der Formel

$$\cos\mu = \frac{\cos Y + \cos X \cos A}{\sin X \sin A}$$

berechnet, so findet man sogleich π durch

$$\sin\pi = \frac{\sin\mu \sin X}{\sin Y}$$

u. s. w.

§. 512.

Kantenwinkel einer Viertelpyramide.

Die Kantenwinkel lassen sich am bequemsten als Functionen der Hauptschnittwinkel mittels der Neperschen Analogien auffinden, wie folgt:

1) X und Y aus A, μ und π:

$$\tang\tfrac{1}{2}(X + Y) = \cot\tfrac{1}{2}A \frac{\cos\frac{1}{2}(\pi - \mu)}{\cos\frac{1}{2}(\pi + \mu)}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(X - Y) = \cot\tfrac{1}{2}A \frac{\sin\frac{1}{2}(\pi - \mu)}{\sin\frac{1}{2}(\pi + \mu)}$$

2) X und Z aus B, ν und σ:

$$\tang\tfrac{1}{2}(X + Z) = \cot\tfrac{1}{2}B \frac{\cos\frac{1}{2}(\sigma - \nu)}{\cos\frac{1}{2}(\sigma + \nu)}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(X - Z) = \cot\tfrac{1}{2}B \frac{\sin\frac{1}{2}(\sigma - \nu)}{\sin\frac{1}{2}(\sigma + \nu)}$$

3) Y und Z aus C, ϱ und τ:

$$\tang\tfrac{1}{2}(Y + Z) = \cot\tfrac{1}{2}C \frac{\cos\frac{1}{2}(\tau - \varrho)}{\cos\frac{1}{2}(\tau + \varrho)}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(Y - Z) = \cot\tfrac{1}{2}C \frac{\sin\frac{1}{2}(\tau - \varrho)}{\sin\frac{1}{2}(\tau + \varrho)}$$

Will man also die drei Kantenwinkel einer, durch ihr krystallographisches Zeichen gegebenen Viertelpyramide berechnen, so berechnet man zuvörderst aus den Axen und den bekannten Winkeln α, β und γ nach den Regeln der Trigonometrie die Winkel zweier Hauptschnitte, z. B. μ und π, darauf aus diesen Winkeln und A mittels der Neperschen Analo-

Digitized by Google

gien die Winkel X und Y, und endlich, weil mit μ und π auch ν und ϱ bekannt sind,

$$\cos Z = \frac{\cos B}{\sin\psi} \sin(X-\psi)$$

oder $$\cos Z = \frac{\cos C}{\sin\psi} \sin(Y-\psi)$$

wo der Hülfswinkel ψ durch

$$\cot\psi = \cos\nu \tang B$$

oder $$\cot\psi = \cos\varrho \tang C$$

bestimmt wird.

Doch kann man auch zur Bestimmung von Z unmittelbar aus den Axen die Winkel des basischen Hauptschnittes berechnen, und dann mittels derselben Analogie, durch welche X und Y gefunden worden, entweder X und Z oder Y und Z finden; ein Verfahren, welches den Vortheil gewährt, dass sich die Rechnungen controliren, weil jedesmal einer der gesuchten Winkel aus verschiedenen Elementen zweimal gefunden, und durch die Gleichheit der in beiden Fällen erhaltenen Resultate die Richtigkeit der Rechnung verbürgt wird.

§. 513.

Kantenwinkel der Hemiprismen.

Will man die Winkel X, Y und Z eines, durch sein krystallographisches Zeichen gegebenen Hemiprismas berechnen, so berechnet man zuerst aus den Axen und dem eingeschlossenen Winkel α, β oder γ die ebenen Winkel desjenigen Hauptschnittes, welcher die Axe des Prismas schneidet, gelangt darauf mittels der Neperschen Analogien auf die Bestimmung zweier Winkel, und durch die Relationen, welche zwischen den Längenkanten jedes Hemiprismas und einem der Winkel A, B und C Statt findet, auf den dritten Winkel.

Digitized by Google

1) **Für verticale Hemiprismen.**

Man berechnet aus b, c und a die Winkel σ und τ, dann mittels der Neperschen Analogien

aus σ, γ und B die Winkel X und Z, oder
aus τ, β und C die Winkel Y und Z,

und endlich in jenem Falle Y, in diesem Falle X aus der Gleichung

$$A + X + Y = 180°$$

2) **Für geneigte makrodiagonale Hemiprismen.**

Man berechnet aus a, c und β die Winkel π und ϱ, dann mittels der Neperschen Analogien

aus π, γ und A die Winkel X und Y, oder
aus ϱ, α und C die Winkel Z und Y,

und endlich in jenem Falle Z, in diesem Falle X aus der Gleichung

$$B + X + Z = 180°$$

3) **Für geneigte brachydiagonale Hemiprismen.**

Man berechnet aus b, a und γ die Winkel μ und ν, dann mittels der Neperschen Analogien

aus μ, β und A die Winkel X und Y, oder
aus ν, α und B die Winkel X und Z,

und endlich in jenem Falle Z, in diesem Falle Y aus der Gleichung

$$C + Y + Z = 180°$$

§. 514.

Berechnung der Lineardimensionen.

Bevor man für eine durch ihre Kantenwinkel bestimmte Gestalt zur Berechnung der Lineardimensionen schreiten kann, müssen die Angulardimensionen A, B und C, oder auch die ihnen entsprechenden Mittelpunctswinkel α, β und γ bekannt seyn, daher man auch die ersteren Winkel wo möglich unter die unmittelbaren Beobachtungselemente aufzunehmen hat. Nachdem α, β und γ gefunden sind, lässt sich für jede

Digitized by Google

Viertelpyramide aus je zweien ihrer Winkel X, Y und Z das Verhältniss ihrer Lineardimensionen berechnen, wobei alles auf die Berechnung zweier ungleichnamiger Hauptschnittwinkel ankommt. Denn da

$$\mu + \nu + \gamma = 180°$$
$$\pi + \varrho + \beta = 180°$$
$$\sigma + \tau + \alpha = 180°$$

die Winkel α, β und γ aber als bekannt vorausgesetzt werden, so ist mit je einem Hauptschnittwinkel auch der andere desselben Hauptschnittes (z. B. mit μ auch ν) gegeben. Kennt man also zwei ungleichnamige Hauptschnittwinkel, so gelangt man sehr leicht durch je zwei der Proportionen

$$\sin\mu : \sin\nu = b : a$$
$$\sin\pi : \sin\varrho = c : a$$
$$\sin\sigma : \sin\tau = c : b$$

auf die Bestimmung des Verhältnisses der Lineardimensionen $a : b : c$.

Wie man aber aus den Kantenwinkeln die Hauptschnittwinkel findet, dies lehrt §. 511.

Für die Prismen wird die Berechnung weit einfacher, zumal wenn man eine von denjenigen Kanten gemessen hat, welche der Axe des Prismas parallel sind, weshalb wir auch diesen Fall zuerst betrachten wollen.

1) Für verticale Hemiprismen findet man aus einer der Kanten X oder Y die andre, weil

$$X + Y + A = 180°$$

und dann aus X und Y das Verhältniss

$$b : c = \sin Y \sin\beta : \sin X \sin\gamma$$

2) Für makrodiagonale geneigte Hemiprismen findet man aus einer der Kanten X oder Z die andre, weil

$$X + Z + B = 180°$$

und dann aus X und Z das Verhältniss

$$a : c = \sin Z \sin\alpha : \sin X \sin\gamma$$

Digitized by Google

3) Für **brachydiagonale geneigte Hemiprismen** endlich findet man aus **einer** der Kanten Y oder Z die andre, weil

$$Y + Z + C = 180^\circ$$

und dann aus Y und Z das Verhältniss

$$a : b = \sin Z \sin \alpha : \sin Y \sin \beta$$

§. 515.

Fortsetzung.

Kann man dagegen nur diejenige Kante messen, welche der Axe des Hemiprismas **nicht** parallel ist, so muss man die ebenen Winkel der prismatischen Flächen zu Hülfe nehmen, wie folgt.

1) Für verticale Hemiprismen findet sich aus Z

$$\sin v = \frac{\sin B \sin \gamma}{\sin Z}, \text{ oder } \sin \xi = \frac{\sin C \sin \beta}{\sin Z}$$

und dann mittels der Neperschen Analogien,

$$tang\,\tfrac{1}{2}\sigma = tang\,\tfrac{1}{2}(v - \gamma)\frac{\sin\frac{1}{2}(B+Z)}{\sin\frac{1}{2}(B-Z)}$$

oder $$tang\,\tfrac{1}{2}\tau = tang\,\tfrac{1}{2}(\xi - \beta)\frac{\sin\frac{1}{2}(C+Z)}{\sin\frac{1}{2}(C-Z)}$$

2) Für geneigte makrodiagonale Hemiprismen findet sich aus Y

$$\sin \zeta = \frac{\sin A \sin \gamma}{\sin Y}, \text{ oder } \sin \xi = \frac{\sin C \sin \alpha}{\sin Y}$$

und dann

$$tang\,\tfrac{1}{2}\pi = tang\,\tfrac{1}{2}(\zeta - \gamma)\frac{\sin\frac{1}{2}(A+Y)}{\sin\frac{1}{2}(A-Y)}$$

oder $$tang\,\tfrac{1}{2}\varrho = tang\,\tfrac{1}{2}(\xi - \alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(C+Y)}{\sin\frac{1}{2}(C-Y)}$$

3) Für geneigte brachydiagonale Hemiprismen endlich findet sich aus X

$$\sin \zeta = \frac{\sin A \sin \beta}{\sin X}, \text{ oder } \sin v = \frac{\sin B \sin \alpha}{\sin X}$$

Digitized by Google

und dann

$$tang\,\tfrac{1}{2}\mu = tang\,\tfrac{1}{2}(\zeta - \beta)\,\frac{sin\,\tfrac{1}{2}(A+X)}{sin\,\tfrac{1}{2}(A-X)}$$

oder

$$tang\,\tfrac{1}{2}\nu = tang\,\tfrac{1}{2}(v - \alpha)\,\frac{sin\,\tfrac{1}{2}(B+X)}{sin\,\tfrac{1}{2}(B-X)}$$

Aus allen diesen Berechnungen folgt die Regel, dass man, um die kürzeste und leichteste Berechnung der Lineardimensionen zu erhalten, zu den unmittelbaren Beobachtungselementen wo möglich nur die Längenkanten der Hemiprismen wählen, und auch die Bestimmung der Dimensionen von Pyramiden wo möglich von jener der coordinirten Prismen abhängig machen muss.

Viertes Capitel.

Von den Combinationen des triklinoëdrischen Systemes.

A. Regeln zur Entwicklung der Combinationen.

§. 516.

Wahl der Coordinatebenen und Grundgestalt.

Da eine jede Theilgestalt, welchen Namen sie auch führen mag, nur durch ein Flächenpaar dargestellt wird, so werden jedenfalls wenigstens drei Theilgestalten mit einander combinirt, und überhaupt in einer jeden triklinoëdrischen Combination eben so viele Theilgestalten enthalten seyn, als es verschiedene Flächen giebt. Wiewohl daher die Combinationen dieses Systemes nur Polyëder aus lauter ungleichwerthigen und oft ganz beziehungslos erscheinenden Flächenpaaren darstellen, und wiewohl sie bisweilen durch das isolirte Auftreten einzeler, oder auch durch die sehr ungleichmässige Ausdehnung coordinirter

Theilgestalten einen solchen Schein von Unregelmässigkeit annehmen, dass man auf den ersten Anblick an der Auffindung irgend eines Symmetriegesetzes verzweifeln möchte, so werden doch diese Schwierigkeiten grösstentheils gehoben, wenn man sich die Resultate der Ableitung und die derselben zu Grunde liegende Hülfsvorstellung vergegenwärtigt.

Die wichtigste Frage, welche man sich vor der Entwicklung einer Combination zu beantworten hat, ist, welche von den vorhandenen (oder doch indicirten) Flächenpaaren den drei Hauptschnitten entsprechen, und demzufolge mit 0P, $\infty\bar{P}\infty$ und $\infty\breve{P}\infty$ bezeichnet werden sollen; denn von der mehr oder weniger glücklichen Wahl dieser Coordinatebenen hängt die mehr oder weniger symmetrische Ansicht der ganzen Combination ab, und vor jener Wahl ist an eine Orientirung derselben überhaupt nicht wohl zu denken. Die Lage der Combinationskanten muss bei dieser Wahl vorzüglich zur Richtschnur dienen, indem man wo möglich diejenigen, entweder wirklich ausgebildeten, oder durch die Verhältnisse der übrigen Gestalten angedeuteten Flächen zu den Repräsentanten der Coordinatebenen wählt, welchen die meisten Combinationskanten parallel laufen.

Die zweite wichtige Frage nach der Grundgestalt ist zunächst nur für irgend eine Viertelpyramide zu beantworten, und daher irgend eines der vorhandenen Flächenpaare mit P′, ′P, P, oder ,P zu bezeichnen. Man hat dabei wiederum auf den Parallelismus der Kanten und auf die allgemeine Regel (§. 412) zu achten, nach welcher sich diejenige Gestalt vorzugsweise als Grundgestalt empfiehlt, welche die leichteste Entwicklung und einfachste Bezeichnung der Combination gewährt. Hieraus ergiebt sich von selbst die besondere Regel, die Wahl der Grundgestalt wo möglich so zu treffen, dass sich für eine

Viertelpyramide andere Flächenpaare als die coordinirten Viertelpyramiden bestimmen. Ueberhaupt aber erfordern alle diese Bestimmungen desto mehr Umsicht und Aufmerksamkeit, je weniger ein Anhalten dafür in den Verhältnissen der Combinationen selbst gegeben zu seyn pflegt.

§. 517.

Allgemeine Regeln der Entwicklung.

Nach Bestimmung der Coordinatebenen und der Grundgestalt lassen sich sogleich folgende allgemeine Regeln in Anwendung bringen, indem wir wie bisher unter a, b und c, a', b' und c' diejenigen Dimensionen irgend zweier Gestalten verstehen, welche in die Hauptaxe, Makrodiagonale und Brachydiagonale der Grundgestalt fallen.

1) Für je zwei Flächen, deren CK. dem basischen Hauptschnitte parallel läuft, ist $b : c = b' : c'$.
2) Für je zwei Flächen, deren CK. dem makrodiagonalen Hauptschnitte parallel läuft, ist $a : b = a' : b'$.
3) Für je zwei Flächen, deren CK. dem brachydiagonalen Hauptschnitte parallel läuft, ist $a : c = a' : c'$.

Die allgemeine Orientirung der Gestalten wird durch eine Vergleichung der Lage ihrer Flächen mit der Lage der Flächen der Grundgestalt gewonnen, wobei zumal für die Unterscheidung der Viertelpyramiden und Hemiprismen darauf zu achten ist, dass jedes verticale Prisma in die Zone der Flächen $\infty\bar{P}\infty$ und $\infty\breve{P}\infty$, jedes makrodiagonale Klinoprisma in die Zone der Flächen $\infty P\infty$ und 0P, und jedes brachydiagonale Klinoprisma in die Zone der Flächen $\infty\breve{P}\infty$ und 0P fällt (§. 68).

Für alle weiteren Entwicklungen gelten nicht nur die im rhombischen und monoklinoëdrischen Systeme

Digitized by Google

aufgestellten allgemeinen, sondern auch die in §. 440 enthaltenen besondern Regeln, welche freilich zuvörderst in die, der Zerstückelung der Gestalten angemessene Sprache und Bezeichnung übersetzt werden müssen, und wegen dieser Parcellirung nicht selten ihre Anwendbarkeit verlieren. So muss z. B. die Regel Nr. 4 aus §. 440 für gegenwärtiges System so ausgesprochen werden: dasjenige halbe Klinoprisma, dessen Flächen die Combinationsecke zwischen *m*P′, *m*′P, ∞P′ und ∞′P so abstumpft, dass die Abstfl. als Parallelogramme erscheinen, ist allgemein 2*m*P∞; u. s. w.

§. 518.

Gebrauch der Combinationsgleichung.

Um so wichtiger wird der Gebrauch der Combinationsgleichung in §. 68, welche für dieses System ganz in derselben Art wie für das rhombische System ihre Anwendung findet. Nur sind die schon früher erwähnten Vorsichtsregeln ganz besonders zu berücksichtigen, indem man jedenfalls die Lage der beiden bekannten Flächen und die dieser Lage entsprechenden positiven oder negativen Werthe ihrer Parameter genau bestimmen muss, bevor man die Coëfficienten dieser Parameter in die Combinationsgleichung einführt. Bei gehöriger Berücksichtigung der Lage der Flächen in diesem oder jenem Octanten wird die CG. jedenfalls schnell und sicher zur Auffindung der Relation gelangen lassen, welche zwischen den Ableitungszahlen irgend einer unbekannten Fläche Statt findet, die in die Zone zweier bekannter Flächen fällt.

§. 519.

Berechnung der Combinationskanten.

Die Berechnung der Combinationskante geschieht hier, wie in den vorhergehenden Systemen, auf verschiedene Art, je nach der verschiedenen Lage der CK.

Digitized by Google

A. Ist nämlich die CK. zweier Flächen einem der Hauptschnitte parallel, so berechnet man die resp. Neigungswinkel beider Flächen gegen denselben Hauptschnitt, also X und X', wenn die CK. parallel $\infty\bar{P}\infty$; Y und Y', wenn sie parallel $\infty\breve{P}\infty$; Z und Z', wenn sie parallel $0P$. Das Supplement der Differenz, oder, wenn die Flächen zu beiden Seiten des Hauptschnittes liegen, die Summe beider Winkel ist die gesuchte CK.

B. Ist die CK. keinem der Hauptschnitte parallel, so berechnet man wiederum für beide Flächen ihre resp. Neigungswinkel gegen einen beliebigen der drei Hauptschnitte (z. B. die Winkel X und X'), zugleich aber auch die gleichnamigen resp. Hauptschnittwinkel beider Flächen (z. B. μ und μ'). Diese Flächen bilden nämlich mit dem gewählten Hauptschnitte ein Triëder, in welchem zwei Kantenwinkel nebst dem eingeschlossenen Flächenwinkel (nämlich X und X', nebst dem Winkel $180° - (\mu - \mu') = \Sigma$) bekannt sind; man findet also den dritten Kantenwinkel, welcher die gesuchte CK. Π ist, nach der bekannten Formel

$$\cos \Pi = \cos \Sigma \sin X \sin X' - \cos X \cos X'$$

B. Beispiele der Entwicklung und Berechnung.

§. 520.

Combination des Anorthites.

Als Beispiel der Entwicklung und Berechnung wähle ich zuvörderst die in Fig. 534 dargestellte Combination des Anorthites, weil sich solche in ihren Symmetrieverhältnissen einer monoklinoëdrischen Combination nähert, und daher ziemlich den höchsten Grad der Symmetrie zeigt, welcher in diesem Systeme Statt finden kann.

Sie ist eine zwölfzählige Combination, in welcher

wir $P = 0\mathrm{P}$, $T = \infty\mathrm{P}'$ und $l = \infty'\mathrm{P}$ setzen, wodurch sich die Lage der beiden verticalen Hauptschnitte bestimmt, obwohl solche nicht ausgebildet erscheinen. Von den übrigen Flächen gehören nun

1) in die Hauptreihe *m*, *o*, *p* und *u*,
2) in die makrod. Nebenreihe *t*, *y* und *x*,
3) in die brachyd. Nebenreihe *n* und *e*.

Die Viertelpyramide *m* sey uns ein Glied der Grundgestalt, also

$$m = {}'\mathrm{P}$$

so folgt für *t*, weil sie die CK. zwischen *m* und *T* abstumpft,

$$t = 2'\mathrm{P}'\infty$$

für *e*, weil sie die CK. zwischen *m* und der hinteren Fläche *T* abstumpft,

$$e = 2'\breve{\mathrm{P}},\infty$$

Nun wird aber durch dieselbe Fläche *e* die CK. zwischen *l* und der oberen Gegenfläche von *p* abgestumpft, also ist

$$p = \mathrm{P},$$

Weil ferner die CK. von *o* und *p*, welche durch *x* abgestumpft wird, dem brachydiagonalen Hauptschnitte parallel ist, so folgt nicht nur, dass

$$o = ,\mathrm{P}$$

sondern auch, dass

$$x = ,\bar{\mathrm{P}},\infty$$

Aus den bereits für andere Gestalten angeführten Gründen ergiebt sich endlich, dass

$$y = 2,\bar{\mathrm{P}},\infty$$
$$u = 2,\mathrm{P}$$
$$n = 2,\breve{\mathrm{P}}'\infty$$

Die Entwicklung dieser Combination ist also unabhängig von allen Messungen.

§. 521.

Fortsetzung; Berechnung.

Da von den drei Coordinatebenen nur die eine

0P in der Combination erscheint, so lassen sich die drei Winel *A*, *B* und *C* nicht unmittelbar beobachten, und müssen also aus andern Winkeln abgeleitet werden. Gustav Rose beobachtete jedoch andre Krystalle, an welchen die scharfen Seitenkanten des Prismas ∞'P' durch das brachydiagonale Flächenpaar *M* = ∞P̆∞ abgestumpft sind, und fand folgende Winkel:

P:*M* (rechts)	= 85° 48′
T:*M*	= 117° 28′
T:*l*	= 120° 30′
P:*n*	= 133° 13′
P:*T*	= 110° 57′

Das Supplement 62° 32′ des Winkels *T*:*M* ist der Winkel *Y* für ∞P'; subtrahiren wir diesen Winkel von *T*:*l*, so erhalten wir den Winkel *Y* für ∞'P = 57° 58′ = *Y*′.

Das Supplement von *P*: *T* oder 69° 3′ ist der Winkel *Z* in ∞P'.

Der Winkel *P*:*M* ist = 0P : ∞P̆∞, also

$$C = 85° \; 48'$$

und endlich das Supplement des Winkels P:*n* = 46° 47′ der Winkel *Z* in 2,P̆'∞ = *Z*′. Aus den Winkeln *Z*, *Y* und *C* findet sich der Mittelpunctswinkel

$$\beta = 63° \; 45'$$

und, weil $sin\,\tau = \frac{sin\,Y\,sin\,\beta}{sin\,Z}$

für ∞P' der Hauptschnittwinkel

$$\tau = 58° \; 26'$$

Aus β, *Y*′ und 180° — *C* findet sich der gleichnamige Hauptschnittwinkel τ' für ∞'P

$$\tau' = 56° \; 35'$$

Da nun τ und τ' zwei coordinirten Hemiprismen angehören, so wird nach der Formel

$$tang\,\alpha = \frac{2\,sin\,\tau\,sin\,\tau'}{sin(\tau - \tau')}$$

Digitized by Google

der Mittelpunctswinkel

$$\alpha = 88° \; 42'$$

und zwar gehört dieser Winkel zu ∞P′, sein Supplement zu ∞′P, weshalb für das erstere Hemiprisma, oder für die Fläche *T*

$$\sigma = 180° - (\alpha + \tau) = 32° \; 52'$$

Da nun

$$b : c = \sin\tau : \sin\sigma$$

so wird, wenn wir die halbe Brachydiagonale $c = 1$ setzen,

$$b = 1{,}570$$

Für das brachydiagonale geneigte Hemiprisma *n* fanden wir $Z' = 46° \; 47'$; also wird für selbiges

$$Y' = 180° - (Z' + C) = 47° \; 25'$$

da nun $\quad \sin Z' \sin\alpha : \sin Y' \sin\beta = 2a : b$

so wird, für vorstehende Werthe von b und c,

$$a = 0{,}866$$

Was die noch übrigen Angulardimensionen A, B und γ betrifft, so sind selbige leicht aus den bekannten Winkeln C, α und β zu berechnen; man findet mittels der Neperschen Analogien zuvörderst A und B, welche im Octanten der Fläche P′ mit folgenden Werthen erscheinen

$$A = 87° \; 0'$$
$$B = 116° \; 23'$$

und endlich den Winkel

$$\gamma = 86° \; 48{,}5'$$

Die Krystallreihe des Anorthites wird also durch die Lineardimensionen

$$a : b : c = 0{,}866 : 1{,}570 : 1$$

und durch die Angulardimensionen

$$A = 87° \; 0' \text{ oder } \alpha = 88° \; 42'$$
$$B = 116° \; 23' \quad - \quad \beta = 116° \; 15'$$
$$C = 85° \; 48' \quad - \quad \gamma = 86° \; 48{,}5'$$

charakterisirt.

Digitized by Google

§. 522.

Combinationen des Kupfervitriols.

Als zweites Beispiel wähle ich die Krystallformen des Kupfervitrioles, weil solche den höchsten Grad der Unsymmetrie zeigen, welcher in diesem Systeme Statt finden kann.

Setzen wir in Fig. 535 bis 537

die Flächen $o = 0P$

\- - - $n = \infty\bar{P}\infty$

\- - - $r = \infty\breve{P}\infty$

\- - - $T = \infty P'$

\- - - $M = \infty{}'P$

so ordnen sich die übrigen Flächen, wie folgt:

1) in die Hauptreihe, *P*,

2) in die brachyd. Nebenreihe, *p*, *q*, *v* und *w*,

3) in brachyd. Zwischenreihen, *i*, *s*, *x* und *m*.

Einige dieser Theilgestalten sind unmittelbar zu bestimmen. Da nämlich die CK. von *p* und *P* dem makrodiagonalen Hauptschnitte parallel ist, so wird, wenn $P = P'$

$$p = {}_{,}\breve{P}'\infty$$

und da *v* die CK. zwischen *P* und der hinteren Fläche *M* abstumpft, so ist

$$v = 2{}_{,}\breve{P}'\infty$$

Für andere der unbekannten Gestalten lässt sich wenigstens eine Relation nachweisen, durch welche ihre Bestimmung nur von e i n e r Messung abhängig gemacht wird. Weil z. B. die CK. von *P* und *i*, *P* und *s*, P und *x* dem brachydiagonalen Hauptschnitte parallel laufen, so sind die beiden Ableitungszahlen jeder dieser Gestalten einander gleich, und es ist daher

$$i = m'\breve{P}m$$
$$s = m'\breve{P}'m'$$
$$x = m''\breve{P}'m''$$

Da endlich die CK. von *i* und *w* in eine Paral-

lelebene des makrodiagonalen, und die CK. von *s* und *m* in eine Parallelebene des basischen Hauptschnittes fällt, so sind diese beiden Hemiprismen durch die genannten Viertelpyramiden bestimmt, und es wird

$$w = m'\breve{P},\infty$$
$$m = \infty\breve{P}'m\cdot$$

Ausser den drei Viertelpyramiden *i*, *s* und *x* erfordert daher nur noch das geneigte Hemiprisma *q* eine Messung zu seiner Bestimmung. Bevor jedoch diese Bestimmung möglich ist, müssen die Dimensionen der Grundgestalt bekannt seyn, zu deren Berechnung wir also zunächst übergehen.

§. 523.

Fortsetzung.

Kupffer hat am Kupfervitriol mehre Winkel gemessen, von welchen wir folgende fünf unsern Berechnungen zu Grunde legen:

$n:r = 100°\ 41'$, also $A = 79°\ 19'$
$T:r = 110°\ 10'$, also Y in $\infty P' = 69°\ 50'$
$P:r = 103°\ 27'$, also Y in $P' = 76°\ 33'$
$p:n' = 109°\ 38'$, also X in $,\breve{P}'\infty = 109°\ 38'$
$P:T = 127°\ 40'$

Der Gang der Rechnung ist nun folgender.

In dem von den Flächen *P*, *T* und dem brachydiagonalen Hauptschnitte gebildeten Triëder sind alle drei Kantenwinkel bekannt, man findet also leicht den Gegenwinkel der Kante *P*: *T*, welcher das Supplement des Hauptschnittwinkels π für P′ ist, und daher:

$$\pi = 54°\ 26{,}5'$$

so wie den Gegenwinkel der Kante *T*: *r*, oder den ebenen Winkel auf *P′*:

$$\xi = 74°\ 44'$$

In dem Triëder, welches die Fläche *P* mit den beiden verticalen Hauptschnitten bildet, sind bekannt

der Winkel $A = 79° 19'$
der Winkel Y in P′ $= 76° 33'$
der zwischenl. ebene Winkel $\pi = 54° 26{,}5'$

man erhält daher für P′ den Hauptschnittwinkel

$$\mu = 67° 9'$$

In dem Triëder, welches die Fläche p mit den beiden verticalen Hauptschnitten bildet, sind bekannt

der Winkel $A = 79° 19'$
der Winkel X in $p = 109° 38'$
der Winkel $\mu = 67° 9'$

man erhält also den der Kante X gegenüberliegenden ebenen Winkel, welcher das Supplement zu dem Mittelpunctwinkel β ist, und folglich

$$\beta = 73° 10{,}5'$$

und, da $180° = \beta + \pi + \varrho$

$$\varrho = 52° 23'$$

In dem Triëder, welches von der Fläche P, dem brachydiagonalen und basischen Hauptschnitte gebildet wird, sind nun bekannt

der Flächenwinkel $\varrho = 52° 23'$
der Flächenwinkel $\xi = 74° 44'$
der zwischenl. Kantenwinkel $Y = 76° 33'$

man findet also mittels der Neperschen Analogien die beiden andern Kanten, von welchen die kleinere die Mittelkante Z in P′, die grössere der Neigungswinkel C des brachydiagonalen und basischen Hauptschnittes ist; nämlich

$$Z = 54° 58'$$
$$C = 85° 38'$$

In dem von den drei Hauptschnitten gebildeten Triëder sind nun bekannt:

der Kantenwinkel $A = 79° 19'$
der Kantenwinkel $C = 85° 38'$
der Flächenwinkel $\beta = 73° 10{,}5'$

man findet also zuvörderst mittels der Neperschen Analogien die beiden andern Flächenwinkel:

Digitized by Google

$$\alpha = 77^\circ\ 37{,}5'$$
$$\gamma = 82^\circ\ 21{,}5'$$

und darauf den dritten Kantenwinkel

$$B = 74^\circ\ 22'$$

womit denn die Bestimmung der Angulardimensionen des Kupfervitriols vollendet ist.

Die Lineardimensionen finden sich leicht aus den für die Viertelpyramide P′ bekannten Hauptschnittwinkeln π, ϱ, μ und ν*); ist nämlich die Hauptaxe $a = 1$, so wird

$$\text{die Makrodiagonale } b = \frac{\sin\mu}{\sin\nu} = 1{,}816$$

$$\text{die Brachydiagonale } c = \frac{\sin\pi}{\sin\varrho} = 1{,}027$$

und wir erhalten daher folgende Uebersicht der Dimensionen des Kupfervitriols **):

$$a : b : c = 1 : 1{,}816 : 1{,}027$$

$A = 79^\circ\ 19'$	oder	$\alpha = 77^\circ\ 37{,}5'$
$B = 74^\circ\ 22'$	-	$\beta = 73^\circ\ 10{,}5'$
$C = 85^\circ\ 38'$	-	$\gamma = 82^\circ\ 21{,}5'$

§. 524.

Fortsetzung.

Nachdem die Dimensionen der Krystallreihe gefunden sind, ist es leicht, die noch unbekannten Gestalten aus den erforderlichen Beobachtungselementen zu bestimmen.

Es ist nämlich nach approximativen Messungen der Neigungswinkel

---

*) Es ist nämlich $\nu = 180^\circ - (\mu + \gamma) = 30^\circ\ 29{,}5'$.

**) Diese Dimensionen stimmen fast ganz mit den auf S. 257 in meinem Lehrbuche der Mineralogie; nur sind daselbst die Winkel in einer andern Folge mit A, B, C, α, β und γ bezeichnet. Die kleinen Differenzen in den numerischen Werthen rühren daher, dass ich beide Male nicht ganz von denselben Beobachtungselementen ausgegangen bin.

von $r : i = 139°$
- $r : s = 125°$
- $r : x = 139°\frac{1}{2}$

Man berechnet nun zuvörderst aus einem jeden dieser Winkel, aus dem bekannten Winkel A (welcher für i stumpf, für s und x spitz zu nehmen) so wie aus dem ebenen zwischengelegenen Winkel π (welcher $= 54°\ 26{,}5'$) die Werthe des Winkels μ für die drei Viertelpyramiden, sucht hierauf zu jedem Winkel μ den zugehörigen Winkel ν nach der Formel

$$180° = \mu + \nu + \gamma$$

und berechnet dann, mittels der Proportion

$$\sin\mu : \sin\nu = b : a$$

die Axenlängen a dieser Pyramiden; es ergeben sich auf diesem Wege die approximativen Resultate, dass

$$s = 2\breve{P}'2$$
$$x = 3\breve{P}'3$$
$$i = 2'\breve{P}2$$

und folglich auch, dass

$$w = 2'\breve{P},\infty$$
$$m = \infty\breve{P},2$$

Berechnet man rückwärts aus diesen Zeichen die Winkel, so findet man

Winkel μ für $s = 45°\ 40{,}25'$
- - - - $x = 33°\ \ 1{,}25'$
- - - - $i = 38°\ 45{,}75'$

ferner die Combinationskanten

$r : i = 138°\ 46'$ und $P : i = 117°\ 47'$
$r : s = 124°\ 58'$ - $P : s = 158°\ 29'$
$r : x = 139°\ 20'$ - $P : x = 144°\ \ 7'$

Endlich giebt die Beobachtung

$$r : q = 121°\tfrac{3}{4}$$

woraus auf ähnliche Weise berechnet wird, dass

$$q = {}'\breve{P},\infty$$

Berechnet man rückwärts aus diesem Zeichen, so

wie aus den Zeichen der Hemiprismen *v* und *w* ihre CK. zu *r* und *n*, so folgt:

$$r : q = 121° \; 41' \text{ und } n : q = 81° \; 41'$$
$$r : v = 135° \; 10' \quad - \quad n : v = 70° \; 38'$$
$$r : w = 139° \; 12' \quad - \quad n : w = 87° \; 24'$$

woraus sich ergiebt, dass die von mir mit *v* und *w* bezeichneten Flächen identisch mit den Flächen sind, welche Kupffer mit *u* und *s* bezeichnete; so wie seine Flächen *k* unsre Flächen *p* sind.

Anhang.

Darstellung der tesseralen Gestalten als tetragonaler und rhomboëdrischer Combinationen.

Die Gestalten des Tesseralsystemes lassen sich als tetragonale, rhomboëdrische oder rhombische Combinationen darstellen, wenn man eine ihrer Hauptaxen, ihrer trigonalen oder rhombischen Zwischenaxen als eminente Hauptaxe, und demgemäss das Oktaëder als eine tetragonale Pyramide P, das Hexaëder als ein Rhomboëder *R*, oder acht Flächen des Rhombendodekaëders als eine rhombische Pyramide P betrachtet. Da besonders die Deutung der tesseralen Gestalten als tetragonaler und rhomboëdrischer Combinationen einiges Interesse hat, nicht nur weil für sie bei unregelmässiger Ausbildung der Schein einer solchen Combination nicht selten sehr täuschend hervorgerufen wird, sondern auch, weil neuerdings wieder gewisse Ansichten über den Zusammenhang des tetragonalen und hexagonalen Systemes mit dem tesseralen Systeme geltend gemacht worden sind, so dürfte folgende allgemeine Auflösung des Problemes, die tesseralen Gestalten als tetragonale oder rhomboëdrische

Combinationen darzustellen, einen passenden Anhang zu den Lehren der reinen Krystallographie bilden.

Stellt man das Oktaëder nach einer seiner Hauptaxen aufrecht, und betrachtet diese als eine Axe von eminentem Werthe, so erhält das Oktaëder die Bedeutung einer tetragonalen Pyramide, für welche als Grundgestalt $a = 1$ ist.

Jedes Hexakisoktaëder mOn wird dann als eine Combination dreier ditetragonaler Pyramiden zu betrachten seyn, welche sich bestimmen, wie folgt:

a) die flachste Pyramide wird von den beiden achtzähligen Flächensystemen an den Polen der verticalen Axe gebildet; ihr Zeichen ist

$$\frac{1}{n}P\frac{m}{n}$$

b) die nächst spitzere Pyramide wird von den Nebenflächen der ersteren gebildet, und hat das Zeichen:

$$nPm$$

c) die dritte und spitzeste Pyramide endlich wird von den Nachbarflächen der ersteren Flächen gebildet, und behält das dem Hexakisoktaëder analoge Zeichen

$$mPn$$

Setzt man in diesen Zeichen statt m und n die ihnen für die übrigen tesseralen Gestalten zukommenden Werthe, so erhält man folgende Uebersicht der sieben Arten von holoëdrischen Gestalten des Tesseralsystemes als tetragonaler Combinationen:

Es ist

$$mOn = mPn.nPm.\frac{1}{n}P\frac{m}{n}$$

$$mOm = mPm.\frac{1}{m}P$$

$$mO = mP.Pm$$

$$\infty On = \infty Pn.nP\infty.\frac{1}{n}P\infty$$

Digitized by Google

$\infty O \ = \ \infty P.P\infty$
$\infty O\infty = \infty P\infty.0P$
$O \ = \ P$

Stellt man das Hexaëder nach einer seiner trigonalen Zwischenaxen aufrecht, so erscheint es als ein Rhomboëder mit der Polkante 90°. In derselben aufrechten Stellung erscheinen alle übrigen tesseralen Gestalten als Combinationen einer rhomboëdrischen Krystallreihe, für welche, wenn man sie auf das Hexaëder als Grundgestalt bezieht, $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$ wird.

Um die Zeichen dieser Combinationen, zunächst aber um das Zeichen derjenigen Combination zu finden, welche dem Hexakisoktaëder mOn entspricht, betrachte man diejenige trigonale Zwischenaxe, welche die Rolle der Hauptaxe spielt und in den Octanten der positiven Halbaxen der x, y und z fallen soll, als Axe der x', und zwei von den horizontalen rhombischen Zwischenaxen als Axen der y' und z', so stellen diese drei Axen der x', y' und z' in der That das dreizählige, calculative Axensystem einer hexagonalen Krystallreihe dar. Jedes Hexakisoktaëder mOn nun erscheint, auf dieses Axensystem bezogen, als eine vierzählige, aus vier Skalenoëdern, oder auch aus Skalenoëdern und hexagonalen Pyramiden bestehende rhomboëdrische Combination, deren Flächen sich gruppiren, wie folgt.

Das flachste Skalenoëder, Nr. I, wird von denjenigen 12 Flächen gebildet, welche an den Polen der verticalen Axe gelegen sind.

Das nächst spitzere Skalenoëder, Nr. II, wird von den ersten, das darauf folgende Skalenoëder, Nr. III, von den zweiten, und das letzte, spitzeste Skalenoëder, Nr. IV, von den dritten Nebenflächen der Flächen des Skalenoëders I gebildet (§. 35.).

Da die oberen Flächen des Skalenoëders I in den

Digitized by Google

Octanten der positiven Halbaxen der x, y und z fallen, so wird die Gleichung einer dieser Flächen:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$$

dann die Gleichung ihrer ersten Nebenfläche im Skalenoëder II:

$$-\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$$

ferner die Gleichung ihrer zweiten Nebenfläche im Skalenoëder III:

$$-\frac{x}{n} + \frac{y}{m} + z = 1$$

und endlich die Gleichung ihrer dritten Nebenfläche im Skalenoëder IV:

$$-\frac{x}{n} - \frac{y}{m} + z = 1$$

Es sind aber die Gleichungen
der Axe der x':

$$x - y = 0, \quad z - x = 0$$

der Axe der y':

$$y = 0, \quad z + x = 0$$

der Axe der z':

$$x = 0, \quad y + z = 0$$

Die Parameter der vorstehenden vier Flächen, wie sich solche in den Axen der x', y' und z' ergeben, bestimmen sich nun leicht durch Combination der Gleichungen jener Flächen mit denen dieser Axen; bezeichnen wir sie mit $p\sqrt{\frac{1}{2}}$, q und s, so wird

für die Gestalt I:

$$p : q : s = \frac{mn}{mn + m + n} : \frac{m}{m - 1} : \frac{n}{n - 1}$$

für die Gestalt II:

$$p : q : s = \frac{mn}{mn + m - n} : \frac{m}{m + 1} : \frac{n}{n - 1}$$

für die Gestalt III:

$$p : q : s = \frac{mn}{mn - m + n} : \frac{n}{n + 1} : \frac{m}{m - 1}$$

für die Gestalt IV:

$$p:q:s = \frac{mn}{mn-m-n} : \frac{n}{n+1} : \frac{m}{m+1}$$

Um nun aus diesen Verhältnissen auf die Ableitungszahlen zu gelangen, müssen wir, weil immer einer der beiden auf die Nebenaxen bezüglichen Parameter zufolge der Ableitung $= 1$ gefordert wird, mit der kleinsten der beiden Grössen q und s die beiden andern dividiren; es ist aber allgemein q die kleinere Grösse, weil immer $m > n$ vorausgesetzt wird, so lange die Gestalt noch wirklich ein Hexakisoktaëder ist. Wir erhalten daher folgende Ableitungszahlen m' und n':

Für die Gestalt I:

$$m' = \frac{(m-1)n}{mn+m+n},\ n' = \frac{(m-1)n}{(n-1)m}$$

Die Zahl n' ist $< = > 2$, je nachdem $n > = < \frac{2m}{m+1}$; im ersten Falle ist sie unmittelbar die gesuchte Ableitungszahl, und die Gestalt I ein Skalenoëder von gleicher Stellung mit R; im zweiten Falle ist die Gestalt die hexagonale Pyramide m'P2; im dritten Falle dagegen ein Skalenoëder von verwendeter Stellung, für welches statt n' die Grösse $\frac{n'}{n'-1}$ als Ableitungszahl einzuführen. Folglich wird die Gestalt I:

das Skalenoëder	$\frac{m'\text{P}n'}{2}$,	wenn $n > \frac{2m}{m+1}$
die hex. Pyramide	m'P2,	- $=$ - - -
das Skalenoëder	$-\frac{m'\text{P}\frac{n'}{n'-1}}{2}$,	- $<$ - - -

Für die Gestalt II:

$$m' = \frac{(m+1)n}{mn+m-n},\ n' = \frac{(m+1)n}{(n-1)m}$$

die Zahl n' ist $<=>2$, je nachdem $n>=<\frac{2m}{m-1}$, und im letzteren Falle mit $\frac{n'}{n'-1}$ zu vertauschen; folglich wird die Gestalt II:

das Skalenoëder $\frac{m\cdot Pn'}{2}$, wenn $n>\frac{2m}{m-1}$
die hex. Pyramide $m\cdot P2$, - - = - - -
das Skalenoëder $-\frac{m\cdot P\frac{n'}{n'-1}}{2}$, - - < - - -

Für die Gestalt III:

$$m'=\frac{(n+1)m}{mn-m+n},\ n'=\frac{(n+1)m}{(m-1)n}$$

die Zahl n' ist $<=>2$, je nachdem $n>=<\frac{m}{m-2}$, und im letzteren Falle mit $\frac{n'}{n'-1}$ zu vertauschen; folglich wird die Gestalt III:

das Skalenoëder $\frac{m\cdot Pn'}{2}$, wenn $n>\frac{m}{m-2}$
die hex. Pyramide $m\cdot P2$, - - = - - -
das Skalenoëder $-\frac{m\cdot P\frac{n'}{n'-1}}{2}$, - - < - - -

Für die Gestalt IV:

$$m'=\frac{(n+1)m}{mn-m-n},\ n'=\frac{(n+1)m}{(m+1)n}$$

die Zahl n' ist immer <2, und daher jedenfalls unmittelbar die gesuchte Ableitungszahl; allein die Zahl m' ist $+$, ∞ oder $-$, je nachdem $mn>=<m+n$; folglich wird die Gestalt IV:

das Skalenoëder $\frac{m\cdot Pn'}{2}$, wenn $mn>m+n$
das Prisma . . . . $\infty Pn'$, - - - = - - -
das Skalenoëder $-\frac{m\cdot Pn'}{2}$, - - - < - - -

In der Anwendung ist es meist vortheilhafter, statt der primitiven die secundären Zeichen der Skalenoëder einzuführen; die Verwandlung jener in diese ist sehr leicht zu bewerkstelligen, weil nach §. 304 allgemein:

$$\frac{mPn}{2} = \frac{m(2-n)}{n}R^{\frac{n}{2-n}}$$

Setzt man in den vorstehenden Resultaten $n = m$, so erhält man für die Ikositetraëder mOm als rhomboëdrische Combinationen folgende Resultate, in welchen die Skalenoëder schon auf ihre secundären Zeichen reducirt sind:

Jedes Ikositetraëder mOm stellt die Combination der beiden Rhomboëder

$$\frac{m-1}{m+2}R \text{ und } \frac{m+1}{m-2}R$$

mit dem Skalenoëder

$$\frac{m-3}{m}R^{\frac{m+1}{m-3}}$$

dar, welches letztere jedoch für $m = 3$ in die hexagonale Pyramide $\frac{4}{3}P2$ übergeht; für $m < 3$ befindet sich das Skalenoëder, und für $m < 2$ das spitzere Rhomboëder in verwendeter Stellung zu R.

Setzt man in den Resultaten für mOn, $n = 1$, so erhält man für die Triakisoktaëder mO folgende Bestimmungen:

Jedes mO stellt die Combination der beiden Rhomboëder

$$-\frac{m-1}{2m+1}R \text{ und } -\frac{m+1}{2m-1}R$$

mit dem Skalenoëder

$$-2R^m$$

dar.

Setzt man dagegen in den Resultaten für mOn $m = \infty$, so ergeben sich für die Tetrakishexaëder ∞On folgende Bestimmungen:

Digitized by Google

Jedes ∞On stellt die Combinationen des Skalenoëders

$$\frac{n-2}{n+1}R^{\frac{n}{n-2}}$$

mit dem Skalenoëder

$$R^{\frac{n+1}{n-1}}$$

dar; das erstere Skalenoëder verwandelt sich jedoch für $n=2$ in die hexagonale Pyramide $\frac{2}{3}P2$, und befindet sich in verwendeter Stellung zu R, wenn $n<2$ ist.

Das Rhombendodekaëder stellt die Combination $-\frac{1}{2}R.\infty P2$, und endlich das Oktaëder die Combination $0R.-2R$ dar.

Zum Schlusse mag noch nachstehende Uebersicht der bekanntesten Gestalten des Tesseralsystemes in ihrer Deutung als rhomboëdrischer Combinationen folgen.

Wenn das nach einer trigonalen Zwischenaxe aufrecht gestellte Hexaëder $\infty O\infty = R$ gesetzt wird, so ist:

$$3O\tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{3}P2.-\tfrac{1}{2}R^2.-\tfrac{1}{2}R^5.\infty P\tfrac{5}{4}.$$
$$4O2 = \tfrac{1}{7}R^3.-\tfrac{1}{5}R^5.2P2.4R^{\frac{3}{2}}.$$
$$5O\tfrac{5}{3} = \tfrac{4}{9}P2.-\tfrac{2}{7}R^3.\tfrac{8}{3}P2.4R^2.$$

$$\tfrac{3}{2}O\tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{7}R.-R^{\frac{5}{3}}.-5R.$$
$$2O2 = \tfrac{1}{4}R.-\tfrac{1}{2}R^3.\infty R.$$
$$3O3 = \tfrac{2}{5}R.\tfrac{4}{3}P2.4R.$$
$$6O6 = \tfrac{5}{8}R.\tfrac{1}{2}R^{\frac{7}{3}}.\tfrac{7}{4}R.$$

$$\tfrac{3}{2}O = -\tfrac{1}{8}R.-\tfrac{5}{4}R.-2R^{\frac{3}{2}}.$$
$$2O = -\tfrac{1}{5}R.-R.-2R^2.$$

$$\infty O\tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{5}R^3.R^5.$$
$$\infty O2 = \tfrac{2}{3}P2.R^3.$$
$$\infty O3 = \tfrac{1}{4}R^3.R^2.$$

$$\infty O = -\tfrac{1}{2}R.\infty P2.$$

$$O = 0R.-2R.$$

Zweiter Theil,

Angewandte Krystallographie.

Die reine Krystallographie setzt insofern eine ideale Regelmässigkeit der Krystallformen voraus, inwiefern sie durchgängig die beiden Postulate der absolut gleichen Centraldistanz gleichwerthiger Flächen und der absoluten Ebenheit aller Flächen überhaupt geltend macht, weil eine Darstellung der wahren Gesetzmässigkeit der Krystallformen nur dann möglich ist, wenn man dabei von allen Perturbationen und Hemmungen der Krystallbildung abstrahirt, durch welche jenen beiden Postulaten in der Wirklichkeit derogirt wird. Die Beobachtung hat mit Hülfe der Geometrie der Natur gleichsam die Ideale abgelauscht, auf deren Realisirung sie im Krystallisationsprocesse hinarbeitet, und die reine Krystallographie giebt die Resultate dieser Beobachtung unter der Voraussetzung der höchsten geometrischen Vollendung, welcher die Producte jenes Processes ihrer Idee nach fähig sind, ohne sie vielleicht jemals zu erreichen.

Weil nämlich der Krystallisationsprocess in der Wirklichkeit vielfältigen Störungen unterworfen ist, so entfernen sich die Krystallformen sowohl hinsichtlich ihrer allgemeinen Configuration, als auch hinsichtlich der Beschaffenheit ihrer Flächen gar sehr von jener idealen Regelmässigkeit; weshalb denn die

Digitized by Google

angewandte Krystallographie zuvörderst von den Unvollkommenheiten in der Ausbildung der einzelen Krystallformen zu handeln hat.

In der reinen Krystallographie waren es ferner nur immer die Formen einzeler Individuen, welche den Gegenstand der Betrachtung bilden, während doch bereits in der Einleitung die Aggregation der Individuen als ein herrschendes Naturgesetz der anorganischen Welt bezeichnet worden ist, kraft dessen die meisten Krystalle nicht isolirt, sondern in verschiedenen, mehr oder weniger gesetzmässigen Aggregationsformen auftreten. Die angewandte Krystallographie hat daher wenigstens von denjenigen Aggregationsformen der Individuen Rechenschaft zu geben, welche mit mathematischer Gesetzmässigkeit Statt finden, und unter den Namen der Zwillingskrystalle, Drillingskrystalle u. s. w. bekannt sind.

So entstehen uns also in den Lehren von den Unvollkommenheiten der Krystallformen und von den Zwillingskrystallen zwei sehr wichtige Abschnitte der angewandten Krystallographie, welche gewissermaassen den physikalischen Theil derselben ausmachen.

Ein zweiter, nicht minder wichtiger Theil derselben ist derjenige, welcher die zur wissenschaftlichen Erforschung der Krystallformen und die zur Erleichterung ihres Studiums unentbehrlichen Hülfsmittel zum Gegenstande hat, und daher auch als der technische Theil der angewandten Krystallographie bezeichnet werden kann. Zu diesen Hülfsmitteln gehören einerseits Messungen der Kantenwinkel, welche für die wahre Kenntniss der Krystallformen unentbehrlich sind, weil nur durch sie die zur Berechnung erforderlichen Elemente mit hinreichender Genauigkeit gewonnen werden können; anderseits Zeichnungen und Modelle der Krystall-

Digitized by Google

formen, welche zur Erleichterung und Förderung des krystallographischen Studiums überhaupt, so wie zur Verbreitung und Sicherung unserer bereits gewonnenen Kenntnisse der Krystallformen ausserordentlich viel beitragen.

Hiernach zerfällt die angewandte Krystallographie überhaupt in folgende fünf Abschnitte:

1) Von den Unvollkommenheiten der Krystallformen.
2) Von den Zwillingskrystallen.
3) Von der Messung der Krystalle.
4) Von der Zeichnung der Krystallformen.
5) Von der Modellirung der Krystallformen.

Erster Abschnitt.

Von den Unvollkommenheiten der Krystallformen.

§. 525.

Verschiedene Arten der Unvollkommenheiten.

Die Betrachtungen der reinen Krystallographie beruhen auf einigen Voraussetzungen, welchen, wie nothwendig sie auch seyn mögen, in der Wirklichkeit doch nur selten, ja zum Theil vielleicht niemals vollkommen entsprochenwird. Diese Voraussetzungen waren besonders folgende:

1) Ebenheit der Krystallflächen;
2) Congruenz aller Flächen einer und derselben Gestalt oder Theilgestalt;
3) Ringsum vollendete Ausbildung der Krystallform.

Was nun zuvörderst die ebene Beschaffenheit der Flächen betrifft, so ist anzunehmen, dass die Natur zwar in einer jeden Krystallfläche auf die Darstellung einer ebenen Fläche hinarbeite, wie dies besonders

aus dem so höchst eminenten Charakter der den Spaltungsflächen entsprechenden Minima der Cohärenz hervorzugehen scheint; dass jedoch diese plastische Tendenz theils durch periodische Intermittenzen des Krystallisationsprocesses, theils durch störende Einwirkungen der die krystallisirende Substanz umgebenden Matrix oder Flüssigkeit auf vielfältige Weise modificirt und gehemmt werden müsse. Wiewohl also die Krystallflächen ihrer Idee nach als ebene Flächen zu betrachten sind, so dürfen wir doch nicht erwarten, sie in der Natur jedenfalls als solche ausgeprägt zu finden, noch uns wundern, wenn wir Krystallflächen treffen, welche sich von jener idealen Regelmässigkeit der Ausdehnung auf eine oder andere Art entfernen.

Aber auch die allgemeine Configuration der Krystallformen ist keinesweges so regelmässig, wie solche in der reinen Krystallographie angenommen werden musste. So haben die gleichwerthigen Flächen einer und derselben Gestalt oder Theilgestalt nicht immer absolut gleiche Centraldistanzen, folglich auch nicht immer die für sie in §. 46 geforderte Gleichheit und Aehnlichkeit, weil sie bei ungleicher Centraldistanz wie ihrer Ausdehnung nach ungleich, so ihrer Figur nach unähnlich werden müssen.

Ausser dieser Abnormität treten noch viele andere Umstände ein, welche theilweise Verunstaltung oder gänzliche Verstümmelung der Krystallformen herbeiführen, so dass man ohne Uebertreibung behaupten kann, dass es wohl keinen Krystall gebe, welcher genau in derjenigen Regelmässigkeit ausgebildet sey, wie solche in der reinen Krystallographie vorausgesetzt wurde. Um so nothwendiger wird es aber auch, die verschiedenen Abnormitäten in der Ausbildung der Krystallformen kennen zu lernen, weil man nur durch ihre sorgfältige Berücksichtigung vielen Fehl-

Digitized by Google

schlüssen bei der Beurtheilung der Krystalle entgehen kann.

Erstes Capitel.

Von den Unvollkommenheiten der Krystallflächen.

§. 526.

Oscillatorische Combination.

Vollkommene Krystallflächen sind solche, welche nicht nur in ihrer allgemeinen Ausdehnung, sondern auch in der Beschaffenheit ihrer Oberfläche dem Gesetze der Ebene entsprechen, daher nicht nur eben, sondern auch glatt sind, und das Licht nach dem Gesetze der Planspiegel vollkommen reflectiren.

Unvollkommene Krystallflächen dagegen sind solche, welche entweder im Allgemeinen uneben, gekrümmt und gebogen, oder in ihrer Ausdehnung unterbrochen, zerfressen, gehackt, löcherig, oder mit partiellen Unebenheiten, mit abwechselnden Erhöhungen und Vertiefungen besetzt, also gereift, drusig, rauh sind.

Die wichtigste von diesen Abnormitäten ist die Reifung und Streifung der Krystallflächen. Um dieses Verhältniss gleich anfangs vom richtigen Gesichtspuncte aufzufassen, müssen wir den Begriff der oscillatorischen Combination zu Hülfe nehmen. Wenn nämlich die Flächen zweier verschiedener Gestalten zu einer Combination verbunden sind, so findet diese Combination entweder stetig oder unterbrochen Statt, d. h. entweder treten die Flächen der Gestalt *B* in stetiger, ununterbrochener Ausdehnung zwischen den gleichfalls stetig ausgedehnten Flächen der Gestalt *A* auf, oder es erschei-

Digitized by Google

nen nur schmale Streifen der Flächen von *B* abwechselnd zwischen schmalen Streifen der Flächen von *A*; in welchem letzteren Falle die Längendimension der Streifen unmittelbar durch die Lage der Combinationskante beider Flächen bestimmt wird. Die so häufige Combination P.∞P des Quarzes mag als ein in dieser Hinsicht besonders lehrreiches Beispiel dienen. Es giebt Varietäten dieser Combination (z. B. die bekannte von Compostella), in welchen die Flächen der Pyramide P vollständig und ungetheilt an beiden Enden des Prismas ∞P eine sechsflächige Zuspitzung bilden, ohne dass längs des Prismas Andeutungen der Pyramidenflächen wahrzunehmen wären. Häufiger jedoch trifft man Varietäten, in welchen sich bereits auf den Flächen des Prismas schmale Streifen der Pyramidenflächen, gleichsam wie Rudimente oder Vorboten der endlich eintretenden Zuspitzung vorfinden, Fig. 538 und 539. Diese Streifen der Pyramidenflächen wechseln stufenartig mit Streifen der Prismaflächen, so dass eine oscillatorische Combination der beiderlei Flächenelemente zum Vorscheine kommt, gleichsam als hätten die auf die Bildung der Flächen von ∞P und P gerichteten Kräfte abwechselnd die eine über die andere das Uebergewicht erhalten, bis endlich die letztere den Sieg davon getragen.

§. 527.

Reifung und Streifung der Flächen.

Dass nun diese oscillatorische Combination, wenn solche in kleinem Maassstabe Statt findet, d. h. wenn die abwechselnden Flächenelemente eine sehr geringe Breite haben, die Erscheinung der Flächenreifung und Flächenstreifung zur Folge haben müsse, ist einleuchtend. So lange nämlich die Flächenelemente eine mit dem blossen Auge sehr leicht erkennbare Breite haben, werden sie eine stufenartige Abwechselung

von Furchen und Leisten darstellen, welche sich mit dem Namen der Flächenreifung bezeichnen, und von jedem Beobachter als das Resultat einer oscillatorischen Combination erkennen lässt. So findet sich unter andern diese Reifung sehr ausgezeichnet auf den prismatischen Flächen vieler Quarzkrystalle, wo sie durch Combination von ∞P und P, auf den Seitenflächen der Säulen des Turmalines, wo sie durch Combination von $\infty P2$ und ∞R, auf den Flächen der Hexaëder des Eisenkieses, wo sie durch Combination von $\infty O\infty$ und $\frac{\infty O2}{2}$ hervorgebracht wird.

Wenn aber die abwechselnden Flächenelemente sehr schmal werden, so dass das blosse Auge die einzelen nicht mehr als solche zu erkennen vermag, so wird sich natürlich dasselbe Verhältniss, welches vorher als eine mehr oder weniger grobe Reifung erschien, nur noch als eine mehr oder weniger feine Streifung der Krystallflächen zu erkennen geben. Die Flächenstreifung ist also jedenfalls nur das Phänomen einer in sehr kleinem Maassstabe ausgebildeten oscillatorischen Combination der Flächen zweier verschiedener Gestalten; weshalb denn auch die Streifen selbst der Combinationskante beider Flächen parallel laufen.

Anmerkung. Bisweilen findet die Reifung in der Art Statt, dass die Flächenelemente nicht zweier verschiedener, sondern einer und derselben Gestalt mit einander in oscillatorischer Combination verbunden sind, wie z. B. die Elemente der Flächen des Oktaëders in Fig. 540, welche in ihrer treppenartigen Verbindung die Flächen des Rhombendodekaëders darstellen.

§. 528.

Einfache Streifung.

Nach der Zahl der einzelen Systeme von paral-

lelen Streifen, die sich auf einer Fläche wahrnehmen lassen, unterscheidet man einfache, federartige, trianguläre Streifung u. s. w.

Die Streifung heisst einfach, wenn nur ein System von parallelen Streifen vorhanden ist. Sie kommt besonders häufig in den einaxigen Krystallsystemen vor, wenn zwei oder mehre, zu derselben Axe gehörige Prismen oder Hemiprismen, oder auch ein Prisma und eines der Flächenpaare mit einander in Combination treten. Auf diese Weise entstehen die verticalen Streifen an den bereits erwähnten Säulen des Turmalines so wie an den gleichfalls säulenförmigen Krystallen des Berylles, Topases, Gypses, Diopsides, Lievrites, Graumanganerzes, Apatites, Wolframs u. a. Mineralien, die horizontalen Streifen an den Krystallen des Bleicarbonates, der Kupferlasur, des Epidotes, Miargyrites. Aber auch Pyramidenflächen erscheinen häufig theils durch Flächen andrer Pyramiden, theils durch Flächen von Prismen oder durch die den Hauptschnitten entsprechenden Flächenpaare einfach gestreift; so z. B. die Pyramiden des Anatases, Uranites, die Hemipyramiden des Glauberites, Gypses, Diopsides, der rothen Arsenikblende, des Miargyrites u. a.

Die Flächen der Rhomboëder sind oft ihren geneigten Diagonalen parallel gestreift, wie z. B. besonders häufig das Rhomboëder $-\frac{1}{2}R$ des Kalkspathes. Eben so häufig zeigen die Flächen der Skalenoëder eine ihren Mittelkanten oder ihren Polkanten parallele Streifung; besonders am Kalkspathe und der rhomboëdrischen Silberblende ist die erstere Streifung an den Skalenoëdern von der Form R^n (die Gränzgestalt R^∞ oder $\infty P2$ nicht ausgenommen), die zweite Streifung an den Skalenoëdern von der Form $\frac{2}{3n-1}R^n$

und $\frac{2}{3n+1}R^n$ fast immer zu finden, indem die Streifen den Mittel- oder Polkanten der Grundgestalt parallel laufen.

Einige der merkwürdigsten Beispiele einfacher Streifung aus dem Tesseralsysteme sind folgende:

1) Die Streifung der Flächen von ∞O; ist sie parallel der Brachydiagonale, so deutet sie auf die Combination von ∞On oder $\infty O\infty$; ist sie dagegen parallel der Makrodiagonale, so deutet sie auf die Flächen von mO oder O.

2) Die Streifung der Flächen von mOm parallel ihren symmetrischen Diagonalen; sie deutet theils auf ∞O, theils auf $m'O$ oder $m'On'$; so rührt z. B. diese Streifung an dem Ikositetraëder 2O2 des Granates von den Flächen ∞O oder $3O\frac{3}{2}$, an dem Ikositetraëder 3O3 des Bleiglanzes von den Flächen eines Hexakisoktaëders von der Form $mO\frac{3m}{2m-3}$ her.

3) Die Streifung der Flächen von $\infty O\infty$ am hexaëdrischen Eisenkiese, welche auf je zwei Gegenflächen nach einer andern Richtung Statt findet, so dass die Streifen je zweier Nebenflächen auf einander rechtwinklig sind, und die Richtung der verschiedenen Streifensysteme überhaupt der Lage der charakteristischen Kanten der Pentagondodekaëder entspricht; Fig. 541. Die Ursache dieser Streifung, welche nicht selten in eine grobe Reifung übergeht, ist sehr deutlich in der oscillatorischen Combination des Pentagondodekaëders $\frac{\infty O2}{2}$ zu erkennen.

3) Die Streifung der Flächen des Pentagondodekaëders $\frac{\infty O2}{2}$ parallel ihren Höhenlinien, und der

Flächen des Dyakisdodekaëders $\left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right]$ parallel ihren gleichschenkligen Diagonalen, von welchen jene durch Combination von $\left[\frac{4O2}{2}\right]$, diese durch Combination von O oder $\frac{\infty O2}{2}$ veranlasst wird.

5) Die Streifungen der Triakisoktaëder parallel den Oktaëderkanten, der Tetrakishexaëder parallel den Hexaëderkanten, der Trigondodekaëder parallel den Tetraëderkanten.

§. 529.

Mehrfache Streifung.

Die Streifung heisst federartig, wenn auf einer und derselben Fläche zwei verschiedene Systeme von parallelen Streifen erscheinen, die sich jedoch nicht durchkreuzen, sondern in einer Linie auf ähnliche Art zusammenstossen, wie die beiden Flügel eines Federbartes am Kiele der Feder. Sie deutet auf die gleichzeitige oscillatorische Combination zweier Flächen einer andern Gestalt, und ist z. B. an den Rhomboëdern des Chabasites und der Silberblende zu beobachten, deren Flächen ihren Polkanten parallel gestreift sind, wie in Fig. 542.

Trigonale Streifung findet sich sehr ausgezeichnet auf der basischen Fläche mehrer rhomboëdrischer Krystalle, zumal bei dünn tafelartiger Ausbildung, wie z. B. auf den Tafeln des Eisenglanzes und Polybasites; auch ist sie auf den Flächen der Tetraëder und Oktaëder zu beobachten.

Rhombische Streifung kommt bisweilen im rhombischen Systeme auf den Flächen 0P, $\infty\breve{P}\infty$ oder $\infty\bar{P}\infty$ vor, und ist aus der oscillatorischen Combination von Pyramidenflächen zu erklären. Eines der bekanntesten Beispiele bietet der Harmotom dar, des-

Digitized by Google

sen Flächen $\infty\bar{P}\infty$ durch Combination mit P oder mPm gewöhnlich rhombisch gestreift erscheinen; die Streifen durchkreuzen sich nicht, sondern umschliessen meist in der Mitte der Fläche einen kleinen glatten Rhombus; Fig. 543.

Quadratische Streifung findet sich bisweilen auf den basischen Flächen tetragonaler Combinationen, so wie auf den Flächen des Hexaëders parallel ihren Kanten oder Diagonalen. Diese letztere Art der quadratischen Streifung kommt zumal an den Hexaëdern des Bleiglanzes, jedoch so vor, dass meist nur in der Mitte jeder Hexaëderfläche ein abgesondertes Feld gestreift ist; sie ist in diesem Falle aus der oscillatorischen Combination eines Ikositetraëders zu erklären; Fig. 544.

§. 530.

Vortheile der Streifung.

Die Streifung der Flächen ist in mehrfacher Hinsicht eine sehr wichtige und dem Krystallographen nicht unwillkommene Erscheinung, wenn sie gleich in andrer Hinsicht seinen Forschungen störend entgegentritt.

Es ist nämlich ein fast durchgängig bestätigtes Gesetz, dass die Streifung, wenn sie einmal vorhanden, auf allen Flächen derselben Gestalt oder Theilgestalt zugleich und in gleicher Weise Statt findet. Dadurch wird sie in der That ein Merkmal, an welchem man in vielen Fällen die zusammengehörigen oder gleichwerthigen Flächen erkennen kann, und folglich ein wichtiges Hülfsmittel für die Orientirung der Combinationen.

Da sich ferner in jeder Streifung die Tendenz zur Ausbildung irgend einer Gestalt offenbart, deren Flächen mit den Flächen der gestreiften Gestalt in Combinationskanten zusammentreffen, welche den

Digitized by Google

Streifen parallel sind, so lässt sich aus jeder Streifung auf das Vorhandenseyn einer Gestalt schliessen, welche, wenn sie auch noch an keiner Varietät der Krystallreihe in stetiger Flächenausdehnung beobachtet seyn sollte, dennoch als ein Glied dieser Krystallreihe betrachtet werden muss. Die Streifung kann daher in vielen Fällen dazu dienen, unsre Kenntniss von den Gestalten einer Krystallreihe zu vervollständigen und zu bereichern, weil sie uns jedenfalls wenigstens ein Element zur Bestimmung derjenigen Gestalt an die Hand giebt, durch deren oscillatorische Combination sie selbst hervorgerufen wurde.

Endlich leistet die Streifung in manchen Fällen grosse Dienste bei der Entscheidung, ob man es mit einfachen oder mit Zwillingskrystallen zu thun hat, indem sich nicht selten an den Linien oder Näthen, in welchen zwei Systeme von Streifen zusammenstossen, die Demarcationslinien der zu einem Zwilling verbundenen Individuen erkennen lassen, wie dies z. B. an den Zwillingen des Kalkscheelats, des Wolframs, des rhombischen Eisenkieses u. a. Mineralien der Fall ist.

§. 531.

Nachtheile der Streifung.

Auf der andern Seite ist nicht zu läugnen, dass die Streifung auch einige störende Verhältnisse zur Folge hat. Denn nicht nur, dass sie die Messungen der Krystalle unsicher macht, veranlasst sie auch häufig bedeutende Abnormitäten in der Flächenausbildung, zu welchen wir vorzüglich die scheinbare Flächenkrümmung und die Entstehung scheinbar selbständiger Krystallflächen zu rechnen haben.

Es ist nämlich einleuchtend, dass die treppenartige Combination von schmalen Flächenelementen, wie

solche in der Streifung vorhanden ist, in ihrem allgemeinen Verlaufe nur dann mit einer der Flächen übereinstimmen wird, wenn sich die eingeschalteten Flächenstreifen der einen Gestalt von beiden Seiten her in entgegengesetzter Lage, aber mit gleicher Breite zwischen die Flächenstreifen der andern Gestalt einsetzen, wie dies z. B. in Fig. 538 Statt findet, wo der Verlauf der oscillatorischen Combination mit der Lage der Flächen von ∞P übereinstimmt. In allen übrigen Fällen wird dieser allgemeine Verlauf entweder einer ebenen oder einer krummen Fläche entsprechen, je nachdem die abwechselnden Flächenstreifen eine durchgängig constante oder eine variable Breite besitzen. Es können daher im ersteren Falle, zumal wenn die Streifung in sehr kleinem Maassstabe Statt findet, scheinbar selbständige Flächen zum Vorscheine kommen, wie z. B. in Fig. 539, wo das System der combinirten Flächenelemente in seinem Verlaufe die Fläche einer spitzen hexagonalen Pyramide darstellt, weil die Flächenelemente von ∞P einerseits, und die Flächenelemente von P anderseits jede in ihrer Art eine constante Breite haben. Wenn dagegen die beiderlei combinirten Flächenelemente, oder auch nur die eine Art derselben eine variable Breite besitzen, so wird sich der Verlauf des ganzen Systemes nothwendig krummflächig, und zwar nach dem Gesetze einer Cylinderfläche ausbilden, deren Krümmungslinie die Streifen rechtwinklig durchschneidet. Je regelmässiger das Gesetz der Ab- oder Zunahme der Breite der Flächenelemente, um so regelmässiger wird auch der krummflächige Verlauf der oscillatorischen Combination werden, und so sind z. B. die schilfartigen Säulen des Tremolithes, die fast cylindrischen Säulen des Berylles, die dreiseitig cylindrischen (aus drei Cylindersegmenten bestehenden) Säulen des Turmali-

Digitized by Google

nes und viele andere, scheinbar krummflächige Krystallformen zu erklären.

§. 532.

Drusige Flächen.

Eine in gewisser Hinsicht mit der Streifung verwandte Erscheinung ist die Drusigkeit der Krystallflächen. Wenn nämlich über die Flächen einer Gestalt sehr kleine Ecke einer andern Gestalt dicht an einander gedrängt hervorragen, so sagt man, die Fläche sey drusig, wie sie denn auch in der That eine Druse *en miniature* von Krystallrudimenten der zweiten Gestalt darstellt. So erscheinen oft die Oktaëder des Flussspathes sehr regelmässig drusig durch die trigonalen Ecke des Hexaëders oder Rhombendodekaëders, und behaupten diese drusige Oberfläche auch in ihren Combinationen mit andern Gestalten; wie z. B. in den Combinationen $\infty O\infty.O$ oder $\infty O.O$ die Flächen des Hexaëders und Rhombendodekaëders nicht selten glatt, die Flächen des Oktaëders aber drusig sind. Doch erscheinen auch die Flächen des Rhombendodekaëders so wie jene des Tetrakishexaëders an manchen Krystallen des Flussspathes drusig; indess pflegt dann das Verhältniss in sehr kleinem Maassstabe Statt zu finden, so dass die Flächen mehr rauh als drusig aussehen. Ist nämlich die Drusigkeit so fein, dass man die einzelen Krystallecken nicht mehr gut unterscheiden kann, so nennt man die Fläche rauh.

Am Kalkspathe erscheint zumal die basische Fläche $0R$ sehr oft schuppig-drusig durch die Polecke sehr flacher Rhomboëder; es giebt aber auch Krystalle, deren ganze Oberfläche grobdrusig ist (wie z B. die rauchgrauen von Kamsdorf), wenn nicht in diesem Falle das scheinbare Individuum als ein wirkliches Aggregat vieler kleiner Individuen zu deuten

ist; wie durch dergleichen Zusammensetzungen z. B. die sehr stark drusigen Endflächen in den Prismen des Manganerzes entstehen, und überhaupt in allen polysynthetischen Individuen die Bedingungen zur Entstehung drusiger Flächen vorhanden sind *).

Anmerkung. Es versteht sich, dass die Drusigkeit der Krystallflächen nicht mit den drusigen Ueberzügen und Anflügen fremdartiger Substanzen zu verwechseln ist, dergleichen oft die Oberfläche eines Krystalles sehr regelmässig umhüllen. Die kleinen Krystallecken einer drusigen Fläche gehören derselben Substanz an wie der ganze Krystall.

§. 533.

Zerfressene, durchlöcherte, eingedrückte Krystallflächen.

Ausser der Streifung und Drusigkeit giebt es noch andre Abnormitäten, durch welche die stetige Ausdehnung der Krystallflächen unterbrochen wird. So sind manche Flächen von kleinen Poren und Aushöhlungen erfüllt, die ihnen das Ansehen geben, als wären sie durch Einwirkung eines chemischen Reagens zerfressen worden. Bisweilen werden diese Aushöhlungen so gross, dass die Fläche wie durchlöchert, und der Krystall selbst wie ausgehöhlt erscheint. Aehnliche Vertiefungen rühren nicht selten von Krystallen andrer Substanzen her, welche von der Masse des durchlöcherten Krystalles ursprünglich umschlossen, durch die Einwirkung eines später hinzutretenden Zerstörungsmittels aber vernichtet wurden, und daher

---

*) Es ist in der That oft sehr schwierig, wo nicht ganz unmöglich, die Gränze zwischen Individuum und Aggregat anzugeben, sobald sich die aggregirten Individuen in paralleler Stellung befinden. Eine ähnliche Unbestimmtheit kommt auch auf den tieferen Stufen der Thier- und Pflanzenwelt vor, wo die Individuen oft so verschmolzen sind, dass man sie kaum in der Vorstellung zu isoliren weiss.

Digitized by Google

Eindrücke ihrer eigenen Form als Monumente ihres ehemaligen Daseyns in der Oberfläche des sie umschliessenden Trägers zurückliessen. So sind zumal die gehackten und eingeschnittenen Flächen zu deuten, durch welche sich manche Quarzkrystalle auf eine so auffallende Art auszeichnen.

§. 534.

Krümmung der Flächen.

Ausser der in §. 531 erwähnten scheinbaren Flächenkrümmung, welche nur den krummlinigen Verlauf der oscillatorischen Combination bezeichnet, kommt zuweilen eine Krümmung der Flächen vor, welche weit vollkommener, und wenigstens nicht aus einer Combination von ebenen Flächenelementen zu erklären ist. So sind besonders die sehr polyëdrischen Krystallformen des Diamantes, wie z. B. die Hexakisoktaëder, Hexakistetraëder, Triakisoktaëder, auch die Rhombendodekaëder desselben, fast immer dermaassen krummflächig, dass in ihnen, zumal aber in den Hexakisoktaëdern eine auffallende Annäherung an die Kugelform Statt findet; Fig. 545, 546 und 547. Eben so bekannt sind die sattelförmig gebogenen Rhomboëder des Braunspathes und Eisenspathes, deren Extrem nach Mohs in Fig. 548 dargestellt ist. Auch erscheint der Rautenspath zuweilen in kuglig aufgeblähten Rhomboëdern.

Die linsenförmigen und kegelförmigen Gestalten des Gypses, die S-förmig gebogenen Flächen des Prismas ∞P am rhombischen Eisenkies, Fig. 549, die kegelförmigen Krystalle der braunen Zinkblende, die convexen Hexaëder des Kobaltkieses, der krummflächige Uebergang, welcher oft am Kalkspathe zwischen den Flächen der Rhomboëder und des Prismas ∞R Statt findet, Fig. 550, und zahllose ähnliche Erscheinungen beweisen die Möglichkeit einer mehr oder

Digitized by Google

weniger vollkommenen krummflächigen Begränzung der Krystallformen, welche nicht aus einer oscillatorischen Combination zu erklären ist.

Auch gehören hierher die partiellen Zurundungen der Kanten und Ecke, welche besonders in Combinationen da vorzukommen pflegen, wo die Flächen mehrer untergeordneter Gestalten unter sehr stumpfen Winkeln zusammenstossen, und gleichsam in eine einzige, oft sehr lebhaft glänzende krumme Fläche verfliessen; eine Erscheinung, welche sich an den Combinationen des Gypses, Kalkspathes, Barytes, Eisenkieses u. a. Mineralien gar nicht selten findet.

§. 535.

Fortsetzung.

Wiewohl in einigen der vorerwähnten krummflächigen Gestalten, besonders aber in den sphäroidischen Formen des Diamantes und den sattelförmig gebogenen Linsen des Braunspathes eine so stetige und gesetzmässige Krümmung Statt zu finden scheint, dass man zu ihrer Erklärung eher einen auf krumme Flächenbildung gerichteten Plasticismus, als eine Zusammensetzung von ebenen Flächenelementen anzunehmen berechtigt ist, so würde sich doch für andre jener krummflächigen Formen eine dergleichen Erklärungsart versuchen lassen. Besonders dürfte dies mit den (nicht sattelförmig) gebogenen Rhomboëdern des Eisenspathes und Braunspathes der Fall seyn, welche oft sichtlich aus vielen, unter sehr stumpfen Winkeln zusammenstossenden kleinen Rhomboëdern zusammengesetzt sind. Es giebt grössere Rhomboëder der Art, welche schon eine recht deutliche Anlage zu doppelter Zusammensetzung aus krummschaligen und stänglichen Elementen verrathen, wie solches in Fig. 552 angedeutet ist, indem man auf dem Querbruche der grösseren Rhomboëder nicht nur die

Digitized by Google

der ersteren Zusammensetzung entsprechenden krummlinigen Streifen *aa*, *bb*, *cc*, sondern auch die der zweiten Zusammensetzung entsprechenden radialen Streifen *abc*, zu unterscheiden vermag. Hier scheint sich also schon ein Uebergang in die so ausgezeichnet sphäroidischen Aggregate des Sphärosiderites vorzubereiten; aber immer bleibt es in diesen und ähnlichen Fällen unerklärlich, durch welchen Umstand je zwei neben einander liegende Elementarindividuen eines solchen polysynthetischen Krystalles aus der parallelen Stellung verrückt worden sind; ein Umstand, der stetig und nach einem sehr bestimmten Gesetze gewirkt haben muss.

Aehnliche Erscheinungen finden sich an vielen andern Mineralspecies, welche gleichfalls durch innige Aggregation vieler Individuen sehr glatte und regelmässig krummflächige Formen liefern; so unter andern besonders ausgezeichnet der Prehnit, das Strahlerz, der Desmin.

§. 536.

Krümmung der Prismen.

Häufig findet sich die Krümmung der Flächen auf eine eigenthümliche, und die ganze Gestalt verzerrende Weise an den prismatischen Gestalten der einaxigen Krystallsysteme verwirklicht, zumal, wenn diese Gestalten sehr lang säulenförmig ausgebildet sind. Die langgestreckten Prismen des Aktinotes, Tremolithes, Antimonglanzes, Turmalines, mehrer Zeolithe, u. a. M. erscheinen, wenn sie einzeln eingewachsen, besonders aber wenn sie strahlig zusammengesetzt sind, einfach oder wellenförmig gebogen, ja selbst knieförmig gekrümmt. Seltener findet sich dieselbe Erscheinung an den weniger lang gestreckten Säulen des Quarzes, Kalkspathes u. a. Substanzen. Doch giebt es Quarzkrystalle aus Graubündten

Digitized by Google

von sehr bizarrer Krümmung, wie z. B. Fig. 553, auch sieht man zuweilen gebogene Kalkspathprismen, an welchen die Krümmung theils nach der Hauptaxe, theils nach einer Nebenaxe Statt findet, wie in Fig. 551, in welchem letzteren Falle die Erscheinung mit einer Verlängerung des Krystalles nach derselben Nebenaxe verbunden ist.

§. 537.

Geflossene und verdrückte Krystallflächen.

Eine ganz regellose Perturbation der Flächenbildung, welche zu den Monstrositäten im eigentlichen Sinne zu rechnen seyn dürfte, ist diejenige Krümmung, die zuweilen an aufgewachsen gebildeten Krystallen vorkommt, und unter dem Namen des Geflossenen bekannt ist, weil dergleichen Krystalle in der That gerade so aussehen, als hätten ihre Theile in Folge einer angehenden Schmelzung so eben aus einander fliessen wollen. Die Erscheinung findet sich besonders ausgezeichnet am Bleiglanze, wie denn überhaupt die Oberfläche der grösseren Bleiglanzkrystalle durch regellose Vertiefungen und Erhöhungen nicht selten im hohen Grade defigurirt ist.

Etwas Aehnliches zeigen die eingewachsen vorkommenden Krystalle mancher Varietäten des Granates (Kolophonit), Pyroxenes (Kokkolith und körniger Augit), Amphiboles (basaltische Hornblende), Apatites (Moroxit) u. a. M., deren Kanten und Ecke oft auf eine Art zugerundet sind, welche unwillkürlich die Vorstellung einer begonnenen Schmelzung herbeiführt. Ueberhaupt unterliegt die Oberfläche der eingewachsenen Krystalle, wie vollkommen solche auch in vielen Fällen ausgebildet seyn mag, in andern Fällen häufigen Verunstaltungen, Abrundungen, Eindrücken u. dgl; was ja wohl von Krystallen zu erwarten ist, welche sich mitten in einer sie umgeben-

Digitized by Google

den, und also auch ihre freie Ausbildung mehr oder weniger hindernden Matrix gebildet haben. Daher denn auch dergleichen Krystalle nicht selten ihre regelmässige Form in dem Grade einbüssen, dass sie nur als unbestimmt eckige oder rundliche Körner erscheinen; z. B. Granat, Pyrop, Kokkolith, Chondrodit, Olivin, Magneteisenerz u. a.

Zweites Capitel.

Von den Unvollkommenheiten in der Configuration der Krystallformen.

§. 538.

Arten dieser Unvollkommenheiten.

Zu den Unvollkommenheiten in der allgemeinen Configuration oder in der Ausbildung der ganzen Krystallform überhaupt sind vorzüglich folgende Erscheinungen zu rechnen:

1) Die ungleiche Ausdehnung ursprünglich gleichwerthiger Flächen.
2) Die Unvollzähligkeit der Flächen einzeler Gestalten in den Combinationen.
3) Die Unvollständigkeit der äusseren Umrisse überhaupt.
4) Die unvollständige Erfüllung des durch die äusseren Umrisse bezeichneten Raumes durch die Materie des Krystalles.

Endlich ist noch hierher, wo nicht als eine Unvollkommenheit, so doch als eine Abweichung von den gewöhnlichen Gesetzen der Symmetrie die merkwürdige Erscheinung des Hemimorphismus zu rechnen.

Digitized by Google

1. *Ungleiche Flächenausdehnung.*

§. 539.

Wichtigkeit dieses Verhältnisses im Tesseralsysteme.

Die durch ungleiche Centraldistanz gleichwerthiger Flächen herbeigeführte ungleichförmige Ausdehnung derselben, durch welche sie nicht nur der Grösse nach ungleich, sondern auch der Figur nach unähnlich werden, ist besonders im Gebiete des Tesseralsystemes sehr genau in Betrachtung zu ziehen, weil die Gestalten und Combinationen dieses Systemes dadurch nicht selten bis zur Täuschung den Habitus von Combinationen andrer Krystallsysteme, zumal des tetragonalen, hexagonalen und rhombischen Systemes annehmen (vergl. S. 146).

Meist findet die Erscheinung in der Art Statt, dass diejenigen Flächen oder Flächensysteme, welche sich auf eine der Haupt- oder Zwischenaxen beziehen lassen, eine auffallende Vergrösserung oder Verkleinerung erfahren, so dass der ganze Krystall das Ansehen gewinnt, als sey er nach dieser Axe einseitig verlängert oder verkürzt worden. Dadurch bilden sich eigenthümliche Verzerrungsformen dieser Gestalten aus, von welchen wir die wichtigsten der Reihe nach betrachten wollen.

§. 540.

Verzerrungen des Oktaëders.

Das Oktaëder ist besonders häufig nach einer seiner trigonalen Zwischenaxen mehr oder weniger stark verkürzt; dadurch sondern sich seine Flächen in zwei scheinbar verschiedene Inbegriffe, von denen der eine ein Rhomboëder, der andere die zugehörige basische Fläche 0*R* darstellt. Das Oktaëder erscheint daher im Allgemeinen wie eine rhomboëdrische Combination 0*R*.*R*. oder wie ein tafelartiges Segment von

Digitized by Google

sich selbst, und zwar entweder wie ein mittleres Segment, als sechsseitige Tafel mit abwechselnd schief angesetzten Randflächen, Fig. 555, oder wie ein äusseres Segment, als eine drei- und sechsseitige Tafel, Fig. 554. Weniger häufig findet nach einer der trigonalen Zwischenaxen eine Verlängerung Statt, indem sich sechs Flächen zu einem spitzen Rhomboëder ausdehnen, dessen Pole durch die beiden übrigen Flächen mehr oder weniger stark abgestumpft sind; Fig. 556 und 557. Der Spinell, Bleiglanz, das Magneteisenerz, Rothkupfererz, der Alaun u. a. Mineralien zeigen entweder alle oder doch einige dieser Modificationen.

Das Oktaëder erscheint auch bisweilen nach einer seiner rhombischen Zwischenaxen verlängert, wodurch sich die Flächen in zwei scheinbar verschiedene Inbegriffe sondern, deren jeder ein rhombisches Prisma darstellt; das Oktaëder erhält so das Ansehen der rhombischen Combination $\infty P.\breve{P}\infty$, oder $\breve{P}\infty.\bar{P}\infty$, d. h. eines rhombischen Prismas, dessen Enden durch ein zweites Prisma zugeschärft werden; Fig. 558. Rothkupfererz, Spinell, Magneteisenerz, Bleiglanz.

§. 541.

Verzerrungen des Hexaëders.

Das Hexaëder ist nur solchen Verzerrungen unterworfen, welche sich auf eine Ungleichheit seiner Hauptaxen zurückführen lassen. Ist es nach einer Hauptaxe verlängert oder verkürzt, so sondern sich seine Flächen in zwei, scheinbar verschiedene Inbegriffe, welche den tetragonalen Gestalten ∞P und $0P$ entsprechen; das Hexaëder erscheint im Falle der Verlängerung als tetragonale Säule, Fig. 559; im Falle der Verkürzung als tetragonale Tafel, Fig. 560.

Sind alle drei Axen ungleich, so erscheint auch

das Hexaëder diesem Verhältnisse der Axen gemäss als die rhombische Combination $0P.\infty\breve{P}\infty.\infty\bar{P}\infty$.

Der hexaëdrische Eisenkies, der Silberglanz, der Flussspath, das Steinsalz liefern zum Theil sehr auffallende Beispiele dieser Verzerrungen.

§. 542.

Verzerrungen des Rhombendodekaëders.

Das Rhombendodekaëder ist sowohl nach den Haupt- als nach den beiderlei Zwischenaxen der Verzerrung unterworfen. Verlängert oder verkürzt sich dasselbe nach einer der Hauptaxen, so sondern sich seine Flächen in zwei scheinbar verschiedene Inbegriffe, von welchen der eine eine tetragonale Pyramide, der andere ein dergleichen Prisma von diagonaler Flächenstellung darstellt. Das Dodekaëder erscheint daher als die tetragonale Combination $P.\infty P\infty$, und zwar im Falle der Verlängerung säulenförmig mit vorherrschendem Prisma, Fig. 561, im Falle der Verkürzung pyramidenförmig mit vorherrschender Pyramide, Fig. 562; Granat.

Verlängert oder verkürzt sich das Rhombendodekaëder nach einer der trigonalen Zwischenaxen, so sondern sich seine Flächen in zwei Inbegriffe, von welchen der eine ein flaches Rhomboëder, der andre ein hexagonales Prisma von diagonaler Flächenstellung darstellt. Das Dodekaëder erscheint als die rhomboëdrische Combination $R.\infty P2$, und zwar im Falle der Verlängerung säulenartig mit vorherrschendem Prisma, Fig. 563, im Falle der Verkürzung mit vorherrschendem Rhomboëder, Fig. 564; Granat, Sodalit.

Verlängert oder verkürzt sich das Rhombendodekaëder nach einer der rhombischen Zwischenaxen, so sondern sich seine Flächen in drei, scheinbar verschiedene Inbegriffe, indem 8 Flächen als eine rhombische Pyramide, die übrigen 4 Flächen als zwei der

Digitized by Google

Flächenpaare des rhombischen Systemes auftreten. Das Dodekaëder erscheint daher als die rhombische Combination $P.\infty\breve{P}\infty.\infty\bar{P}\infty$, und zwar im Falle der Verlängerung pyramidal mit vorherrschendem P, Fig. 565, im Falle der Verkürzung tafelartig mit vorherrschendem Flächenpaare, Fig. 566; Granat.

§. 543.

Verzerrungen der Ikositetraëder und Tetrakishexaëder.

Das Ikositetraëder 2O2 findet sich häufig nach einer seiner Hauptaxen verlängert, und erscheint als eine ditetragonale Pyramide, welche an beiden Enden mit vier, auf die stumpferen Polkanten aufgesetzten Flächen flach zugespitzt ist; Fig. 567. Diese Zuspitzungsflächen werden bisweilen sehr klein, Fig. 568, ja sie verschwinden wohl endlich ganz, und der Krystall erscheint als eine vollständige ditetragonale Pyramide, Fig. 596. Der Granat, der Analcim, der hexaëdrische Silberglanz, das Silber, und, nach Marx, das Salmiak zeigen diese Verlängerung auf eine mehr oder weniger auffallende Art. Seltener kommt die Verkürzung nach einer Hauptaxe vor.

Nach einer der trigonalen Zwischenaxen finden sich sowohl Verlängerungen als Verkürzungen, jedoch die letzteren häufiger als die ersteren. Der Krystall erhält in beiden Fällen das Ansehen einer rhomboëdrischen, aus einem spitzen Skalenoëder und stumpfen Rhomboëder bestehenden Combination, und, im Falle der Verlängerung (den Marx sehr schön am Salmiak beobachtete) eine täuschende Aehnlichkeit mit der bekannten Combination $R^3.-\frac{1}{2}R.\infty R$ des Kalkspathes, Fig. 570 und 571.

An gewissen Varietäten des Flussspathes (z. B. von Zschopau in Sachsen und einigen aus England) kommt das Tetrakishexaëder $\infty O3$ auf eine sehr merkwürdige Weise nach einer trigonalen Zwischenaxe

Digitized by Google

verlängert vor, wie solches in Fig. 572 dargestellt ist. Die Gestalt erhält dadurch das Ansehen eines aus dem Hexaëder als rhomboëdrischer Grundgestalt nach dem Coëfficienten 2 abgeleiteten Skalenoëders; doch bilden die übrigen 12 Flächen meist eine undeutliche krummflächige Zuspitzung dieses Skalenoëders, Fig. 573, wie denn überhaupt mit dieser Abnormität der Configuration eine sehr unregelmässige Krümmung der Flächen verbunden zu seyn pflegt. Neulich sind jedoch zu Zschopau sehr ausgezeichnete Exemplare vorgekommen, welche das spitzere Skalenoëder fast vollständig ausgebildet, und ausserdem noch Abstumpfungen der stumpferen Polkanten desselben durch die Flächen 6O6 zeigen.

§. 544.

Verzerrungen der tesseralen Combinationen.

Die durch die ungleichförmige Flächenausdehnung veranlassten Deformitäten treffen natürlich nicht nur die einfachen Gestalten, sondern auch die Combinationen derselben. Da es jedoch nicht wohl möglich ist, die einzelen binären Combinationen in dieser Hinsicht besonders durchzugehen, und da die Deformitäten, welche eine Gestalt in ihren Combinationen mit andern Gestalten erfährt, denjenigen analog zu seyn pflegen, welchen sie in ihrer isolirten Erscheinung unterworfen ist, so will ich an gegenwärtigem Orte nur einige Beispiele anführen.

Die Combination ∞O∞.O des Bleiglanzes und Silberglanzes erscheint zuweilen nach einer Hauptaxe verlängert, als die tetragonale Combination ∞P∞. P.0P, indem die Flächen des Oktaëders eine Pyramide, die des Hexaëders ein Prisma so wie die Abstumpfungsflächen der Polecke der Pyramide bilden; Fig. 574.

Die bekannte Varietät des Granates vom Monzo-

niberge, welche von Diopsid begleitet ist, zeigt gewöhnlich die Combination 2O2.∞O wie in Fig. 78; zuweilen jedoch ist diese Combination nach einer Hauptaxe verlängert, wobei die vier oberen und vier unteren Flächen des Rhombendodekaëders gänzlich verschwinden, und der ganze Krystall grosse Aehnlichkeit mit gewissen Combinationen des Zinnerzes erhält; ganze Drusen zeigen nämlich Krystalle von der Form wie Fig. 575.

In der Sammlung des Herrn Geh. Cabinetsrath Heyer befindet sich ein Granatkrystall der Combination 2O2.∞O, welcher in der Richtung einer rhombischen Zwischenaxe stark verkürzt, und zugleich so unregelmässig ausgebildet ist, dass die zu dem einen Ende dieser Zwischenaxe gehörige Hälfte nur vier Flächen von 2O2 (*e*), die andre Hälfte nur fünf Flächen von ∞O (*i*) zeigt, Fig. 576 *).

Die unter dem Namen Strahlkies von Almerode bekannten Varietäten des hexaëdrischen Eisenkieses zeigen Deformitäten, welche deshalb besonders wichtig werden, weil sie eine häufige Missdeutung des wahren krystallographischen Charakters dieser Substanz veranlasst haben; doch gehören sie mehr zu einer andern Art von Unvollkommenheiten der Configuration, von der weiter unten die Rede seyn wird.

§. 545.

Ungleiche Flächenausdehnung in den einaxigen Krystallen.

In den einaxigen Krystallsystemen spielt die ungleichförmige Ausdehnung gleichwerthiger Flächen im Allgemeinen eine um so grössere Rolle, je unsymmetrischer der Charakter des Systemes ist, daher sie

*) Die mit *a* bezeichneten Flächen sind sehr unvollkommen, und scheinen dem Hexaëder oder einem ∞O*n* von sehr grosser Ableitungszahl zu gehören.

Digitized by Google

besonders in einigen Krystallreihen des triklinoëdrischen Systemes einen sehr hohen Grad erreicht, und z. B. Krystalle des Kupfervitrioles vorkommen, an welchen für viele Flächen keine Gegenflächen vorhanden sind. Aber auch in den übrigen Systemen macht sich dasselbe Verhältniss auf eine sehr auffallende Weise geltend; nur lässt es sich für selbige nicht unter so bestimmte Regeln bringen, wie dies für das Tesseralsystem möglich war. Daher mag es auch hinreichend seyn, einige Beispiele zu erwähnen; um so mehr, weil fast jede einaxige Krystallreihe eigenthümlichen, und meist sehr unbestimmten Abnormitäten unterworfen zu seyn pflegt.

So giebt es z. B. Anataskrystalle, in welchen die an zwei gegenüberliegenden Polkanten gelegenen Flächenpaare sehr vorherrschend gegen die übrigen ausgebildet sind, so dass die ganze Gestalt nach dem Gesetze einer monoklinoëdrischen Pyramide scheinbar aus zwei verschiedenen Hemipyramiden zusammengesetzt ist, Fig. 577; andre Krystalle sind nach der Richtung einer Zwischenaxe verlängert, und erscheinen daher wie die rhombische Combination zweier horizontaler Prismen, Fig. 578. Ganz ähnliche Abnormitäten zeigen die pyramidalen Krystalle der rhombischen Krystallreihe des Schwefels. Die Topaskrystalle aus Brasilien erscheinen gar nicht selten, zwar mit vollständigem Prisma ∞P, aber nur mit der halben Anzahl der Flächen der Pyramide P, wie in Fig. 582, so dass man die ganze Form auf den ersten Blick gleichfalls für monoklinoëdrisch halten möchte. Aehnliche Erscheinungen finden sich an den Krystallen des Lievrites u. a. rhombischen Mineralien. In den hexagonalen Prismen des Kalkspathes, des Berylles, Quarzes u. a. Mineralien sind oft zwei Gegenflächen sehr breit, zwei andere sehr schmal, so dass die Prismen wie rhombische Prismen von 120°, mit

abgestumpften schärferen Seitenkanten erscheinen; ja, es verschwinden bisweilen zwei Gegenflächen gänzlich, und das Prisma erscheint völlig als rhombisches Prisma; auch dehnen sich wohl drei abwechselnde oder zwei gegenüberliegende Flächen sehr aus auf Unkosten der übrigen u. dgl. m. Die Skalenoëder des Kalkspathes unterliegen gleichfalls sehr bizarren Verzerrungen, von denen zumal diejenigen häufig sind, da die Krystalle in der Richtung zweier Mittelkanten verlängert sind, so dass an der Stelle des Poleckes eine schiefe Kante entsteht, Fig. 579. Dasselbe findet sich an den Rhomboëdern, welche dann als rhombische Prismen mit schief angesetzten Endflächen erscheinen, Fig. 580 und 581.

§. 546.

Fortsetzung.

Eine durch ihre Deformitäten ganz besonders ausgezeichnete Species ist der Quarz, an welchem man eine unerschöpfliche Mannichfaltigkeit der bizarresten Verzerrungen beobachten kann. Dabei ist der von Haüy erwähnte Umstand sehr merkwürdig, dass die Regelmässigkeit der Form mit der Reinheit des Stoffes im umgekehrten Verhältnisse zu stehen scheint, indem es gerade die reinsten, wasserhellen Varietäten sind, welche die auffallendsten Monstrositäten zeigen, während die trüben, sehr verunreinigten Varietäten die grösste Regelmässigkeit offenbaren; gleichsam als habe sie die Natur durch die vollkommnere Form für die unreinere Masse entschädigen wollen. Mehre dieser Deformitäten sind von Romé de l'Isle, Scopoli und Haüy beschrieben und abgebildet worden, und wir können an gegenwärtigem Orte nur einige der wichtigsten ausheben, welche an der Combination $\infty P.P$, als der herrschenden und in ihrer

Regelmässigkeit in Fig. 583 dargestellten Krystallform des Quarzes, zu beobachten sind.

Fig. 584 stellt Haüy's *Var. comprimée* vor, welche so erscheint, als ob der Krystall nach einer der Nebenaxen in die Länge gezogen worden sey.

Fig. 585 ist dieselbe Varietät, in welcher die breiten Seitenflächen des Prismas noch vorherrschender geworden sind.

Fig. 586, Haüys *Var. sphalloide*, entsteht, wenn die Combination P.∞P nach einer Polkante der Pyramide sehr verlängert ist; die an dieser und der gegenüberliegenden Polkante gelegenen beiden Flächenpaare der Pyramide bilden zugleich mit zwei Flächen des Prismas ein unregelmässig sechsseitiges Prisma, gleichsam die Combination $\infty P . \infty \breve{P} \infty$, in welcher der stumpfe Winkel von $\infty P = 133° 44'$ beträgt.

Fig. 588, Haüy's *Var. basoide*, kommt seht häufig zu Oisans vor, und entsteht, wenn eine der Pyramidenflächen sehr vorherrschend wird, so dass sie gleichsam eine schiefe Basis des Prismas bildet, deren Combinationskanten mit dem Prisma durch die übrigen Pyramidenflächen abgestumpft sind.

Fig. 587 und ähnliche finden sich häufig an den kleinen wasserhellen Bergkrystallen von Marmarosch.

Fig. 589 ist eine Defiguration, welche mit der *Var. comprimée* einige Aehnlichkeit hat, nur ist die Pyramide sehr vorherrschend, auch erscheinen zwei gegenüberliegende Flächen des Prismas und die dazu gehörigen Pyramidenflächen sehr untergeordnet, und der ganze Krystall erhält das Ansehen einer monoklinoëdrischen Combination.

Die horizontalen Streifungen der Flächen von ∞P leisten grosse Dienste bei der Orientirung von diesen und andern defigurirten Krystallen des Quarzes.

Digitized by Google

§. 547.

Unbestimmte Ausdehnung der Prismen.

Als ein die ungleiche oder vielmehr unbestimmte Flächenausdehnung betreffender Gegenstand mag hier noch die verschiedene Erscheinungsweise der Prismen und Flächenpaare in den einaxigen Krystallsystemen erwähnt werden. Wie in der Definition der Prismen, so ist auch in ihren krystallographischen Zeichen ∞P, ∞R, $\breve{P}\infty$ u. s. w. durchaus nichts über ihre Ausdehnung in der Richtung der Axe ausgesagt; vielmehr sind jene Definitionen wie diese Zeichen dem indefiniten Charakter der Prismen völlig angemessen, und müssen dies auch seyn, wenn sie nicht der Natur widerstreiten sollen. Denn die Flächen eines und desselben Prismas erscheinen bald als die Seitenflächen einer langgestreckten, die ganze Ausdehnung des Krystalles beherrschenden Säule, bald als die schmalen, kaum bemerkbaren Randflächen einer Tafel, und es ist eine der Natur durchaus widerstreitende Fiction, wenn man den Prismen irgend eine bestimmte Länge in der Richtung ihrer Axe, oder überhaupt irgend bestimmte Dimensionen nach Länge und Breite zuschreibt. Ein Prisma ist und bleibt nichts Anderes, als ein Inbegriff von Flächen, welche einer und derselben Axe parallel laufen; seine Begränzung in der Richtung dieser Axe hängt davon ab, in welcher Centraldistanz andere, gegen dieselbe Axe geneigte Flächen ausgebildet sind; je geringer diese Centraldistanz im Verhältniss zu jener der Prismaflächen selbst, um so kürzer, je bedeutender dieselbe, um so länger wird das Prisma erscheinen. In den haarfeinen Krystallen des Sagenites und Amianthes erscheinen z. B. dieselben Prismen ausserordentlich langgestreckt, welche in andern Krystallen des Rutiles und Amphiboles sehr kurz sind; und auf ähn-

liche, wenn auch nicht gerade so auffallende Weise verhalten sich die Prismen überhaupt, wie dies von offenen Gestalten zu erwarten ist, deren Ausdehnung nicht durch sich selbst, sondern durch andere Gestalten bestimmt wird.

Was hier von den Prismen gesagt worden ist, das gilt auch, *mutatis mutandis*, von den die Coordinatebenen repräsentirenden Flächenpaaren der einaxigen Systeme, welche bald als kaum bemerkbare Abstumpfungsflächen der Pyramidenecke oder Prismenkanten, bald als Seitenflächen von Tafeln auftreten, und im letzteren Falle eben so vorherrschend die Totalform der Combination bestimmen, als sie auf selbige im ersteren Falle ohne allen Einfluss sind.

2. *Unvollzähligkeit der Flächen in den Combinationen.*

§. 548.

Regellosigkeit dieser Erscheinung.

Eine sehr gewöhnliche Abweichung von der in der reinen Krystallographie vorausgesetzten Regelmässigkeit ist die Unvollzähligkeit der Flächen derjenigen Gestalten, welche untergeordnet in den Combinationen erscheinen. Da dieses Verhältniss ausserordentlich häufig vorkommt, so würde es ohne Nutzen seyn, mehr darüber zu sagen, als dass es fast jedenfalls ohne alle Regel Statt findet, und dass man sich daher hüten muss, die gesetzmässige Unvollzähligkeit der Flächen, wie solche durch die Hemiëdrie herbeigeführt wird, mit dieser regellosen Unvollzähligkeit zu verwechseln. So sieht man z. B. Hexaëder des Bleiglanzes, Eisenkieses u. a. Substanzen, an welchen nur zwei oder drei Ecke abgestumpft sind, da es doch eigentlich alle acht seyn müssten; so finden sich Rhombendodekaëder des Granates, an welchen nur einige Kanten abgestumpft oder zugeschärft sind,

Digitized by Google

u. dgl. m. Wie im Tesseralsysteme, so findet sich dieselbe Abnormität zum Theil noch weit auffallender in den einaxigen Systemen.

§. 549.

Merkwürdige Abnormität am Eisenkiese.

Die Krystalle des hexaëdrischen Eisenkieses zeigen die Unvollzähligkeit der Flächen nicht selten mit einer gewissen Regelmässigkeit; so besonders die Varietäten des Strahlkieses von Almerode, dessen Oktaëder nur mit den oberen Enden aus den strahligen Aggregaten hervorragen, und den, schon in dieser Art der Zusammensetzung geoffenbarten, vorherrschenden Einfluss einer der Hauptaxen auch dadurch beurkunden, dass sich dieselbe Hauptaxe frei von denjenigen Modificationen hält, welche in Bezug auf die andern beiden Hauptaxen durch das Eintreten der Flächen von $\infty O \infty$ oder $\frac{\infty O 2}{2}$ Statt finden. Daher erscheint nach Köhler z. B. die Combination $O.\infty O \infty$ nicht wie in Fig. 123, sondern wie in Fig. 595, die Combination $O.\frac{\infty O 2}{2}$ nicht wie in Fig. 230, sondern wie in Fig. 596.

Eine noch weit auffallendere Erscheinung bieten gewisse Eisenkieskrystalle aus England dar, welche nach Rose in Fig. 594 dargestellt sind; sie zeigen die Combination

$$\frac{\infty O 2}{2}.\left[\frac{4 O 2}{2}\right].\infty O \infty.O$$

sind aber nach einer Hauptaxe verlängert, und zugleich in Bezug auf diese Axe auf eine so symmetrische Art unregelmässig, dass man sich nur durch Messungen von ihrem wahren krystallographischen Charakter überzeugen kann, der hier gänzlich hinter dem Scheine einer rhombischen Combination versteckt

Digitized by Google

ist, indem vier Flächen des Pentagondodekaëders (*e*) ein rhombisches Prisma, und acht Flächen des Dyakisdodekaëders (*s*) eine rhombische Pyramide bilden, und in dieser Erscheinungsweise vorherrschend die Physiognomie der Combination bestimmen.

3. *Unvollständigkeit der Umrisse der Krystalle.*

§. 550.

Eingewachsene und lose Krystalle.

Die ringsum vollständig ausgebildeten Krystalle gehören im Allgemeinen zu den seltneren Vorkommnissen der anorganischen Individuen; denn, wiewohl einige Species (z. B. Leucit, Boracit, Spinell, Diamant, Mellit u. a.) bis jetzt fast ausschliessend, andere Species aber (z. B. Granat, Quarz, Zirkon, Pyroxen, Amphibol, Rothkupfererz, Magneteisenerz, Idokras, Gyps u. a.) in vielen Varietäten als ringsum ausgebildete Krystalle bekannt sind, so ist doch bei weitem der grösste Theil der anorganischen Individuen in seinen Umrissen entweder gar nicht, oder nur sehr unvollständig ausgebildet. Dies ist eine unmittelbare Folge des in der Einleitung S. 6 und S. 15 erwähnten Gesetzes der Aggregation, welches die freie Ausbildung der einzelen Individuen auf vielfältige Weise beschränkt, ja, für die meisten Individuen die Ausbildung ihrer krystallinischen Formen ganz unmöglich macht, wenn gleich die dazu erforderlichen inneren Bedingungen vollständig vorhanden sind.

Vollkommene Isolirung des sich bildenden Individuums innerhalb einer, seine plastische Tendenz durchaus nicht beschränkenden Masse ist nämlich die nothwendige Bedingung zur allseitigen Ausbildung seiner Form. Diese Bedingung kann aber offenbar nur dann vollständig erfüllt seyn, wenn sich in einer

Digitized by Google

flüssigen oder halbflüssigen Masse (wie z. B. in der Luft, in einer Salzauflösung, in einem schlammartigen Sedimente, in einem noch nicht erstarrten Lava- oder Basaltstrome) krystallisirbare Substanzen aussondern, und gleichsam nach einzelen Puncten hin concentriren, so dass sich viele Mittelpuncte der Molecularanziehung ausbilden, um deren jeden einzelen die plastischen Kräfte ihr Spiel beginnen und vollenden, bevor noch die umgebende Masse alle Verschiebbarkeit und Nachgiebigkeit verloren hat.

Auf diese Weise bilden sich noch immer die feinen Eisnadeln in der Atmosphäre, die sich präcipitirenden Krystalle in den Salzauflösungen, die Krystalle des Alaunes, Steinsalzes u. s. w. in Thon- und Lehmlagern u. dgl. m. Aber auf ähnliche Weise sind auch die in Gebirgs- und Lagergesteinen eingewachsenen, ringsum ausgebildeten Krystalle entstanden, welche das anorganische Individuum räumlich isolirt, im Zustande seiner höchsten Vollendung repräsentiren, und, wenn die sie ursprünglich umschliessende Matrix zerstört worden, als lose Krystalle erscheinen.

§. 551.

Aufgewachsene Krystalle.

Nächst den einzeln eingewachsenen Krystallen sind es die einzeln aufgewachsenen Krystalle, in welchen die anorganischen Individuen am wenigsten verstümmelt erscheinen. Wenn sich nämlich an einzelen Puncten einer vorhandenen Unterlage (z. B. der Wände einer Gangspalte, eines Drusenraumes, eines Blasenraumes) aus einer Auflösung oder aus sublimirten Dämpfen eine krystallisirbare Substanz niederschlägt, so kann dieser Niederschlag in solcher Regelmässigkeit erfolgen, dass sich um jeden dieser Puncte nur ein Krystall bildet, welcher bisweilen fast vollständig, gewöhnlich aber durch die seine Aus-

Digitized by Google

bildung beschränkende Unterlage mehr oder weniger verstümmelt erscheint, indem er, ohne nach andern Richtungen in seinem Wachsthume gestört worden zu seyn, durch diese seine Unterlage wie abgeschnitten ist. Diese einzeln aufgewachsenen Krystalle sind also noch eines hohen Grades von Vollkommenheit fähig, wie dies z. B. viele Krystalle des Flussspathes, Apatites, Kalkspathes, Bleisulphates, Topases, Axinites, Helvines, Titanites, Anatases u. a. Mineralien zur Genüge beweisen.

§. 552.

Krystallgruppe und Druse.

Wenn sich um ein bereits gebildetes eingewachsenes Individuum andere Individuen nach verschiedenen Richtungen ansetzen, so dass jedes nachfolgende Individuum in einem oder mehren der vorher gebildeten eine Stütze oder Unterlage fand, so entstehen die freien Krystallgruppen, in welchen nur die äussersten Individuen mit ihren nach Aussen gewendeten Seiten vollkommen ausgebildet, die inneren Individuen aber mehr oder weniger verwachsen sind, bis zum gänzlichen Verschwinden ihrer krystallinischen Form.

Bilden sich von einem gemeinschaftlichen Mittelpuncte innerhalb einer nachgiebigen Matrix nach allen Richtungen Individuen, so dass selbige wie die Radien einer Kugel divergiren, so erhalten diese Krystallgruppen eine mehr oder weniger regelmässige sphärische oder sphäroidische Gestalt.

Wenn sich dagegen um einen bereits gebildeten aufgewachsenen Krystall, oder auch gleichzeitig von einem und demselben Puncte der Unterlage aus nach allen Richtungen andere Krystalle ansetzen, so entsteht eine mehr oder weniger regelmässige aufgewachsene Krystallgruppe, an welcher sich die

Digitized by Google

äusseren Individuen wie aufgewachsene Krystalle verhalten, während die inneren Individuen meist dergestalt mit und durch einander verwachsen sind, dass ihre gegenseitigen Gränzen nur durch zufällige Zusammensetzungsflächen bestimmt, ihre wahren Formen aber gänzlich obliterirt werden.

Wenn endlich auf der Unterlage viele Mittelpuncte der Molecularanziehung sehr nahe beisammen liegen, so müssen sich bei fortgesetztem Wachsthume die einzelen Individuen endlich in ihren seitlichen Theilen berühren, und, wie früher das einzele Individuum nur in seiner Unterlage, so findet es jetzt in jedem seiner Nachbarn ein Hinderniss der Entwicklung. Die Individuen verwachsen also nach den seitlichen Richtungen mit einander in eine mehr oder weniger zusammenhängende Masse, aus welcher sie nur mit den oberen Enden als Krystalle in den freien Raum hinausragen. Dergleichen Aggregate sind es, welche den Namen der Drusen führen, wiewohl man auch unter diesem Worte jeden Inbegriff vieler, auf einer gemeinschaftlichen Unterlage neben einander aufgewachsener Krystalle versteht, wenn sich solche auch nicht berühren.

Auf die Grösse der Individuen kommt es natürlich bei allen diesen Bestimmungen nicht an; und die kleinsten kugligen Aggregate der Kobaltblüthe, die feinsten Drusenhäute des Kupferkieses sind eben sowohl Krystallgruppen und Drusen, als die sphäroidischen Gruppen des Eisenkieses oder die kolossalen Drusen des Bergkrystalles.

§. 553.

Körnige, strahlige, faserige u. a. Aggregate.

Die meisten Individuen des Mineralreiches aber sind das Resultat eines Erstarrungs- oder Krystallisationsprocesses, welcher successiv oder simultan

Digitized by Google

ganze Massen anorganischer Substanz ergriff, so dass von zahllosen Mittelpuncten aus der Process nach allen Richtungen sich fortsetzte, und um jedes bereits gebildete Individuum unmittelbar andere zum Daseyn gelangten, bis die ganze Masse in eine Unzahl individualisirter Elemente gesondert war, welche sich zwar nicht durch äussere Krystallform, wohl aber durch die, einer solchen Form genau entsprechenden, Verhältnisse der Spaltbarkeit als verdrückte und verkrüppelte Individuen zu erkennen geben. So mögen die Granite, Syenite, körnigen Kalksteine und andere krystallinische Gesteine der Ur- und Uebergangsgebirge enstanden seyn, welche oft in himmelhohen Massen aufgethürmt sind, und deren Individuen nur in Drusenräume oder Gangklüfte mit ihren frei gebildeten Enden hinausragen, während sich an den übrigen, nach allen Richtungen an und durch einander verwachsenen Individuen keine regelmässig ausgeprägte Krystallgestalt erwarten lässt. Wie daher die einzeln eingewachsenen Krystalle die vollkommenste, so bilden diese körnigen Elemente eines krystallinischen Aggregates die unvollkommenste Darstellung der anorganischen Individuen. Dass übrigens durch die Dimensionen der einzelen Individuen diese Unvollkommenheit relativ für den Beobachter mehr oder weniger gesteigert werden wird, versteht sich von selbst; denn wenn die Individuen eines dergleichen körnigen Aggregates noch zollgross sind, wird die Anerkennung derselben weit leichter Statt finden, als wenn sie bis zu mikroskopischer Kleinheit herabgesunken sind, wie dies freilich sehr häufig der Fall zu seyn pflegt.

Was von den körnigen Aggregaten gesagt wurde, das gilt in ähnlicher Weise von den flaserigen, schieferigen, und andren krystallinischen Aggregaten, bei deren Bildung gewisse Umstände Statt gefunden, wel-

che, wiewohl noch grösstentheils unbekannt, doch einen bestimmten Einfluss auf das Fortschreiten des Erstarrungsprocesses ausgeübt haben müssen, kraft dessen jene schon mehr regelmässigen Aggregationsformen entstanden sind. Die meisten der so gebildeten Individuen aber sind deshalb kein Object der Krystallographie, weil ihre äusseren Formen in dem Gedränge der Aggregation gänzlich verloren gegangen sind, die Krystallographie aber nur diese äusseren Formen zum Gegenstande hat.

4. *Unterbrochene Raumerfüllung.*

§. 554.

Trichterförmige Aushöhlung der Flächen.

Nicht selten trifft man Krystalle, deren durch die Conture des Kantennetzes bestimmter Raum von der Substanz nicht stetig erfüllt wird, indem meist nur die unmittelbar an den Kanten anliegenden Theile der Flächen ausgebildet sind. Diese Unvollkommenheit, welche an künstlichen Salzen und durch Sublimation gebildeten Krystallen besonders häufig vorkommt, ertheilt den Krystallen das Ansehen, als seyen ihre Flächen nach dem Mittelpuncte hin trichterförmig ausgehöhlt, und als habe sich alle Substanz nur an denjenigen Ebenen concentrirt, welche aus dem Mittelpuncte durch die Kanten gehen. Betrachtet man die Aushöhlungen genauer, so findet man, dass ihre Wände in treppenartiger Ausbildung von dem Mittelpuncte nach den Kanten hin aufsteigen, und eine der Flächenreifung ganz ähnliche Erscheinung zeigen. Die abwechselnden Flächenelemente gehören jedoch nicht verschiedenen Gestalten, sondern derselben einfachen Gestalt an, welche der ganze Krystall darstellt.

So finden sich häufig die Hexaëder des in den Salinen dargestellten Kochsalzes, die durch Sublima-

Digitized by Google

tion in Röst- und Schmelzöfen entstandenen Hexaëder des Bleiglanzes, zuweilen auch natürliche Bleiglanzkrystalle auf ähnliche Art wie in Fig. 590 und 591 ausgebildet. Ebenso erscheinen die Oktaëder des Alaunes, der arsenigen Säure wie in Fig. 592. Auch der Quarz kommt zuweilen in seinen reineren Varietäten mit ausgehöhlten Flächen vor. Aehnliche Aushöhlungen finden sich an den basischen Flächen der hexagonalen Prismen des Berylles und Pyromorphites, an den Krystallen des Eisenvitrioles, Glaubersalzes, Kupfervitrioles u. a. Substanzen. Nur muss man sich die Erscheinung an den Hexaëdern und Oktaëdern nicht ganz so regelmässig vorstellen, wie sie die Fig. 591 und 592 zeigen, indem zugleich die auffallendsten Verzerrungen und Verstümmelungen der Form Statt zu finden pflegen, so dass z. B. die Bleiglanzhexaëder aus den Röstöfen in den monströsesten Kantengerippen und die Kochsalzhexaëder aus den Sodpfannen gewöhnlich nur vom Mittelpuncte aus nach vier Kanten als hohle vierseitige Pyramiden ausgebildet sind.

§. 555.

Merkwürdige Erscheinung am Eisenkiese.

Eine hierher gehörige, schon von Hausmann erwähnte, und neulich von Köhler beschriebene sehr merkwürdige Erscheinung findet sich am (hexaëdrischen) Strahlkiese von Almerode, dessen säulenförmig verlängerten und unsymmetrisch gebildeten Krystalle der Combination $\infty O \infty . O$ parallel den vier, als tetragonales Prisma erscheinenden Flächen des Hexaëders dergestalt ausgeschnitten sind, Fig. 593, dass man einen Zwillingskrystall zu sehen glaubt; um so mehr, weil am Eisenkiese wirklich Durchkreuzungszwillinge vorkommen, welche nach einem der Erscheinungsweise dieser ausgehöhlten Krystalle entsprechenden

Gesetze gebildet sind. Die Lage der Streifen auf den Hexaëderflächen widerlegt jedoch diese Vermuthung, weil sie nur einem einzigen Individuum entspricht; denn wären diese kreuzförmigen Krystalle wirkliche Zwillinge, so könnten die einander parallelen Hexaëderflächen der beiden sich durchkreuzenden Theile nicht parallel gestreift seyn, wie dies doch wirklich der Fall ist.

5. *Hemimorphismus*

§. 556.

Begriff des Hemimorphismus.

Zwar eine Abweichung von den herrschenden Symmetriegesetzen, aber eine sehr gesetzmässige, und durch ihre physikalische Bedeutsamkeit im hohen Grade merkwürdige Abweichung ist die Erscheinung des Hemimorphismus in den einaxigen Krystallsystemen. Man nennt nämlich einen einaxigen Krystall hemimorphisch, wenn er an beiden Enden der Hauptaxe gesetzmässig von den Flächen verschiedener Gestalten begränzt wird, gleichsam als gehöre das obere Ende einem anderen Individuum, als das untere Ende. Diese Entzweiung des ganzen Krystalles in der Richtung seiner Hauptaxe, oder diese morphologische Polarität desselben gewinnt noch deshalb ein besonderes Interesse, weil sie mit einer physischen Polarität innig verknüpft ist, indem die hemimorphischen Krystalle durch Erwärmung polar elektrisch werden, d. h. an den entgegengesetzten, und durch die verschiedene Gestalt charakterisirten Polen ihrer Hauptaxe die entgegengesetzten Elektricitäten manifestiren. Der Hemimorphismus findet sich besonders am Turmaline, dessen Krystalle z. B. an einem Ende durch die Flächen eines oder mehrer Rhomboëder begränzt sind, während das andre Ende nur die basische Fläche zeigt, wie in Fig. 597; oder es erscheinen wohl

Digitized by Google

auch an den beiden Enden die Flächen derselben Gestalten, allein noch ausserdem am einen Ende Flächen, welche am andern Ende fehlen, wie in Fig. 598. Ueberhaupt sind von 18 verschiedenen, in dem Atlas zu Haüy's Mineralogie abgebildeten Combinationen des Turmalines 16 vollständig beobachtete hemimorphisch; es lässt sich daher die gleiche Beschaffenheit von den übrigen voraussetzen, und der Hemimorphismus als ein allgemeines Bildungsgesètz des Turmalines betrachten.

§. 557.

Trigonales Prisma als Resultat des Hemimorphismus.

Ein Beweis, dass der Hemimorphismus ein für die Krystallreihe des Turmalines allgemein gültiges Bildungsgesetz ist, scheint in dem so häufigen Vorkommen des trigonalen Prismas zu liegen, welches eine nothwendige Folge des Hemimorphismus ist, und das Vorhandenseyn desselben selbst für solche Krystalle bestätigt, in welchen entweder gar keines, oder doch nur e i n e s der beiden Enden vorhanden, und daher die Verschiedenheit der terminalen Flächen nicht mehr zu beobachten ist.

Da nämlich das Prisma ∞R nur als die Gränzgestalt der Rhomboëder zu deuten ist, so müssen die drei abwechselnden Flächen auf die obere, die drei zwischenliegenden Flächen auf die untere Hälfte der Hauptaxe bezogen werden (§. 299). Weil nun aber das Wesen des Hemimorphismus eben darin besteht, dass von allen oder gewissen, in der Combination enthaltenen Gestalten nur entweder die obere, oder die untere Hälfte, d. h. nur entweder der zur oberen, oder der zur unteren Halbaxe gehörige Flächeninbegriff erscheint, so kann in einer, dem Hemimorphismus unterworfenen rhomboëdrischen Krystallreihe das Prisma ∞R nur mit drei abwechselnden Flächen, d. h. als trigonales Prisma auftreten. Wenn daher eine,

Digitized by Google

durch die Erscheinungsweise ihrer übrigen Gestalten als rhomboëdrisch charakterisirte Krystallreihe das Prisma ∞R nur als trigonales Prisma erscheinen lässt, so kann man mit Recht den Schluss ziehen, dass diese Krystallreihe dem Hemimorphismus unterworfen seyn müsse, auch wenn man sich nie durch Beobachtung eines mit beiden Enden ausgebildeten Individuums von der verschiedenen Endkrystallisation überzeugen kann, oder wenn auch die so ausgebildeten Individuen an beiden Enden häufig dieselben Gestalten zeigen sollten.

Aus demselben Grunde, aus welchem das hexagonale Prisma ∞R nur als trigonales, muss auch jedes dihexagonale Prisma ∞R^n als ditrigonales Prisma erscheinen, sobald eine rhomboëdrische Krystallreihe unter dem Gesetze des Hemimorphismus steht (§. 298).

§. 558.

Andere hemimorphische Krystallreihen.

Wie der Turmalin, so kommt auch die rhomboëdrische Silberblende in hemimorphischen Krystallen vor; besonders ist das trigonale Prisma $\frac{\infty R}{2}$ (k) eine sehr gewöhnliche Gestalt dieser Krystallreihe; Fig. 599. Im Gebiete des Tetragonalsystemes ist noch keine hemimorphische Krystallreihe bekannt. Dagegen hat man in den beiden rhombischen Krystallreihen des Topases und Zinksilicates hemimorphische Krystalle beobachtet. Haüy hat unter andern folgende zwei Combinationen des Topases als wirklich hemimorphisch dargestellt:

$$\infty\breve{P}3.\infty\bar{P}\infty.2\breve{P}\infty.\breve{P}\infty;\ \text{Fig. 600.}$$
$$\infty P.\infty\breve{P}2.P.2\breve{P}\infty.\tfrac{4}{3}\breve{P}2;\ \text{Fig. 601.}$$

in der ersteren kommt das horizontale Prisma $\breve{P}\infty$, in der zweiten die Pyramide $\frac{4}{3}\breve{P}2$ hemimorphisch vor;

Digitized by Google

die meisten übrigen Combinationen sind von ihm nur mit dem oberen Ende abgebildet worden, zum Beweise, dass er das untere Ende nicht übereinstimmend voraussetzen zu dürfen glaubte.

Durch Mohs sind wir endlich mit der in Fig. 602 dargestellten Combination des Zinksilicates bekannt worden, welche ausgezeichnet hemimorphisch ist, indem solche am oberen Ende durch die Flächen der vier horizontalen Prismen $2\breve{\bar{P}}\infty$, $\breve{\bar{P}}\infty$, $\frac{3}{2}\bar{P}\infty$ und $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, am unteren Ende dagegen durch die Flächen der Grundgestalt P begränzt wird.

6. *Schlussbemerkung.*

§. 559.

Beständigkeit der Kantenwinkel.

Aus den vorhergehenden Darstellungen der Unvollkommenheiten der Krystalle geht hervor, wie sehr sich dieselben in der Wirklichkeit von jener Regelmässigkeit entfernen, welche in der reinen Krystallographie vorausgesetzt wurde, und wie nöthig es war, ihre Gestalten zuvörderst so darzustellen, wie sie unter jener Voraussetzung erscheinen müssen. Denn die wahren Symmetriegesetze der Krystallformen werden durch jene Abnormitäten dermaassen entstellt und maskirt, dass man diese letzteren nur durch sorgfältige Vergleichung vieler Individuen als zufällige Störungen erkennen, und nach ihrer Abstraction zu der Auffindung der ersteren gelangen konnte. Durch solche Vergleichungen und Abstractionen ist die Lehre von den Krystallsystemen, dieser unentbehrliche Leitfaden durch das Labyrinth der Formen, gewonnen worden, wie sie denn auch fast jedesmal in Anwendung kommen, wenn man gegebene Krystalle bestimmen soll.

Bei aller Unbestimmtheit in der Erscheinungs-

Digitized by Google

weise der Krystallformen, bei allen Abnormitäten, welchen ihre Configuration anheimfällt, ist doch ein Verhältniss sehr constant, daher auch wohl das wesentliche und für die Wissenschaft besonders wichtige. Dies ist die relative Lage der Flächen, und die davon abhängige Grösse der Kanten- und Flächenwinkel. Zwar werden, nach Mitscherlichs schöner Entdeckung, in den einaxigen Krystallformen durch Temperaturveränderungen kleine Veränderungen in der gegenseitigen Lage der Flächen herbeiführt, indem sich die Krystalle dieser Art nach verschiedenen Richtungen ungleichmässig ausdehnen; allein bei einer und derselben Temperatur zeigt ein und derselbe einaxige Krystall dieselbe Grösse der Winkel aller gleichwerthigen Kanten, und die vielaxigen Krystalle sind gar keiner Veränderlichkeit unterworfen, da sie bei jeder Temperatur dieselben Kantenwinkel beobachten lassen. Daher sind es auch besonders die Kantenwinkel, auf welche man in zweifelhaften Fällen zu achten hat, und durch deren Messung man in den defigurirtesten Krystallen den wahren Charakter und das eigentliche Symmetriegesetz zu entdecken vermag.

Uebrigens ist es eine ziemlich allgemein bestätigte, und für die angewandte Krystallographie sehr wichtige Erfahrung, dass die kleineren Krystalle einer Spesies immer eine regelmässigere Gestalt und glattere Oberfläche besitzen, als die grösseren Krystalle; daher sie sich auch vorzugsweise zu den Messungen eignen, durch welche die zur Bestimmung und Berechnung der Krystallformen erforderlichen Elemente gewonnen werden.

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.
Von den Zwillingskrystallen.

Erstes Capitel.
Allgemeine Bestimmungen.

§. 560.

Aggregate der Individuen.

Wie zuweilen zwei oder mehre Individuen einer und derselben Thierspecies nach einer bestimmten Regel an oder durch einander gewachsen sind, und in dieser Verwachsung gleichsam ein Doppelindividuum oder eine mehrgliedrige Corporation von Individuen darstellen, so kommen sehr häufig zwei oder mehre Individuen einer und derselben anorganischen Species nach einem bestimmten Gesetze an und durch einander verwachsen vor. Die aus solcher Verwachsung hervorgehenden Aggregate zerfallen nach der gegenseitigen Stellung der verbundenen Individuen in folgende zwei wesentlich verschiedene Arten:

I. Aggregate von Individuen *mit* durchgängigem Parallelismus der Axen sowohl als der Flächen;

II. Aggregate *ohne* durchgängigen Parallelismus der Axen oder der Flächen.

Die Aggregation der ersten Art kommt in der Natur sehr häufig vor, und hat unter andern interessanten Erscheinungen*) besonders die vielfach zusammengesetzten oder polysynthetischen Krystalle zur Folge, welche durch die Gruppirung sehr vieler, in

---

*) Wohin z. B. die baumförmigen, gestrickten u. a. nachahmende Gestalten gehören, die jedoch mehr mineralogisches als krystallographisches Interesse haben.

Digitized by Google

paralleler Stellung befindlicher Individuen entstehen, die sich gleichsam mit Aufopferung ihrer singulären Selbständigkeit zu einem individualisirten Ganzen vereinigten. Diese polysynthetischen Krystalle lassen sich in gewisser Hinsicht den nach bestimmten Regeln zusammengesetzten Polypen und Ascidien vergleichen, in welchen gleichfalls die Individualität jedes einzelen Gliedes durch die innige Verschmelzung zu einem grösseren Ganzen mehr oder weniger verloren geht.

Weit wichtiger in krystallographischer Hinsicht ist die zweite Art von Aggregaten, welche wiederum in folgende zwei Unterabtheilungen zerfällt:

1) Aggregate, deren Individuen nach einem krystallographisch genau bestimmbaren Gesetze verbunden sind:
2) Aggregate, deren Individuen zwar nach einer gewissen Regel, aber doch nach keinem krystallographisch genau bestimmbaren Gesetze verbunden sind.

Die Aggregate der ersten Abtheilung sind es, welche, je nachdem sie aus zwei, drei oder mehren Individuen bestehen, den Namen der Zwillings-, Drillingskrystalle u. s. w. führen, und wegen ihrer mathematischen Gesetzmässigkeit die Aufmerksamkeit der Krystallographen ganz besonders in Anspruch genommen haben. Sie sind es auch, welche den eigentlichen Gegenstand dieses Abschnittes bilden. Die Aggregate der zweiten Abtheilung, zu welchen z. B. die fächerförmigen, garbenförmigen, kammförmigen, wulstförmigen und andere Zusammensetzungen gehören, bilden keinen Gegenstand der Krystallographie.

§. 561.

Stellungsgesetz der Zwillingskrystalle.

Ein Zwillingskrystall ist ein Aggregat zweier In-

Digitized by Google

dividuen einer und derselben Species, welche keinen durchgängigen Parallelismus der Axen und Flächen besitzen, aber nach einem genau bestimmbaren Gesetze verwachsen sind. — Beide Individuen sind in der Regel krystallographisch identisch, d. h. das eine hat absolut dieselbe Krystallform wie das andere; jedoch finden sich zuweilen Ausnahmen von dieser Regel.

Bei der Bestimmung eines Zwillingskrystalles kommen folgende zwei Verhältnisse in Betracht:

1) das Stellungsgesetz der Individuen, oder die relative Lage derselben;
2) das Verbindungsgesetz der Individuen, oder die Art und Weise ihrer Verwachsung.

Was das erste Verhältniss betrifft, so geht man bei seiner Bestimmung von der parallelen Stellung beider Individuen aus, und giebt die Regel an, nach welcher das eine Individuum gegen das andere verdreht werden muss, damit die Zwillingsstellung verwirklicht werde. Man sieht, dass es bei dieser Bestimmung ganz gleichgültig ist, ob man die Mittelpuncte beider Individuen zusammenfallend oder in beliebiger Entfernung und Richtung ausserhalb einander denken will, dass also auch die Art und Weise der Verwachsung beider Individuen auf die Bestimmung ihrer Stellung ohne allen Einfluss ist.

Wenn aber überhaupt das eine Individuum gegen das andere verdreht werden muss, um aus der parallelen Stellung in die erforderliche Zwillingsstellung zu gelangen, so sind die zunächst zu beantwortenden Fragen folgende:

1) welche Linie im Krystalle ist als die Umdrehungslinie zu betrachten,
2) wie gross ist der Umdrehungswinkel anzunehmen.

Die Antworten auf beide Fragen können nur aus

den Resultaten der Beobachtung aller bis jetzt bekannten Zwillingskrystalle entnommen werden, und bestimmen sich wie folgt:

1) Die Umdrehungslinie ist allgemein eine krystallographisch reelle Linie, also entweder eine der Axen der Krystallreihe, oder eine Kante, oder eine Flächennormale irgend einer ihrer Gestalten.

2) Der Umdrehungswinkel beträgt allgemein 180°, obgleich auch in manchen Fällen ein Winkel von 60° der Construction des Zwillinges Genüge leistet.

Da also genau eine halbe Wendung des einen Individuums gegen das andere um die Umdrehungslinie gefordert wird, so macht sich dieselbe als eine beiden Individuen gemeinschaftliche Axe geltend, in Bezug auf welche eine symmetrische Lage ihrer Theile und ein gewisses Gleichgewicht ihrer Ausbildung Statt findet. Wir ertheilen ihr daher mit allem Rechte den Namen der Zwillingsaxe, und werden das Stellungsgesetz der Individuen irgend eines Zwillings durch blosse Angabe dieser Zwillingsaxe hinreichend bestimmen, wenn wir ein für alle Mal die Umdrehung des einen Individuums durch 180° voraussetzen. Weil übrigens, zum wenigsten in allen orthobasischen Krystallsystemen, jede Axe und jede Kante die Normale einer möglichen Fläche ist, so werden wir auch in unsern ferneren Betrachtungen die Zwillingsaxe fast immer als eine Flächennormale einführen, um den Zwillingsgesetzen eine gewisse Gleichförmigkeit des Ausdruckes zu verschaffen.

Das bisher erläuterte Stellungsgesetz leistet jedoch nicht allen Erscheinungen der Zwillingsbildung allein Genüge; sondern ist vielmehr für einige Zwillinge ganz unzureichend, weil beide Individuen wie

Digitized by Google

rechts und links verschieden sind, und durch keine Umdrehung in die gehörige Lage gebracht werden können. Sie fordern daher ein ganz andres Gesetz, welches sich auch für viele andre Zwillinge mit gleichem Rechte geltend machen lässt, wenn gleich für sie sein Resultat von dem Resultate eines Gesetzes der ersten Art gewöhnlich nicht verschieden zu seyn pflegt.

Diese Zwillinge, welche also ein eigenthümliches Gesetz theils fordern, theils gestatten, sind im Allgemeinen gewisse Zwillinge solcher Individuen mit parallelen Axen, deren Formen jedoch hemiëdrisch oder tetartoëdrich sind; das erwähnte Gesetz aber ist folgendes:

Die Axen beider Individuen liegen sich parallel, die hemiëdrischen Gestalten des einen Individuums aber sind, ihrer Flächenstellung nach, die complementären Gestalten der gleichnamigen hemiëdrischen Gestalten des andern Individuums.

Dieses sehr häufig verwirklichte Gesetz, in welchem sich gleichsam ein Versuch zur Reproduction der holoëdrischen Formen offenbart, lässt sich, wie gesagt, zwar in vielen, aber nicht in allen Fällen auf das erste Gesetz zurückführen; daher wir ihm auch, wo es gestattet ist, eine mit dem ersten Gesetze übereinstimmende Formel substituiren werden. Uebrigens könnte man nach diesen beiden allgemeinen Gesetzen die gesammten Zwillingskrystalle in zwei Classen bringen:

1) Zwillinge mit parallelen Axensystemen.
2) Zwillinge mit nicht parallelen Axensystemen.

Die Zwillinge der ersten Classe würden nach dem

Digitized by Google

zweiten, die der zweiten Classe nach dem ersten allgemeinen Gesetze zu erklären seyn.

§. 562.

Aequivalente Zwillingsaxen.

In vielen, nach dem ersten Gesetze zu erklärenden Zwillingen lässt sich die angegebene Zwillingsaxe mit einer andern Linie vertauschen, ohne dass dadurch eine wesentliche Veränderung in dem Resultate der Construction herbeigeführt würde. Durch Calcül oder geometrische Betrachtung gelangt man in dieser Hinsicht zu folgenden Bestimmungen:

1) Wenn zwei gleichwerthige (recht- oder schiefwinklige) krystallographische Axen vorhanden, und nicht nur die Zwillingsaxe, sondern auch die dritte krystallographische Axe gegen jene beiden gleich geneigt sind, so lässt sich die Zwillingsaxe mit derjenigen ihrer Normalen vertauschen, welche in der Ebene durch sie selbst und die dritte Axe liegt.

Diese Bestimmung findet ihre Anwendung:

a) im Tesseralsysteme, wenn die Zwillingsaxe die Normale einer Fläche von mO, oder mOm; die äquivalente Zwillingsaxe ist für mO die Normale einer Fläche von $2mO2m$, für mOm die Normale einer Fläche von $\frac{m}{2}O$, wenn $m > 2$, von $\frac{2}{m}O\frac{2}{m}$, wenn $m < 2$;

b) im Tetragonalsysteme, wenn die Zwillingsaxe die Normale einer Fläche von mP; die äquivalente Zwillingsaxe ist die Normale einer Fläche von $\frac{1}{2ma^2}P$;

c) im Hexagonalsysteme, wenn die Zwillingsaxe die Normale einer Fläche von mP; die äquiva-

lente Zwillingsaxe ist die Normale einer Fläche von $\frac{3}{4ma^2}$P.

2) Wenn die Zwillingsaxe in die Ebene zweier (recht- oder schiefwinkliger, gleich- oder ungleichwerthiger) Axen fällt, und die dritte Axe auf dieser Ebene rechtwinklig ist, oder auch (wie im Hexagonalsysteme) die dritte und vierte Axe gegen diese Ebene gleich geneigt und gleichwerthig sind, so lässt sich die Zwillingsaxe mit ihrer in derselben Ebene liegenden Normale vertauschen.

Diese Bestimmung findet ihre Anwendung:

a) im Tesseralsysteme, wenn die Zwillingsaxe die Normale einer Fläche von ∞On; die äquivalente Zwillingsaxe ist die Normale einer andern Fläche von ∞On;

b) im Tetragonalsysteme, wenn die Zwillingsaxe eine Normale von $mP\infty$ oder ∞Pn; die äquivalente Zwillingsaxe ist im ersteren Falle die Normale einer Fläche von $\frac{1}{ma^2}P\infty$, im zweiten Falle wiederum die Normale einer andern Fläche von ∞Pn;

c) im Hexagonalsysteme, wenn die Zwillingsaxe eine Normale von $mP2$; die äquivalente Zwillingsaxe ist die Normale einer Fläche von $\frac{1}{ma^2}P2$.

d) Im rhombischen Systeme, wenn die Zwillingsaxe die Normale eines verticalen Prismas $\infty\bar{P}n$, oder eines der horizontalen Prismen $m\breve{P}\infty$, und $m\bar{P}\infty$; die äquivalente Zwillingsaxe ist eine der Mittelkanten von $\breve{\bar{P}}n$, die makrodiagonale Polkante von mP, und die brachydiagonale Polkante von mP;

e) im monoklinoëdrischen Systeme, wenn die Zwil-

lingsaxe die Normale irgend eines horizontalen Hemiprismas $\pm m$P∞; die äquivalente Zwillingsaxe ist die klinodiagonale Polkante der Hemipyramide $\pm m$P.

Wiewohl die Wahl unter zwei äquivalenten Zwillingsaxen im Allgemeinen willkürlich ist, so entspricht doch oft die eine mehr als die andre dem Habitus der Zwillingskrystalle; auch ist zu bemerken, dass diese Willkür, so wie der äquivalente Charakter beider Axen selbst jedenfalls aufhört, wenn nicht eine absolute Gleichwerthigkeit der beiden Hälften einer jeden krystallographischen Axe Statt findet, weil durch die Vertauschung der Zwillingsaxe alle Mal eine Aenderung in der Lage jener Axen herbeigeführt wird, indem entweder je zwei derselben ihre Stelle gänzlich vertauschen, oder doch die einzelen die Lage ihrer Pole umkehren. Diese Umkehrung der Pole hat zumal für die Zwillinge gewisser hemiëdrischer Formen die Folge, dass sich nur e i n e von den beiden, für holoëdrische Formen äquivalenten Linien als ihre Zwillingsaxe betrachten lässt, weil die andre nicht mehr genau dasselbe Resultat liefern würde.

§. 563.

Verbindungsgesetz der Zwillingskrystalle.

Die Eigenthümlichkeit eines Zwillingskrystalles wird jedoch mit der Angabe des Stellungsgesetzes allein keinesweges erschöpft; vielmehr wird dazu noch die Angabe des Verbindungsgesetzes erfordert. Die Individuen eines Zwillinges sind nämlich mit einander entweder durch J u x t a p o s i t i o n oder durch P e n e t r a t i o n verbunden, d. h. sie sind entweder nur a n einander oder d u r c h einander gewachsen. Die regelmässigste Erscheinungsweise der Zwillinge pflegt diejenige zu seyn, da beide Individuen (bei übrigens gleichen Gestalten und Dimensionen) entweder

Digitized by Google

durch vollkommene Juxtaposition oder durch vollkommene Penetration verbunden sind. Im ersteren Falle berühren sie sich entweder in derjenigen Krystallfläche, welche auf der Zwillingsaxe normal ist, oder in einer von denjenigen Krystallflächen, welche derselben Axe parallel sind; im letzteren Falle sind beide Individuen um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct ausgebildet; sie durchdringen sich gegenseitig nach allen Richtungen und stellen eine förmliche Decussation oder regelmässige Durchkreuzung dar. Wiewohl nun beide Fälle in der Natur sehr häufig vorkommen, so finden sich doch nicht minder häufig andre Vorkommnisse, welche weder dem einen, noch dem andern Falle entsprechen, und daher unter den besondern Fall einer partiellen Penetration gehören, indem die Individuen in der Richtung der Zwillingsaxe oder einer ihrer Normalen nur mehr oder weniger in einander geschoben sind, so dass ein theilweises Eingreifen und eine theilweise Absonderung zugleich Statt findet.

Für den Fall einer vollkommenen Juxtaposition lassen sich übrigens die Zwillinge sehr anschaulich nach der Mohs'schen Formel beschreiben, indem man diejenige Fläche, in welcher sich beide Individuen berühren, als die Zusammensetzungsfläche, und diejenige Linie, um welche das eine Individuum gegen das andere verdreht ist, als die Umdrehungsaxe bezeichnet.

§. 563 a.

Verkürzung der Individuen.

Eine sehr häufig vorkommende Erscheinung in den Zwillingskrystallen ist es, dass die einzelen Individuen in der Richtung der Zwillingsaxe bedeutend verkürzt, oder viel weniger ausgedehnt sind, als nach andern Richtungen. Diese Verkürzung geht oft so

Digitized by Google

weit, dass z. B. die vielaxigen Krystalle, welche doch eigentlich nach allen Richtungen ziemlich gleiche, oder die einaxigen Krystalle, welche nach einer Richtung sehr vorherrschende Ausdehnung haben, oft nur tafelartig erscheinen, indem die beiden, auf der Zwillingsaxe senkrechten Flächen oder Flächensysteme sehr vorherrschend, die übrigen Flächen aber sehr untergeordnet ausgebildet sind.

Hierher gehört auch der häufig vorkommende Fall, dass beide Individuen die symmetrischen Hälften eines einzigen Individuums darstellen, indem die Verkürzung in der Art Statt fand, dass die einander zugekehrten Hälften der Individuen verdrängt wurden. Die Zwillinge erhalten dadurch ganz das Ansehen, als ob ein einziges Individuum der Zusammensetzungsfläche parallel in zwei Hälften zerschnitten, und die eine Hälfte gegen die andere um 180° verdreht worden wäre. Diesen Zwillingen insbesondere entsprechen die Haüyschen Ausdrücke Hemitropie und Transposition.

§. 564.

Wiederholte Zwillingsbildung.

Die Zwillingsbildung kann entweder ohne oder mit Wiederholung Statt finden, in welchem letzteren Falle die Drillings-, Vierlingskrystalle u. s. w. entstehen. Diese Wiederholung liefert jedoch sehr verschiedene Resultate, je nachdem sie mit durchgängig parallelen oder mit geneigten Zusammensetzungsflächen eintritt. Es sey z. B. *ABCD*, Fig. 603, der Querschnitt eines rhombischen Prismas ∞P, mit welchem ein zweites Prisma durch Juxtaposition nach dem Gesetze verbunden ist, dass die Zwillingsaxe normal, die Zusammensetzungsfläche parallel einer Fläche von ∞P; ist nun mit diesem zweiten Individuum ein drittes Individuum dergestalt verbunden,

dass die Zusammensetzungsfläche von II und III der Zusammensetzungsfläche von I und II parallel ist, so findet die Wiederholung mit durchgängig parallelen Zusammensetzungsflächen Statt, und es könnte sich auf ähnliche Weise ein viertes, fünftes, sechstes Individuum anschliessen, weil die Wiederholung in diesem Falle ohne Gränzen Statt finden kann. Ist dagegen das Individuum III mit dem Individuo II so verbunden wie in Fig. 604 oder Fig. 605, so ist zwar in dem Stellungsgesetze je zweier Individuen nichts geändert, allein die successiven Zusammensetzungsflächen sind nicht parallel, sondern geneigt; auch könnte sich in Fig. 604 noch ein viertes und fünftes Individuum zu den bereits vorhandenen gesellen, aber man sieht leicht, dass diese Art der Wiederholung ihre nothwendige Gränze erreicht, sobald eine gewisse Anzahl von Individuen beisammen ist. Es entstehen nämlich, bei fortgesetzter Wiederholung, in sich selbst zurücklaufende Gruppen von Individuen, und die Zahl der möglichen ganzen Individuen ist $\frac{360°}{w}$, wenn w der an der Gruppirungsaxe in A liegende Kantenwinkel der Prismen ist. Wird diese Zahl erfüllt, so bleibt entweder ein leerer Zwischenraum zwischen dem ersten und letzten Individuum, welcher dann gewöhnlich durch die fortsetzende Masse derselben ausgefüllt wird; oder das überzählig hinzutretende Individuum ist nur unvollständig ausgebildet, und durchkreuzt oder umschliesst zum Theil das erste Individuum.

§. 565.

Fortsetzung.

Die Wiederholung mit geneigten Zusammensetzungsflächen und diejenige mit parallelen Zusammensetzungs-

flächen finden bisweilen zugleich Statt. Gilt z. B. für das Prisma *ABCD*, Fig. 606, dasselbe Gesetz der Zwillingsbildung wie im vorhergehenden §., so kann sich an jede der vier Flächen des Prismas ein anderes anlegen, so dass *ABCD* gleichsam den Träger oder das centrale Individuum der ganzen Gruppe bildet, welche einen sehr symmetrischen Fünflingskrystall darstellt, in dem alle drei, in den Figg. 603, 604 und 605 abgebildeten Verbindungsarten zugleich vorhanden sind. Noch auffallender wird diese Art der Wiederholung, wenn die Zwillingsaxe nicht die Normale eines Prismas, sondern die einer geschlossenen Gestalt, wie z. B. einer Pyramide oder eines Rhomboëders ist.

Ueberhaupt also sind folgende Arten der Wiederholung zu unterscheiden: sie findet Statt

a) mit durchgängig parallelen Zusammensetzungsflächen; reihenartige Bildung;

b) mit durchgängig geneigten Zusammensetzungsflächen; kreisartige Bildung;

c) mit parallelen und geneigten Zusammensetzungsflächen; symmetrische Bildung.

Uebrigens versteht es sich von selbst, dass die Wiederholung mit geneigten Zusammensetzungsflächen nur dann möglich ist, wenn die Zwillingsaxe einer solchen Gestalt oder Theilgestalt entspricht, welche mehr als ein Flächenpaar besitzt. Aus diesem Grunde ist sie auch z. B. in den Krystallreihen des triklinoëdrischen Systemes ganz unmöglich. Endlich ist zu bemerken, dass die in §. 563 erwähnte Verkürzung der Individuen bei der Wiederholung mit parallelen Zusammensetzungsflächen besonders auffallend zu seyn pflegt, indem zumal die mittleren Individuen oft nur als mehr oder weniger dünne Lamellen erscheinen, welche zwischen die äusseren Individuen eingeschoben sind.

Digitized by Google

§. 566.

Terminologie der Zwillinge.

Wir nennen die Kanten und Ecke, in welchen sich die Flächen der beiden Individuen eines Zwillinges schneiden, Zwillingskanten und Zwillingsecke. Bisweilen fallen zwei gleichnamige Flächen beider Individuen so genau in eine Ebene, dass man durchaus keine Absonderung wahrzunehmen vermag, wenn nicht Streifungen oder sonstige Verhältnisse ein Anhalten geben; die Linie, in welcher beide Individuen aneinanderstossen, und welche eine solche Fläche in zwei Hälften theilt, von welchen die eine dem einen, die andre dem andern Individuo angehört, nennen wir die Demarcationslinie der Individuen. Die Gränze der beiden Individuen eines Zwillinges kann daher auf der Oberfläche des Krystalles entweder durch Zwillingskanten oder durch Demarcationslinien, oder durch beide zugleich bezeichnet seyn. Die Zwillingkanten sind theils ausspringend, theils einspringend (§. 33), und einspringende Kanten überhaupt ein Merkmal der Zusammensetzung, weil dergleichen an den Gestalten der Individuen nicht vorkommen können.

Zweites Capitel.

Zwillinge des Tesseralsystemes.

A. Theorie.

§. 567.

Geometrische Beziehungen zwischen den Hauptaxen beider Individuen.

Wenn wirklich das in §. 561 ausgesprochene Gesetz der Zwillingsbildung überhaupt zum Grunde liegt,

Digitized by Google

so werden wir, um die Theorie der Zwillingsbildung für das Tesseralsystem insbesondere in ihrer grössten Allgemeinheit zu entwickeln, von der Voraussetzung ausgehen müssen, die Zwillingsaxe sey die Flächennormale irgend eines Hexakisoktaëders mOn. Wir denken beide Individuen um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct, von gleichen Hauptaxen, und das eine gegen das andere um die Zwillingsaxe durch 180° verdreht. Das nächste und wichtigste Problem ist nun, die Hauptaxen des einen Individuums II in Bezug auf die Hauptaxen des andern Individuums I auszudrücken, oder dieselben als Linien darzustellen, welche uns in dem Axensysteme des Individuums I gegeben sind.

Die Zwillingsaxe falle in den Octanten der positiven Halbaxen von I, und sey die Normale der Fläche

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$$

so werden ihre Gleichungen:

$$\frac{x}{n} - \frac{y}{m} = 0, \quad \frac{z}{m} - x = 0, \quad y - \frac{z}{n} = 0$$

und ihre Neigungswinkel X, Y und Z zu den Axen der x, y und z bestimmen sich durch folgende Cosinus

$$\cos X = \frac{n}{M}, \quad \cos Y = \frac{m}{M}, \quad \cos Z = \frac{mn}{M}$$

wenn

$$M = \sqrt{m^2 n^2 + m^2 + n^2}$$

Da die Drehung des Individuums II genau durch 180° Statt fand, so liegt noch jede Hauptaxe von II in der Ebene durch die gleichnamige Hauptaxe von I und durch die Zwillingsaxe; hieraus folgt, dass für jede der Axen von II eine der Projectionsgleichungen der Zwillingsaxe gilt; bezeichnen wir sie daher als die Axen der x', y' und z', so wird zuvörderst

Digitized by Google

$$\text{für Axe der } x' \ldots\ldots y - \frac{z}{n} = 0$$

$$\text{- - - } y' \ldots\ldots \frac{z}{m} - x = 0$$

$$\text{- - - } z' \ldots\ldots \frac{x}{n} - \frac{y}{m} = 0$$

Ferner bildet jede der Hauptaxen von II mit der Zwillingsaxe denselben Winkel wie die gleichnamige Hauptaxe von I; führt man also für jede derselben eine zweite Gleichung mit den hypothetischen Parametern α und β ein, so findet man nach bekannten Regeln die Werthe von $\cos X'$, $\cos Y'$ und $\cos Z'$, wie z.B.

$$\cos X' = \frac{\alpha n - \beta(n^2+1)m}{M\sqrt{\alpha^2 + \beta^2(n^2+1)}} \text{ u. s. w.}$$

und erhält aus den Bedingungsgleichungen

$$\cos X' = \cos X$$
$$\cos Y' = \cos Y$$
$$\cos Z' = \cos Z$$

das Verhältniss der Grössen α und β. Auf diese Art gelangt man endlich auf folgende Gleichungen der Axen des Individuums II in Bezug auf die Axen des Individuums I:

Gleichungen der Axe der x',

$$\frac{x}{m^2n^2 + m^2 - n^2} + \frac{y}{2mn} = 0$$

$$y - \frac{z}{n} = 0$$

Gleichungen der Axe der y',

$$\frac{x}{2mn} + \frac{y}{m^2n^2 + n^2 - m^2} = 0$$

$$\frac{z}{m} - x = 0$$

Gleichungen der Axe der z',

$$\frac{x}{n} - \frac{y}{m} = 0$$

$$\frac{z}{m^2n^2 - m^2 - n^2} - \frac{x}{2mn^2} = 0$$

Man darf nur in diesen Gleichungen für m und n die, irgend einem besondern Falle entsprechenden, numerischen Werthe substituiren, um sie diesem Falle zu accomodiren.

§. 568.

Erstes Zwillingsgesetz.

Bis jetzt sind im Tesseralsysteme nur folgende zwei Stellungsgesetze bestimmt nachgewiesen worden:

1) Die Zwillingsaxe ist eine der trigonalen Zwischenaxen.

2) Die Zwillingsaxe ist eine der rhombischen Zwischenaxen.

Wir wollen nun zuvörderst das erste Gesetz genauer in Betrachtung ziehen.

Da die trigonalen Zwischenaxen die Flächennormalen des Oktaëders sind, dessen eine Fläche durch die Gleichung

$$x + y + z = 1$$

repräsentirt wird, so setzen wir in unsern Gleichungen für die Axen des Individuums II

$$m = n = 1$$

und erhalten dann folgende Gleichungen für diese Axen:

für die Axe der $x' \ldots\, x + \frac{y}{2} = 0,\ y - z = 0$ (1)

- - - - $y' \ldots\, \frac{x}{2} + y = 0,\ x - z = 0$ (2)

- - - - $z' \ldots\, x - y = 0,\ z + \frac{x}{2} = 0$ (3)

Diese drei Systeme von Gleichungen entsprechen aber den Normalen der Flächen

$$-\frac{x}{2} + y + z = 1$$

$$x - \frac{y}{2} + z = 1$$

$$x + y - \frac{z}{2} = 1$$

Digitized by Google

welche drei Flächen des Triakisoktaëders 2O sind; folglich fallen bei diesem Zwillingsgesetze die Hauptaxen des einen Individuums in die Normalen dreier Flächen von 2O des andern Individuums und *vice versa*; oder die Hexaëderflächen des einen Individuums sind dreien Flächen von 2O am andern Individuo parallel.

§. 569.

Transformation der Coordinaten des Individuums II.

Wir wollen nun auch die Zwischenaxen des Individuums II in Bezug auf das Axensystem des Individuums I fixiren. Dazu gelangen wir am leichtesten mittels der bekannten Sätze über die Transformation der Coordinaten. Die analytische Geometrie lehrt nämlich, dass, wenn wir eine in Bezug auf das Axensystem II gegebene Gleichung so darstellen wollen, wie sie sich auf das Axensystem I bezieht, für die Coordinaten x', y' und z' in der gegebenen Gleichung folgende Werthe substituirt werden müssen:

$$x' = x\cos(X'X) + y\cos(X'Y) + z\cos(X'Z)$$
$$y' = x\cos(Y'X) + y\cos(Y'Y) + z\cos(Y'Z)$$
$$z' = x\cos(Z'X) + y\cos(Z'Y) + z\cos(Z'Z)$$

wenn $(X'X)$, $(X'Y)$, $(X'Z)$ die Neigungswinkel der Axe der x' gegen die Axen der x, der y, der z u. s. w.

Da nun allgemein für eine durch die Gleichungen

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0, \quad \frac{z}{\gamma} + \frac{x}{\delta} = 0$$

bestimmte Linie die Cosinus der Neigungswinkel X, Y und Z gegen die Axen folgende sind,

$$\cos X = \frac{\alpha\delta}{N}, \quad \cos Y = \frac{\beta\delta}{N}, \quad \cos Z = \frac{\gamma\alpha}{N}$$

wo $$N = \sqrt{\alpha^2\delta^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\alpha^2}$$

so werden in unserm Falle

$$\cos(X'X) = -\tfrac{1}{3}, \quad \cos(X'Y) = \tfrac{2}{3}, \quad \cos(X'Z) = \tfrac{2}{3}$$
$$\cos(Y'X) = \tfrac{2}{3}, \quad \cos(Y'Y) = -\tfrac{1}{3}, \quad \cos(Y'Z) = \tfrac{2}{3}$$
$$\cos(Z'X) = \tfrac{2}{3}, \quad \cos(Z'Y) = \tfrac{2}{3}, \quad \cos(Z'Z) = -\tfrac{1}{3}$$

Digitized by Google

und daher die zu substituirenden Werthe der Coordinaten x', y' und z' folgende:

$$x' = \tfrac{1}{3}(-x + 2y + 2z)$$
$$y' = \tfrac{1}{3}(2x - y + 2z)$$
$$z' = \tfrac{1}{3}(2x + 2y - z)$$

§. 570.

Gleichungen der rhombischen Zwischenaxen des Individuums II.

Nachdem wir die Transformation der Coordinaten des Individuums II kennen gelernt, ist es ein sehr leichtes Geschäft, die Gleichungen aller möglichen Linien und Flächen dieses Individuums auf das Axensystem des Individuums I zu beziehen. Was nun zuvörderst die rhombischen Zwischenaxen desselben betrifft, so werden solche, auf sein eigenes Axensystem bezogen, durch folgende Gleichungen repräsentirt:

Axen in der Ebene $y'z'$, ... $x'=0$, $y' \pm z'=0$
\- - - - - $z'x'$, ... $y'=0$, $z' \pm x'=0$
\- - - - - $x'y'$, ... $z'=0$, $x' \pm y'=0$

Substituirt man für x', y' und z' ihre aus dem vorhergehenden §. bekannten Werthe, so erhält man folgende transformirte, d. h. auf das Axensystem des Individuums I bezogene Gleichungen dieser Zwischenaxen:

Axen in der Ebene $y'z'$ .... $\begin{cases} x = 0, \; y + z = 0 & (4) \\ \frac{x}{4} - y = 0, \; z - \frac{x}{4} = 0 & (5) \end{cases}$

\- - - - - $z'x'$ .... $\begin{cases} y = 0, \; z + x = 0 & (6) \\ \frac{y}{4} - z = 0, \; x - \frac{y}{4} = 0 & (7) \end{cases}$

\- - - - - $x'y'$ .... $\begin{cases} z = 0, \; x + y = 0 & (8) \\ \frac{z}{4} - x = 0, \; y - \frac{z}{4} = 0 & (9) \end{cases}$

Die Gleichungen (4), (6) und (8) sind keine anderen, als die Gleichungen dreier rhombischer Zwischenaxen des Individuums I; folglich müssen drei

Digitized by Google

dieser Zwischenaxen des einen mit dreien des andern Individuums, oder die sechs der Zwillingsaxe parallelen Flächen des Rhombendodekaëders in beiden Individuen coincidiren.

Die Gleichungen (5), (7) und (9) sind keine anderen, als die Gleichungen dreier Flächennormalen der Gestalt 4O4; folglich werden die sechs gegen die Zwillingsaxe geneigten Flächen des Rhombendodekaëders im einen Individuo den sechs, an den Polen derselben Zwillingsaxe gelegenen Flächen des Ikositetraëders 4O4 im andern Individuo parallel, und *vice versa*.

§. 571.

Gleichungen der trigonalen Zwischenaxen des Individuums II.

Die Gleichungen der trigonalen Zwischenaxen des Individuums II sind, auf sein eigenes Axensystem bezogen, folgende:

$$x' - y' = 0,\ z' - x' = 0,\ y' - z' = 0$$
$$x' - y' = 0,\ z' + x' = 0,\ y' + z' = 0$$
$$x' + y' = 0,\ z' - x' = 0,\ y' + z' = 0$$
$$x' + y' = 0,\ z' + x' = 0,\ y' - z' = 0$$

Substituirt man für x', y' und z' ihre Werthe aus §. 569, so erhält man folgende transformirte, d. h. auf das Axensystem des Individuums I bezogene Gleichungen dieser Zwischenaxen:

$$x - y = 0,\ z - x = 0,\quad y - z = 0 \quad (10)$$
$$x - y = 0,\ x + \frac{z}{5} = 0,\quad y + \frac{z}{5} = 0 \quad (11)$$
$$x + \frac{y}{5} = 0,\ z - x = 0,\quad \frac{y}{5} + z = 0 \quad (12)$$
$$\frac{x}{5} + y = 0,\ z + \frac{x}{5} = 0,\quad y - z = 0 \quad (13)$$

Die Gleichungen (10) sind keine anderen, als diejenigen der in den Octanten der positiven Halbaxen fallenden trigonalen Zwischenaxe des Individuums I;

Digitized by Google

eine trigonale Zwischenaxe des einen coincidirt also mit einer trigonalen Zwischenaxe des andern Individuums, wie dies schon durch das Zwillingsgesetz selbst ausgesprochen ist, da ja die Zwillingsaxe eine der trigonalen Zwischenaxen ist.

Die Gleichungen (11), 12) und (13) dagegen entsprechen den Flächennormalen dreier Flächen des Ikositetraëders 5O5, woraus denn folgt, dass sechs Oktaëderflächen an dem einen Individuo sechs Flächen von 5O5 an dem andern Individuo parallel sind.

§. 572.

Gleichung irgend einer Fläche des Individuums II.

Die in den beiden vorhergehenden §§. gelösten Probleme lassen sich von einem allgemeineren Gesichtspuncte auffassen. Weil nämlich die Hauptaxen und Zwischenaxen nichts anderes sind als die Normalen der Flächen von $\infty O \infty$, ∞O und O, und weil diese Flächen in jedem, nach dem ersten Gesetze gebildeten Zwillinge gewissen Flächen anderer, reeller, und nicht blos imaginärer *) Gestalten parallel werden, so wäre es wohl möglich, dass in diesen Zwillingen die Flächen einer jeden Gestalt mOn des einen Individuums überhaupt den Flächen irgend anderer Gestalten des zweiten Individuums parallel würden. Hierüber lässt sich leicht entscheiden. Es sey nämlich am Individuo II irgend eine Fläche in Bezug auf sein eigenes Axensystem durch die Gleichung

$$\frac{x'}{m} + \frac{y'}{n} + z' = 1$$

gegeben. Man substituire nun für x', y' und z' ihre Werthe aus §. 569, so erhält man die transformirte,

*) Imaginär sind solche Gestalten, deren Ableitungszahlen irrational sind.

Digitized by Google

d. h. in Bezug auf das Axensystem I ausgedrückte, Gleichung derselben Fläche, wie folgt:

$$x(2mn+2m-n)+y(2mn+2n-m)+z(2m+2n-mn)=3mn$$

welche jedenfalls einer reellen Fläche entspricht, wie auch die Vorzeichen von m und n gewählt, und wie auch die Coëfficienten von x, y und z vertauscht werden mögen, d. h. mit andern Worten: welches von den 24 Gegenflächenpaaren der Gestalt mOn am Individuo II auf das Axensystem des Individuums I bezogen werden mag.

Es ist daher ein allgemeines Gesetz dieser Zwillinge, dass jede Krystallfläche des einen Individuums einer reellen (ob ausgebildet oder nicht, ist gleichgültig) Fläche des zweiten Individuums parallel ist, und *vice versa* *).

---

*) Da es für die Anwendung dieser Resultate bei der Berechnung der Zwillingskanten u. dgl. sehr wichtig ist, nicht nur die Grösse, sondern auch die Lage der Parameter zu kennen, welche die Parallelfläche irgend einer gegebenen Fläche des Individuums II bestimmen; so scheint es zweckmässiger, die gegebene Gleichung allgemeiner, etwa in der Form

$$\frac{x'}{a}+\frac{y'}{b}+\frac{z'}{c}=1$$

zu Grunde zu legen, worauf sich in der Gleichung der Parallelfläche

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{s}=1$$

die Parameter p, q und s bestimmen, wie folgt:

$$p=\frac{3abc}{2ab+2ca-bc}$$

$$q=\frac{3abc}{2bc+2ab-ca}$$

$$s=\frac{3abc}{2ca+2bc-ab}$$

Substituirt man für a, b und c die, einer gegebenen Fläche des Individuums II entsprechenden Parameter, mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen, so erhält man die Werthe von p, q und s mit unzweideutiger Bestimmung ihrer Lage in den positi-

Digitized by Google

§. 573.

Parallelflächen von *mOn*.

Führt man die im vorigen §. angedeutete Vertauschung der Zeichen durch, so erhält man folgendes Resultat:

Die Flächen irgend eines Hexakisoktaëders *mOn* am einen Individuo sind zu je sechs den Flächen vierer Hexakisoktaëder am andern Individuo parallel.

Diese vier sechszähligen Flächeninbegriffe von *mOn*, und die ihnen im andern Individuo entsprechenden vier Hexakisoktaëder bestimmen sich auf folgende Weise *):

a) Der erste Flächeninbegriff ist dasjenige sechszählige Flächensystem, welches mit der Zwillingsaxe unmittelbar zum Durchschnitte kommt, oder in dem Octanten der positiven Halbaxen liegt; seinen Flächen sind sechs Flächen des Hexakisoktaëders

---

ven oder negativen Halbaxen der *x*, *y* und *z*. Für den Octanten der Zwillingsaxe z. B. sind *a*, *b* und *c* jedenfalls positiv, und ihre den sechs verschiedenen Flächen dieses Octanten entsprechenden Werthe folgende:

	a	*b*	*c*
1ste Fläche	*m*	*n*	1
2te - -	*m*	1	*n*
3te - -	*n*	*m*	1
4te - -	*n*	1	*m*
5te - -	1	*m*	*n*
6te - -	1	*n*	*m*

Für den einen Nebenoctanten ist *a*, für den zweiten *b*, und für den dritten *c* negativ zu nehmen.

*) Die vier Flächeninbegriffe entsprechen den vier Skalenoëdern, als deren Combination das Hexakisoktaëder erscheint, wenn es nach der Zwillingsaxe aufrecht gestellt wird; vergl. den Anhang zur reinen Krystallographie.

Digitized by Google

$$\frac{2mn+2m-n}{2m+2n-mn}O\frac{2mn+2m-n}{2mn+2n-m}$$

im andern Individuo parallel.

b) Der zweite Flächeninbegriff begreift diejenigen sechs Flächen aus den drei Nebenoctanten, welche mit dem ersten Flächeninbegriffe zum Durchschnitte kommen, oder die ersten Nebenflächen der Flächen *sub* a; seinen Flächen sind sechs Flächen des Hexakisoktaëders

$$\frac{2mn+2m+n}{2mn-2n-m}O\frac{2mn+2m+n}{mn+2n-2m}$$

im andern Individuo parallel.

c) Der dritte Flächeninbegriff begreift die Nebenflächen der Flächen *sub* b, oder die zweiten Nebenflächen der Flächen *sub* a; seinen Flächen sind sechs Flächen des Hexakisoktaëders

$$\frac{2mn+2n+m}{2mn-2m-n}O\frac{2mn+2n+m}{mn+2m-2n}$$

im andern Individuo parallel.

d) Der vierte Flächeninbegriff endlich begreift die noch übrigen Flächen aus den Nebenoctanten des ersten, oder die dritten Nebenflächen der Flächen *sub* a; seinen Flächen sind sechs Flächen des Hexakisoktaëders

$$\frac{mn+2m+2n}{2mn+n-2m}O\frac{mn+2m+2n}{2mn+m-2n}$$

im andern Individuo parallel.

§. 574.

Parallelflächen von mOm.

Setzt man $n=m$, so verwandelt sich das Hexakisoktaëder in ein Ikositetraëder, und die vier Flächeninbegriffe des vorigen §. modificiren sich wie folgt:

1) Der erste Flächeninbegriff wird dreizählig, und

Digitized by Google

jede seiner Flächen einer Fläche des Triakisoktaëders

$$\frac{2m+1}{4-m}O$$

im andern Individuo parallel; ist daher $m=4$, so werden die drei um die Zwillingsaxe gelegenen Flächen von 4O4 des einen Individuums den drei analog liegenden Flächen von ∞O des andern parallel; ist $m>4$, so werden die drei an der Zwillingsaxe gelegenen Flächen von mOm denjenigen Flächen des Triakisoktaëders parallel, welche ihrer Lage nach dem zweiten Inbegriffe des vorigen §. entsprechen.

2) Der zweite und dritte Flächeninbegriff fallen zusammen, und bilden den sechszähligen Inbegriff der Nebenflächen der drei vorhergehenden; diesen Flächen sind im Allgemeinen sechs Flächen des Hexakisoktaëders

$$\frac{2m+3}{2m-3}O\frac{2m+3}{m}$$

parallel, in dessen Zeichen jedoch die Coëfficienten zu vertauschen sind, wenn $m>3$; ist $m=3$, oder $mOm=3O3$, so wird auch die zweite Gestalt $=3O3$; ein Resultat, welches mit der in §. 136 erwähnten Eigenschaft des Trigondodekaëders $\frac{3O3}{2}$ zusammenhängt, dass seine sechsflächigen Ecke hexagonal sind.

3) Der vierte Flächeninbegriff des vorigen §. wird wiederum dreizählig, und besteht aus den drei Nebenflächen des vorhergehenden sechszähligen Inbegriffs; seine Flächen werden parallel dreien Flächen

des Ikositetraëders $\frac{m+4}{2m-1}O\frac{m+4}{2m-1}$, wenn $m<5$

des Oktaëders . . . . O, wenn $m = 5$

des Triakisoktaëders $\frac{2m-1}{m+4}O$, - - $m > 5$

§. 575.

Parallelflächen von *m*O.

Setzt man $n = 1$, so verwandelt sich das Hexakisoktaëder in ein Triakisoktaëder, und die vier Flächeninbegriffe der ersteren Gestalt modificiren sich, wie folgt:

1) Der erste Inbegriff wird dreizählig, und seine Flächen entsprechen dreien Flächen des Ikositetraëders
$$\frac{4m-1}{m+2}O\frac{4m-1}{m+2}$$
im andern Individuo.

2) Der zweite Flächeninbegriff von *m*O*n* wird ebenfalls dreizählig, und begreift die drei Nebenflächen der vorhergehenden; diese werden dreien Flächen des Ikositetraëders
$$\frac{4m+1}{m-2}O\frac{4m+1}{m-2}$$
im andern Individuo parallel; ist also $m = 2$, so entsprechen die erwähnten Flächen von I dreien Hexaëderflächen von II, und *vice versa.*

3) Der dritte und vierte Inbegriff des Hexakisoktaëders bilden gemeinschaftlich einen einzigen sechszähligen Flächeninbegriff des Triakisoktaëders, nämlich denjenigen, dessen Flächen die Nebenflächen der drei vorhergehenden sind; ihnen werden sechs Flächen des Hexakisoktaëders
$$(3m+2)O\frac{3m+2}{3m-2}$$
im andern Individuo parallel.

Digitized by Google

§. 576.

Parallelflächen von ∞On.

Wird $m = \infty$, so verwandelt sich das Hexakisoktaëder in das Tetrakishexaëder, und die vier Flächeninbegriffe der erstern Gestalt modificiren sich, wie folgt:

1) Der erste und zweite Inbegriff von mOn fallen zusammen, und bilden den an der Zwillingsaxe gelegenen sechszähligen Flächeninbegriff von ∞On; seinen Flächen sind sechs Flächen des Hexakisoktaëders

$$\frac{2(n+1)}{n-2}O\frac{2(n+1)}{2n-1}$$

parallel, welches für $n = 2$ wiederum in das Tetrakishexaëder $\infty O2$ übergeht; dieses Resultat hängt mit der bekannten Eigenschaft dieser Gestalt zusammen, dass ihre Kanten gleiches Winkelmaass haben, und folglich ihre sechsflächigen Ecke hexagonal sind.

2) Der dritte Flächeninbegriff von mOn entspricht einem einzigen sechszähligen Inbegriffe von ∞On, nämlich demjenigen, dessen Flächen die Nebenflächen der vorhergehenden sind; ihnen werden sechs Flächen des Hexakisoktaëders

$$\frac{2n+1}{2(n-1)}O\frac{2n+1}{n+2}$$

parallel, dessen Coëfficienten für $n > 4$ vertauscht werden müssen, während es für $n = 4$ in das Ikositetraëder

$$\tfrac{3}{2}O\tfrac{3}{2}$$

übergeht.

Der vierte Flächeninbegriff von mOn entspricht in ∞On den Parallelflächen des dritten Inbegriffes, und giebt daher kein besonderes Resultat.

§. 577.

Berechnung der Zwillingskanten.

Die Zwillingskanten lassen sich nun sowohl ihrer Lage als ihrem Winkelmaasse nach leicht bestimmen, da wir wissen, dass es für jede Fläche am einen Individuo irgend eine reelle Fläche am anderen Individuo giebt, welche ihr parallel ist. Soll nämlich irgend eine Zwillingskante berechnet werden, so bestimmt man zuvörderst die Gleichung der einen Fläche (des Individuums I) unmittelbar aus ihrem krystallographischen Zeichen; die Gleichung der zweiten Fläche (des Individuums II) bestimmt man vorläufig gleichfalls aus ihrem krystallographischen Zeichen in Bezug auf das Axensystem II, transformirt sie aber hierauf und reducirt sie dadurch auf das Axensystem I. Nun lassen sich die Gleichungen beider Flächen nach den bekannten Regeln der analytischen Geometrie combiniren, und sowohl die Lage der Zwillingskante als auch ihre Länge, ihr Winkelmaass und alles Uebrige berechnen, was man etwa zu wissen wünscht*).

§. 578.

Zweites Zwillingsgesetz.

Das zweite Zwillingsgesetz (§. 568) setzt voraus, dass die Zwillingsaxe eine der rhombischen Zwischenaxen, oder eine Flächennormale von ∞O ist; setzt man in den Gleichungen der Axen der x', y' und z' des §. 567

$$m = \infty \text{ und } n = 1$$

so erhalten sie folgende Werthe:

Axe der x', ... $y = 0$, $z = 0$
- - y', ... $x = 0$, $y = 0$
- - z', ... $x = 0$, $z = 0$

---

*) Welchen Vortheil die Resultate der Theorie für die Zeichnung der Zwillingskrystalle gewähren, sowohl in diesem als auch besonders in den übrigen Krystallsystemen, wird Jedem einleuchten, der sich mit Zeichnungen der Art beschäftigt hat.

Digitized by Google

Folglich coincidiren die Hauptaxen beider Individuen, jedoch so, dass die eine ihre Pole, und die andern beiden ihre Lage vertauscht haben. Für holoëdrische Gestalten und Combinationen, in welchen um jede einzele Hauptaxe eine vollkommene Symmetrie nach der Richtung beider andern Hauptaxen Statt findet, giebt daher dieses Stellungsgesetz gar kein Resultat, weil das eine Individuum mit dem andern in allen seinen Theilen coincidiren, und folglich ein durchgängiger Parallelismus der Axen sowohl als der Flächen Statt finden würde, wodurch der Begriff des Zwillingskrystalles aufgehoben ist. Um so wichtiger wird dieses Gesetz für die semitesseralen Formen, deren Zwillinge grösstentheils nach ihm gebildet sind, und das Resultat geben, dass sich beide Individuen genau in derjenigen Stellung befinden, in welcher sie als hemiëdrische Complemente oder Gegenkörper aus einer und derselben holoëdrischen Gestalt abzuleiten sind, daher man denn auch das zweite allgemeine Gesetz in §. 561 geltend machen kann.

Wie die Hauptaxen so coincidiren natürlich auch die beiderlei Zwischenaxen, wiewohl auch sie ihre Lage oder doch die Lage ihrer Pole vertauschen. Dasselbe gilt von den Flächennormalen aller möglichen Gestalten; nur werden in den Zwillingen parallelflächig-semitesseraler Formen die flächentragenden Normalen des einen Individuums mit den nicht flächentragenden Normalen des andern, in den Zwillingen geneigtflächig-semitesseraler Formen dagegen die flächentragenden Hälften der Normalen des einen Individuums mit den nicht flächentragenden Hälften der Normalen des andern coincidiren, und *vice versa.*

Bei dem gewöhnlich Statt findenden Falle einer vollkommenen Durchkreuzung sind die Zwillingskanten in den geneigtflächig-semitesseralen Zwillingen ihrer Lage und Grösse nach identisch, ihrem Win-

Digitized by Google

kelmaasse nach supplementär mit denjenigen Kanten der resp. holoëdrischen Gestalt oder Combination, welche in die normalen Hauptschnitte fallen; in den parallelflächig-semitesseralen Zwillingen dagegen ihrer Lage und Grösse nach identisch, ihrem Winkelmaasse nach supplementär mit denjenigen Kanten der resp. holoëdrischen Gestalt oder Combination, welche in die diagonalen Hauptschnitte fallen (§. 71). Das Netz der Zwillingskanten ist also allgemein in dem Zwillinge $2\frac{mOn}{2}$ identisch mit dem Netze der Kanten *B*, in dem Zwillinge $2\left[\frac{mOn}{2}\right]$ dagegen identisch mit dem Netze der Kanten *A* und *C* in *mOn*.

§. 578 a.

Andere Zwillingsgesetze.

Ganz kürzlich hat Burhenne auf das Daseyn vieler anderer Zwillingsgesetze aufmerksam gemacht, welche sich im Gebiete des Tesseralsystemes verwirklicht finden sollen; zugleich hat derselbe die Erscheinung der Zwillingsbildung überhaupt auf gewisse krystallonomische Principien zurückzuführen gesucht, und dadurch die Bahn zu sehr fruchtbaren Untersuchungen über diesen Gegenstand gebrochen *). So stellt er z. B. unter andern Gesetzen auch folgendes auf:

Die Zwillingsbildung ist allemal möglich, sobald die Hauptaxen des einen Individuums den Normalen dreier isoparametrischer Flächen des andern Individuums parallel sind.

Machen wir diese Bedingung für die in §. 567 gefundenen Gleichungen der Hauptaxen geltend, so fin-

*) Man wird daher seiner ausführlicheren Arbeit hierüber mit um so grösserem Interesse entgegen sehen, da eine solche jedenfalls mehr Klarheit in der Darstellung gestatten wird, als die gedrängte Skizze in Poggendorffs Annalen.

den wir in Uebereinstimmung mit Burhenne, dass solche nicht nur in den beiden bekannten Fällen, sondern auch jedenfalls erfüllt ist, wenn die Zwillingsaxe der Fläche eines Hexakisoktaëders von der Form

$m\text{O}\frac{m}{m-1}$ entspricht, oder wenn $mn = m + n$; dann werden nämlich in der That die Gleichungen der drei Hauptaxen isoparametrisch, und folglich auch ihre Normalflächen drei Flächen einer und derselben Gestalt, allgemein der Gestalt $m\text{O}m - 1$.

Ausser diesen Gesetzen sollen jedoch auch noch die vorkommen, da die Hauptaxen des einen Individuums in drei Linien des andern Individuums fallen, welche die Normalen der Flächen zweier, ja sogar dreier verschiedener Gestalten sind, wenn sie nur gleiche Länge haben. Das allgemeine Gesetz aller Zwillingsbildungen im Tesseralsysteme wäre daher, dass die Hauptaxen des einen Individuums in drei gleichmaassige Normalen irgend reeller Flächen des andern Individuums fallen, und *vice versa.*

B. Beschreibung der gewöhnlichsten Zwillinge.

§. 579.

Zwillinge nach dem ersten Gesetze.

Wenn die nach dem ersten Gesetze verwachsenen Individuen durch Juxtaposition verbunden sind, so drückt die Mohs'sche Formel: Umdrehungsaxe normal, Zusammensetzungsfläche parallel einer Fläche von O, den Habitus der Zwillinge so vollkommen aus, dass es zu ihrer richtigen Vorstellung keiner weiteren Bestimmung bedarf. Auf diese Weise finden sich z. B. sehr häufig die Oktaëder des Alauns, Spinells, Magneteisenerzes, Automolithes, Silbers, Kupfers, der Zinkblende; Fig. 608. Die Individuen sind jedoch fast immer verkürzt, erscheinen daher als tafelartige Segmente des Oktaëders, und die Zwillinge selbst wie

Digitized by Google

Fig. 609 und 610. Dieser Erscheinungsweise entspricht auch die Haüysche Construction, zufolge welcher man ein Oktaëder durch einen seiner Fläche parallelen Schnitt halbiren, und die eine Hälfte gegen die andere durch 180° oder 60° verdrehen soll, ohne die gegenseitige Berührung in der Schnittfläche aufzuheben. Wenn die Kanten des Oktaëders durch die Flächen des Rhombendodekaëders abgestumpft sind, so fallen die zwölf, der Zwillingsaxe parallelen Abstumpfungsflächen beider Individuen paarweis in eine Ebene. Zuweilen wiederholt sich die Zusammensetzung sowohl mit geneigten Zusammensetzungsflächen, wie in Fig. 611, als auch mit parallelen Zusammensetzungsflächen. Die Zwillingskanten messen 141° 3′ 28″ und 218° 56′ 32″.

Die Hexakisoktaëder des Diamantes kommen gleichfalls nach diesem Gesetze verwachsen vor, und unterliegen dabei einer so starken Verkürzung, dass nicht selten von jedem Individuo nur eines der sechszähligen Flächensysteme zu sehen ist, und der ganze Krystall das Ansehen einer flachen ditrigonalen Pyramide gewinnt, welche, wenn ihre Pole durch die Flächen des Oktaëders abgestumpft sind, wie Fig. 607 erscheint. Doch sind gewöhnlich noch die zunächst anliegenden Flächen der Neben- und Nachbarflächensysteme vorhanden, wodurch sich einspringende Zwillingskanten ausbilden.

§. 580.

Fortsetzung.

Auch das am gediegenen Kupfer vorkommende, und in Fig. 612 abgebildete Tetrakishexaëder $\infty O2$ ist der Zusammensetzung nach dem ersten Gesetze unterworfen; beide Individuen sind durch Juxtaposition verbunden und dergestalt verkürzt, dass gewöhnlich nur ihre gegenüberliegenden sechszähligen Flächensysteme wahrzunehmen sind; Fig. 613. Der Zwilling

Digitized by Google

erhält das Ansehen einer hexagonalen Pyramide, deren Polkante 143° 7′ 48″, weil die sechsflächigen Ecke von $\infty O2$ hexagonal sind (§. 123). Zuweilen kommen jedoch auch einspringende Winkel vor, wodurch diese Deutung der am gediegenen Kupfer vorkommenden hexagonalen Pyramiden gerechtfertigt wird, da sie sich ausserdem auch durch eine blosse Verkürzung eines einzelen Individuums in der Richtung einer trigonalen Zwischenaxe erklären lassen würden.

Die Zinkblende zeigt diese Zusammensetzung nicht nur in den Krystallen mit zwei vorherrschenden, und im Gleichgewichte ausgebildeten Tetraëdern $\left(\frac{O}{2}.-\frac{O}{2}\right.$ und dann häufig mit Wiederholung), sondern auch in den Krystallen mit vorherrschendem Rhombendodekaëder, ja sogar in derben Massen, aus denen sich dann, wegen der nach ∞O Statt findenden Spaltbarkeit, Zwillingsformen wie Fig. 615 herausschlagen lassen. Dieselbe Form findet sich auch an den Rhombendodekaëdern des Diamantes, welche oft so stark verkürzt sind, dass die sechs der Zwillingsaxe parallelen Flächen beider Individuen verschwinden, und der Zwilling als eine stumpfe trigonale Pyramide erscheint.

Die Combination $\infty O.\frac{3O3}{2}$, welche zumal an der braunen Zinkblende nicht selten vorkommt, ist fast immer zwillingsartig ausgebildet, so dass sie nicht wie in Fig. 616, sondern wie in Fig. 617 erscheint, indem zwei Individuen nach dem ersten Gesetze durch Juxtaposition verbunden sind. In der Regel erscheint dieser Zwilling so, wie ihn Fig. 617 darstellt, als scheinbar einfacher Krystall, indem das eine Individuum um $\frac{2}{3}$, das andere um $\frac{1}{3}$ verkürzt ist, daher man sich ihn am deutlichsten nach Haüys Weise construiren kann, indem man das in Fig. 616 abgebildete

Individuum nach der Richtung des in einer Ebene liegenden *) Kantennetzes *abcdef* zerschneidet, und das eine Segment gegen das andere um 180° oder 60° verdreht.

Die Ikositetraëder 3O3 des gediegenen Goldes kommen auf ähnliche Art verwachsen, und in ihrer Verwachsung verkürzt vor, so dass man sich vorstellen kann, ein und dasselbe Individuum sey parallel einer Fläche von O halbirt, und die eine Hälfte gegen die andere um 180° oder 60° verdreht worden; Fig. 614. Die kleineren Flächensegmente *o* beider Individuen bilden einspringende, die grösseren Flächensegmente *a* ausspringende Winkel von 159° 57′.

§. 581.

Fortsetzung.

Die nach dem ersten Gesetze gebildeten Durchkreuzungszwillinge lassen sich am anschaulichsten nach folgender Formel beschreiben: Beide Individuen haben eine trigonale Zwischenaxe gemeinschaftlich, das eine ist gegen das andere um diese Axe durch 180° oder 60° verdreht. Auf diese Art kommen, jedoch selten, die Oktaëder des Magneteisenerzes so wie die oktaëderähnlichen Individuen $\frac{O}{2}.-\frac{O}{2}$ der Zinkblende vor; Fig. 618.

Die Combination O.∞O∞ des Bleiglanzes findet sich nicht selten in Zwillingen dieser Art, und zwar pflegt dann jedenfalls eine starke Verkürzung der Individuen in der Richtung der Zwillingsaxe Statt zu finden; Fig. 619.

Die Hexaëder des Flussspathes, Bleiglanzes, Eisenkieses und Buntkupferkieses kommen gleichfalls nach

*) Die Combinationskanten beider Gestalten sind nämlich rechtwinklig auf den Kanten des Rhombendodekaëders.

Digitized by Google

diesem Gesetze verwachsen vor; doch tritt die Regelmässigkeit dieser Zusammensetzung, zumal bei ungleichmässiger Ausbildung beider Individuen, nicht immer sehr auffallend hervor; Fig. 620; stellt man den Krystall nach der Zwillingsaxe aufrecht, so lassen sich die einspringenden Zwillingskanten als geneigte und horizontale unterscheiden; jene messen 228° 11′ 23″, diese 250° 31′ 44″.

Um so regelmässiger sind die Zwillinge der Rhombendodekaëder des Sodalites vom Laacher See gebildet, welche sich im Zustande einer so vollkommenen Durchkreuzung finden, dass sie der Zeichnung in Fig. 621 an Regelmässigkeit wenig nachstehen. Die der Zwillingsaxe parallelen Flächen beider Individuen fallen paarweis genau in eine Ebene, ohne alle Andeutung einer Demarcationslinie, während die gegen dieselbe Axe geneigten Flächen einspringende Zwillingskanten bilden; gewöhnlich ist der Krystall in der Richtung der Zwillingsaxe säulenartig verlängert.

Endlich kommen auch die Krystalle des Fahlerzes oder tetraëdrischen Kupferglanzes nach dem ersten Gesetze in gegenseitiger Durchwachsung vor. Die einfachste Form einer solchen Durchwachsung zweier Tetraëder ist in Fig. 623 dargestellt, während Fig. 622 einen derartigen Zwilling der Combination $\frac{O}{2}.\infty O.\frac{2O2}{2}$ vorstellt.

§. 582.

Zwillinge nach dem zweiten Gesetze.

Nach dem zweiten Gesetze, welches, wie bereits erwähnt wurde, nur für die semitesseralen Gestalten oder Combinationen zu einem Resultate führen kann, sind die schönen, zuerst von Romé de l'Isle erwähnten Zwillinge des hexaëdrischen Eisenkieses gebildet, in welchen sich gewöhnlich zwei Exemplare des Penta-

Digitized by Google

gondodekaëders $\frac{\infty O2}{2}$, oder auch der Combinationen $\frac{\infty O2}{2}.\infty O\infty$ oder $\frac{\infty O2}{2}.\frac{\infty O\frac{3}{2}}{2}$ so vollkommen durchkreuzen, dass sie in der Erscheinung oft nur wenig von der Regelmässigkeit des Bildes in Fig. 627 abweichen. Auf der Insel Elba findet sich auch die Combination $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}.O.\frac{\infty O2}{2}$ nach demselben Gesetze der kreuzweisen Verwachsung sehr schön in beiden Gegenkörpern ausgebildet; wären die Individuen von absolut gleichen Dimensionen, und von vollkommener Regelmässigkeit, so würde dieser Zwilling wie Fig. 628 erscheinen, in welcher jedoch die Flächen des Pentagondodekaëders weggelassen, und, zur deutlicheren Unterscheidung beider Individuen, nur die dem e i n e n Individuo angehörigen Flächen von $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$ mit einer ihrer Streifung entsprechenden Schraffirung versehen sind. Werden in der Combination $\frac{\infty O2}{2}.\infty O\infty$ die Flächen des Hexaëders mehr vorherrschend, so erscheint der Zwilling wie in Fig. 630 mit der, durch die Schraffirung angedeuteten Streifung der Hexaëderflächen. Diese letzteren Flächen können endlich so vorherrschend werden, dass sie die Flächen von $\frac{\infty O2}{2}$ fast ganz verdrängen, und der Zwilling in ein Hexaëder übergeht, an welchem nur noch die, den Diagonalen der Flächen entsprechenden Suturen der Streifung die zwillingsartige Zusammensetzung beurkunden würden; Fig. 631.

Die geneigtflächig-semitesseralen Formen des Diamantes, welche unter andern als die Combination $\frac{O}{2}.-\frac{O}{2}$ oder $\frac{mOn}{2}.-\frac{O}{2}$ erscheinen, finden sich in voll-

Digitized by Google

kommenen Durchkreuzungszwillingen, wie Fig. 625 und 626, deren einfachste Form ein Aggregat zweier sich rechtwinklig kreuzender Tetraëder ist; wie solches in Fig. 624 dargestellt und am Fahlerze und Diamante wirklich beobachtet worden ist.

§. 583.

Eigenthümliche Zwillingsbildung am Granate.

Breithaupt hat neulich einen Zwilling am Granate beobachtet, welcher das sehr merkwürdige Gesetz zu zeigen scheint, dass eine trigonale Zwischenaxe des einen Individuums einer Hauptaxe des zweiten Individuums parallel ist, und *vice versa*; Fig. 629. Leider sind jedoch die vorhandenen Krystalle zu Messungen mit dem Reflexionsgoniometer nicht geeignet; daher man wohl auch dieses Gesetz vor der Hand nur als eine wahrscheinliche Hypothese zu betrachten hat; um so mehr, weil es mit dem in §. 561 aufgestellten Gesetze in Widerspruche ist.

Es müsste nämlich eine der durch ihre Gleichungen in §. 567 bestimmten Axen der x', y' oder z' des Individuums II mit einer der trigonalen Zwischenaxen des Individuums I coincidiren, deren Gleichungen

$$x-y=0,\ z-x=0,\ y-z=0$$

Nun werden die Gleichungen der Axe der x' durch die Voraussetzungen

$$n=1$$

$$\text{und}\quad 2m^2-1=2m$$

dieser Forderung Genüge leisten; aber dann wird $m=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$. Da nun für $n=1$ das Hexakisoktaëder mOn in ein Triakisoktaëder mO übergeht, so würde die hypothetische Zwillingsaxe der Flächennormale eines Triakisoktaëders von irrationaler Ableitungszahl entsprechen.

Aus den Gleichungen der Axe der y' folgt ganz dasselbe Resultat.

Digitized by Google

In den Gleichungen der Axe der z' endlich wird obige Forderung durch die Voraussetzungen

$$n = m$$

$$\text{und} \quad m^2 - 2 = 2m$$

erfüllt; aber dann wird $m = 1 + \sqrt{3}$. Da nun für $n = m$ das Hexakisoktaëder mOn in ein Ikositetraëder mOm übergeht, so würde die hypothetische Zwillingsaxe auch die Flächennormale eines Ikositetraëders von irrationaler Ableitungszahl seyn können.

Da $\frac{8}{3}$ und $\frac{11}{4}$ Näherungswerthe von $1 + \sqrt{3}$ sind, so entspricht vielleicht die Zwillingsaxe der Flächennormale von $\frac{4}{3}O$ oder $\frac{8}{3}O\frac{8}{3}$, $\frac{11}{8}O$ oder $\frac{11}{4}O\frac{11}{4}$; im ersten Falle beträgt der Neigungswinkel der fast parallel erscheinenden Hauptaxe des einen und der trigonalen Zwischenaxe des andern Individuums $1^\circ\ 8'\frac{2}{3}$, im zweiten Falle $0^\circ\ 18'$.

Drittes Capitel.

Zwillinge des rhombischen Systemes*).

A. Theorie.

§. 584.

Bestimmung der Axen.

Bei der Entwicklung der Theorie der Zwillingskrystalle im rhombischen Systeme haben wir von der Annahme auszugehen, dass die Flächennormale irgend einer rhombischen Pyramide von dem Verhältnisse der Dimensionen $a : b : c$ als Zwillingsaxe auftrete.

---

*) Da die Theorie der Zwillinge des rhombischen Systemes die Theorie aller trimetrischen orthometrischen Systeme begreift, so hielt ich es für zweckmässig, das rhombische System dem tetragonalen Systeme vorangehen zu lassen.

Digitized by Google

Es sey nun die Gleichung einer Fläche dieser Pyramide:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

so sind die Gleichungen der Zwillingsaxe N:

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0,\ \frac{z}{a} - \frac{x}{c} = 0,\ \frac{y}{c} - \frac{z}{b} = 0$$

Die Neigungswinkel X, Y und Z der Zwillingsaxe gegen die Axen der x, y und z, von welchen die erstere immer als Hauptaxe gelten soll, bestimmen sich

$$\cos X = \frac{bc}{M},\ \cos Y = \frac{ca}{M},\ \cos Z = \frac{ab}{M}$$

wo

$$M = \sqrt{a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2}$$

Das zweite Individuum, dessen Axen wir als Axen der x', y' und z' bezeichnen wollen, coincidirt vor der Drehung mit dem ersteren, da beide um denselben Mittelpunct in paralleler Stellung vorausgesetzt wurden. Nach der Drehung fällt jede seiner Axen noch in die Ebene durch die Zwillingsaxe und die mit ihr gleichnamige Axe des Individuums I, also die Axe der x' in die Ebene Nx, die Axe der y' in die Ebene Ny, die Axe der z' in die Ebene Nz. Ferner bildet jede dieser Axen mit der Zwillingsaxe denselben Winkel, wie die gleichnamige Axe des Individuums I. Aus diesen Bedingungen ergeben sich folgende Gleichungen der Axen des Individuums II in Bezug auf das Axensystem des Individuums I:

Axe der x',

$$\frac{x}{a^2b^2 + c^2a^2 - b^2c^2} + \frac{y}{2abc^2} = 0$$

$$\frac{y}{c} - \frac{z}{b} = 0$$

Digitized by Google

Axe der y',

$$\frac{x}{2abc^2} + \frac{y}{a^2b^2 + b^2c^2 - c^2a^2} = 0$$

$$\frac{z}{a} - \frac{x}{c} = 0$$

Axe der z',

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0$$

$$\frac{z}{c^2a^2 + b^2c^2 - a^2b^2} + \frac{x}{2ab^2c} = 0$$

welche Gleichungen also dem allgemeinsten Gesetze entsprechen, da die Zwillingsaxe die Normale irgend einer Pyramidenfläche ist.

§. 585.

Transformation der Coordinaten.

Da dieses allgemeinste Gesetz in der Natur unter andern für gewisse Zwillinge des Staurolithes und Kupferglanzes verwirklicht ist, so müssen wir die ihm entsprechenden Transformationen der Coordinaten bestimmen. Dazu brauchen wir die Cosinus der Neigungswinkel der Axen der x', y' und z' des Individuums II, gegen die Axen der x, y und z des Individuums I, welche wir mit $(X'X)$, $(X'Y)$, $(X'Z)$, $(Y'X)$ u. s. w. bezeichnen wollen. Diese Cosinus sind folgende:

$$\cos(X'X) = -\frac{a^2b^2 + c^2a^2 - b^2c^2}{M^2}$$

$$\cos(X'Y) = \frac{2abc^2}{M^2}$$

$$\cos(X'Z) = \frac{2ab^2c}{M^2}$$

$$\cos(Y'X) = \frac{2abc^2}{M^2}$$

$$\cos(Y'Y) = -\frac{a^2b^2 + b^2c^2 - c^2a^2}{M^2}$$

Digitized by Google

$$\cos(Y'Z) = \frac{2a^2bc}{M^2}$$

$$\cos(Z'X) = \frac{2ab^2c}{M^2}$$

$$\cos(Z'Y) = \frac{2a^2bc}{M^2}$$

$$\cos(Z'Z) = -\frac{c^2a^2 + b^2c^2 - a^2b^2}{M^2}$$

wenn nämlich

$$a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2 = M^2$$

Mittels dieser Cosinus lassen sich leicht die Substituenden der x', y' und z' bestimmen, welche in irgend eine Function $\varphi(x'y'z')$ gesetzt werden müssen, um selbige als $\varphi(xyz)$ darzustellen; es wird nämlich

$$x' = \frac{1}{M^2}[-(a^2b^2 + c^2a^2 - b^2c^2)x + 2abc^2y + 2ab^2cz]$$

$$y' = \frac{1}{M^2}[2abc^2x - (a^2b^2 + b^2c^2 - c^2a^2)y + 2a^2bcz]$$

$$z' = \frac{1}{M^2}[2ab^2cx + 2a^2bcy - (c^2a^2 + b^2c^2 - a^2b^2)z]$$

Ist daher im Individuum II irgend eine Fläche

$$\frac{x'}{a'} + \frac{y'}{b'} + \frac{z'}{c'} = 1$$

gegeben, so bestimmen sich in ihrer auf das Axensystem des Individuums I bezogenen Gleichung

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{s} = 1$$

die Parameter p, q und s, wie folgt:

$$p = \frac{a'b'c'M^2}{2abc(bb' + cc')a' - (a^2b^2 + c^2a^2 - b^2c^2)b'c'}$$

$$q = \frac{a'b'c'M^2}{2abc(cc' + aa')b' - (a^2b^2 + b^2c^2 - c^2a^2)c'a'}$$

$$s = \frac{a'b'c'M^2}{2abc(aa' + bb')c' - (c^2a^2 + b^2c^2 - a^2b^2)a'b'}$$

Digitized by Google

§. 586.
Fortsetzung.

Weil aber vermöge der krystallographischen Ableitung alle Gestalten einer Krystallreihe aus der resp. Grundgestalt abzuleiten sind, so ist allgemein, wenn $a:b:c$ das Verhältniss der Dimensionen der Grundgestalt, in den Resultaten der beiden vorhergehenden §§.

ma, nb und rc statt a, b und c

$m'a$, $n'b$ und $r'c$ statt a', b' und c'

zu setzen, um dieselben Resultate auf eine unsrer krystallographischen Bezeichnung unmittelbar entsprechende Art darstellen zu können.

Wenn nämlich in irgend einer rhombischen Krystallreihe von den Dimensionen $a:\breve{b}:c$ die Normale der Fläche irgend einer Pyramide $m\breve{P}n$, allgemein also der Fläche

$$\frac{x}{ma}+\frac{y}{nb}+\frac{z}{rc}=1$$

als Zwillingsaxe auftritt, so werden die Axen des einen Individuums in Bezug auf die Axen des andern durch folgende Gleichungen repräsentirt:

Axe der x':

$$\frac{x}{A^2}+\frac{y}{2mnr^2abc^2}=0$$

$$\frac{y}{rc}-\frac{z}{nb}=0$$

Axe der y':

$$\frac{x}{2mnr^2abc^2}+\frac{y}{B^2}=0$$

$$\frac{z}{ma}-\frac{x}{rc}=0$$

Axe der z':

$$\frac{x}{nb}-\frac{y}{ma}=0$$

$$\frac{z}{C^2}+\frac{x}{2mn^2rab^2c}=0$$

Digitized by Google

wo nämlich

$$A^2 = m^2n^2a^2b^2 + r\ m^2c^2a^2 - n^2r\ b^2c^2$$
$$B^2 = m^2n^2a^2b_2 + n^2r^2b^2c^2 - r^2m^2c^2a^2$$
$$C^2 = n^2r^2b^2c^2 + r^2m^2c^2a^2 - m^2n^2a^2b^2$$

Die Substituenden der Coordinaten in den Gleichungen irgend gegebener Puncte, Linien oder Flächen des einen Individuums, um solche auf das Axensystem des andern Individuums zu beziehen, werden:

$$x' = \frac{1}{M^2}[-A^2x + 2mnrabc(rcy + nbz)]$$

$$y' = \frac{1}{M^2}[-B^2y + 2mnrabc(maz + rcx)]$$

$$z' = \frac{1}{M^2}[-C^2z + 2mnrabc(nbx + may)]$$

in welchen Ausdrücken A^2, B^2 und C^2 ihre vorhergehenden Werthe haben, während

$$M^2 = m^2n^2a^2b^2 + r^2m^2c^2a^2 + n^2r^2b^2c^2$$

Endlich bestimmen sich für irgend eine Fläche

$$\frac{x'}{m'a} + \frac{y'}{n'b} + \frac{z'}{r'c} = 1$$

des einen Individuums, in ihrer auf das andere Individuum bezogenen Gleichung

$$\frac{x}{pa} + \frac{y}{qb} + \frac{z}{sc} = 1$$

die Coëfficienten p, q und s, wie folgt:

$$p = \frac{m'n'r'M^2}{2mnr(nn'b^2 + rr'c^2)m'a^2 - n'r'A^2}$$

$$q = \frac{m'n'r'M^2}{2mnr(rr'c^2 + mm'a^2)n'b^2 - r'm'B^2}$$

$$s = \frac{m'n'r'M^2}{2mnr(mm'a^2 + nn'b^2)r'c^2 - m'n'C^2}$$

Diese Werthe beziehen sich zunächst auf die Fläche im Octanten der Zwillingsaxe; setzt man successiv m', n' und r' negativ, so erhält man die Werthe von p, q und s für die drei Flächen in den Nebenoctanten. Da übrigens vermöge unsrer Ableitungs-

Digitized by Google

methode immer einer der beiden Coëfficienten q oder s sich $= 1$ und keiner < 1 bestimmen muss, so ist jedenfalls p und der grössere der beiden andern Coëfficienten durch den kleineren, und dieser durch sich selbst zu dividiren; die Quotienten $\frac{p}{s}$ und $\frac{q}{s}$, oder $\frac{p}{q}$ und $\frac{s}{q}$ sind unmittelbar die Ableitungszahlen derjenigen Gestalten des Individuums I, welchen die Parallelflächen der im Individuo II gegebenen Flächen angehören. Ist $s < q$, so wird diese Gestalt eine makrodiagonale, ist $s > q$, so wird sie eine brachydiagonale Gestalt.

§. 587.

Gewöhnlichstes Zwillingsgesetz Zwillingsaxe Normale von ∞P.

Wiewohl Fälle, da die Zwillingsaxe einer Pyramidenfläche entspricht, vorkommen, so sind doch die meisten Zwillinge dieses Systemes nach einem von folgenden drei Gesetzen gebildet:

Die Zwillingsaxe ist

1) die Normale einer Fläche des verticalen Prismas ∞P,
2) die Normale einer Fläche des horizontalen Prismas $\bar{P}\infty$,
3) die Normale einer Fläche des horizontalen Prismas $\breve{P}\infty$.

Da die aufrechte Stellung der rhombischen Gestalten willkürlich nach jeder der drei Axen gewählt werden kann, so liessen sich eigentlich diese drei Gesetze auf ein einziges zurückführen; jedoch scheint es wegen solcher Krystallreihen, in welchen zwei dieser Gesetze zugleich verwirklicht sind, vortheilhafter, sie als besondere Gesetze darzustellen.

Was nun das erste und häufigste Gesetz betrifft, da die Zwillingsaxe die Normale einer Fläche des

Digitized by Google

zur Grundgestalt gehörigen verticalen Prismas ∞P ist, so haben wir zur Auffindung der dasselbe betreffenden Resultate in den Ausdrücken des §. 586

$$m = \infty \text{ und } n = r = 1$$

zu setzen, und erhalten dadurch folgende Bestimmungen:

Gleichungen der Axen des einen Individuums in Bezug auf das andere:

Axe der x', ... $y = 0,\quad z = 0$

Axe der y', ... $x = 0,\quad \frac{y}{b^2 - c^2} + \frac{z}{2bc} = 0$

Axe der z'; .... $x = 0,\quad \frac{y}{2bc} - \frac{z}{b^2 - c^2} = 0$

Substituenden der Coordinaten x', y' und z':

$$x' = -x$$

$$y' = \frac{1}{b^2 + c^2}[2bcz + -(b^2 - c^2)y]$$

$$z' = \frac{1}{b^2 + c^2}[2bcy + (b^2 - c^2)z]$$

Coëfficienten p, q und s in der transformirten Gleichung

$$\frac{x}{pa} + \frac{y}{qb} + \frac{z}{sc} = 1$$

einer Fläche, welche in dem andern Individuo durch die Gleichung

$$\frac{x'}{ma} + \frac{y'}{nb} + \frac{z'}{rc} = 1$$

gegeben ist:

$$p = -m$$

$$q = \frac{nr(b^2 + c^2)}{2nb^2 - r(b^2 - c^2)}$$

$$s = \frac{nr(b^2 + c^2)}{2rc^2 + n(b^2 - c^2)}$$

Sind also a^2, b^2 und c^2 rationale Grössen, wie dies immer der Fall ist, wenn z. B. a, b und c Quadratwurzeln, so sind die Coëfficienten p, q und s

Digitized by Google

gleichfalls rational, und folglich die durch sie bestimmten Flächen reelle oder doch mögliche Flächen.

§. 588.

Fortsetzung.

Weil das im vorigen §. entwickelte Gesetz das herrschende ist, so wird es gut seyn, seine Resultate für die drei Fälle besonders darzustellen, da die in dem einen Individuo gegebene Gestalt eine Gestalt aus der Hauptreihe, oder aus der makrodiagonalen, oder endlich aus der brachydiagonalen Hälfte des Schemas ist.

I. Für eine Pyramide der Hauptreihe, mP, ist $n = r = 1$, und wir erhalten daher folgende Verhältnisse der Ableitungszahlen für die entsprechenden Parallelflächen:

1) Für die Fläche im Octanten der Zwillingsaxe, mit positivem m, n und r, und deren Nebenfläche an der Mittelkante, mit negativem m:

$$p:q:s = \mp m:1:1$$

2) Für die Nebenflächen an den Polkanten, mit negativem n oder r:

$$p:q:s = \mp m : \pm\frac{b^2+c^2}{3b^2-c^2} : \mp\frac{b^2+c^2}{3c^2-b^2}$$

Daher sind die Gestalten, denen die Flächen von mP entsprechen,

$$mP \text{ und } \frac{m(3b^2-c^2)}{b^2+c^2}\breve{P}\frac{3b^2-c^2}{3c^2-b^2}$$

die Gestalten, denen die Flächen von ∞P entsprechen:

$$\infty P \text{ und } \infty\breve{P}\frac{3b^2-c^2}{3c^2-b^2}$$

II. Für eine Gestalt aus der makrodiagonalen Hälfte des Schemas, also allgemein für $m\bar{P}n$ ist $r = 1$, und wir erhalten daher folgende Verhältnisse der Ableitungszahlen für die resp. Parallelflächen:

Digitized by Google

1) Für die Fläche im Octanten der Zwillingsaxe und ihre Nebenfläche an der Mittelkante:

$$p:q:s = \mp m : \frac{n(b^2+c^2)}{(2n-1)b^2+c^2} : \frac{n(b^2+c^2)}{(2-n)c^2+nb^2}$$

2) Für die Nebenflächen an den Polkanten:

$$p:q:s = \mp m : \pm \frac{n(b^2+c^2)}{(2n+1)b^2-c^2} : \mp \frac{n(b^2+c^2)}{(2+n)c^2-nb^2}$$

Daher für das horizontale Prisma $m\bar{P}\infty$:

$$p:q:s = m : \frac{b^2+c^2}{2b^2} : \frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}$$

und für das makrodiagonale Flächenpaar $\infty\bar{P}\infty$:

$$p:q:s = \infty : \frac{b^2+c^2}{2b^2} : \frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}$$

III. Für eine Gestalt aus der brachydiagonalen Hälfte des Schemas, also allgemein für $m\breve{P}n$ ist $n = 1$ und $r = n$ zu setzen, und wir erhalten daher folgende Verhältnisse der Ableitungszahlen für die resp. Parallelflächen:

1) Für die Fläche im Octanten der Zwillingsaxe, und ihre Nebenfläche an der Mittelkante;

$$p:q:s = \mp m : \frac{n(b^2+c^2)}{2b^2-n(b^2-c^2)} : \frac{n(b^2+c^2)}{b^2+(2n-1)c^2}$$

2) Für die beiden Nebenflächen an den Polkanten:

$$p:q:s = \mp m : -\frac{n(b^2+c^2)}{2b^2+n(b^2-c^2)} : \frac{n(b^2+c^2)}{b^2-(2n+1)c^2}$$

daher für das horizontale Prisma $m\breve{P}\infty$:

$$p:q:s = m : \frac{b^2+c^2}{b^2-c^2} : \frac{b^2+c^2}{2c^2}$$

und endlich für das brachydiagonale Flächenpaar:

$$p:q:s = \infty : \frac{b^2+c^2}{b^2-c^2} : \frac{b^2+c^2}{2c^2}$$

§. 589.

Zwillingsaxe eine Normale von $\bar{P}\infty$.

Ist die Zwillingsaxe die Normale einer Fläche

Digitized by Google

des zur Grundgestalt gehörigen horizontalen Prismas $\breve{P}\infty$, so ist in den Ausdrücken des §. 586

$$n = \infty, \text{ und } m = r = 1$$

zu setzen, worauf sich denn folgende Resultate ergeben:

Gleichungen der Axen des einen Individuums in Bezug auf das andere:

Axe der x', ... $\frac{x}{a^2-c^2} + \frac{z}{2ac} = 0,\ y = 0$

Axe der y', ... $x = 0,\ z = 0$

Axe der z', ... $y = 0,\ \frac{z}{a^2-c^2} - \frac{x}{2ac} = 0$

Substituenden der Coordinaten x', y' und z':

$$x' = \frac{1}{a^2+c^2}[2acz-(a^2-c^2)x]$$

$$y' = -y$$

$$z' = \frac{1}{a^2+c^2}[2acx+(a^2-c^2)z]$$

Coëfficienten p, q und s in der auf das Individuum I bezogenen Gleichung

$$\frac{x}{pa} + \frac{y}{qb} + \frac{z}{sc} = 1$$

einer Fläche, welche in dem Individuo II durch die Gleichung

$$\frac{x'}{ma} + \frac{y'}{nb} + \frac{z'}{rc} = 1$$

gegeben ist:

$$p = \frac{mr(a^2+c^2)}{2ma^2 - r(a^2-c^2)}$$

$$q = -n$$

$$s = \frac{mr(a^2+c^2)}{2rc^2 + m(a^2-c^2)}$$

§. 590.

Zwillingsaxe eine Normale von $\breve{P}\infty$.

Ist endlich die Zwillingsaxe die Normale einer

Fläche des zur Grundgestalt gehörigen horizontalen Prismas $\breve{P}\infty$, so ist in den Ausdrücken des §. 586

$$r = \infty \text{ und } m = n = 1$$

zu setzen, wodurch sich denn folgende Resultate ergeben:

Gleichungen der Axen des Individuums II in Bezug auf das Individuum I:

$$\text{Axe der } x', \ldots \frac{x}{a^2-b^2} + \frac{y}{2ab} = 0,\ z = 0$$

$$\text{Axe der } y', \ldots \frac{x}{2ab} - \frac{y}{a^2-b^2} = 0,\ z = 0$$

$$\text{Axe der } z', \ldots x = 0,\ y = 0$$

Substituenden der Coordinaten x', y' und z':

$$x' = \frac{1}{a^2+b^2}[2aby - (a^2-b^2)x]$$

$$y' = \frac{1}{a^2+b^2}[2abx + (a^2-b^2)y]$$

$$z' = -z$$

Coëfficienten p, q und s in der auf das Individuum I bezogenen Gleichung

$$\frac{x}{pa} + \frac{y}{qb} + \frac{z}{sc} = 1$$

einer Fläche, welche in dem Individuo II durch die Gleichung

$$\frac{x'}{ma} + \frac{y'}{nb} + \frac{z'}{rc} = 1$$

gegeben ist:

$$p = \frac{mn(a^2+b^2)}{2ma^2 - n(a^2-b^2)}$$

$$q = \frac{mn(a^2+b^2)}{2nb^2 + m(a^2-b^2)}$$

$$s = -r$$

Ist die Zwillingsaxe die Flächennormale irgend eines andern brachydiagonalen horizontalen Prismas $m'\breve{P}\infty$, so wird:

$$p = \frac{mn(m'^2a^2+b^2)}{2mm'a^2 - n(m'^2a^2-b^2)}$$

$$q = \frac{mn(m'^2a^2+b^2)}{2m'nb^2 + m(m'^2a^2-b^2)}$$

$$s = -r$$

B. Beschreibung der wichtigsten Zwillinge.

§. 591.

Zwillingskrystalle des Arragonites.

Eine durch ihre Zwillingsbildung besonders merkwürdige Species ist der Arragonit, welcher nur selten in einfachen, meist in zusammengesetzten Krystallen vorkommt. Kupffers Messungen geben

für ∞P den Winkel 116° 16′ 24″
- P̆∞ - - - 108° 27′ 20″

woraus das Verhältniss

$$a:b:c = 0{,}7205:1:0{,}6215$$

folgen würde. Mitscherlich dagegen fand bei 14°*R*. für ∞P den Winkel 116° 11′ 47″, und zugleich das sehr wichtige Resultat, dass dieser Winkel in höheren Temperaturen immer stumpfer wird, indem er für 80°*R*. um 2′ 46″ zunimmt. Da nun die meisten Arragonite unter Verhältnissen vorkommen, welche für ihre Bildung auf trocknem Wege sprechen, so dürfte die Temperatur des Bildungsactes wohl wenigstens so hoch zu setzen seyn, dass der entsprechende Winkel von ∞P nahe 116°½ beträgt. Weil aber der krystallonomische Zusammenhang der Flächen beider Individuen eines Zwillings doch nur für dasjenige Verhältniss der Dimensionen Statt finden kann, welches der Temperatur des Bildungsactes entspricht, so werden wir jedenfalls das Verhältniss von $b:c$ etwas grösser als 1 : 0,6215 annehmen müssen.

Gesetzt, der dem Bildungsacte entsprechende Winkel von ∞P sey 116° 24′, so wird

$$b:c = \sqrt{13}:\sqrt{5}$$

Digitized by Google

und der erwähnte Zusammenhang der Flächen beider Individuen durch sehr einfache Zahlenwerthe ausgedrückt *).

Es sind nämlich die gewöhnlichsten Gestalten des Arragonites folgende:

1) aus der Hauptreihe: $0P$, P und ∞P;

2) aus der brachydiagonalen Nebenreihe: $\frac{1}{2}\breve{P}\infty$, $\breve{P}\infty$, $2\breve{P}\infty$, $\infty\breve{P}\infty$;

3) aus einer brachyd. Zwischenreihe: $\breve{P}2$ und $2\breve{P}2$.

Unter Voraussetzung des Verhältnisses $b : c = \sqrt{13} : \sqrt{5}$ ergeben sich nun aus §. 587 für diese in dem einen Individuo ausgebildeten Gestalten folgende Parallelflächen in dem andern Individuo:

Die Parallelflächen für mP sind zwei von mP und zwei von $\frac{17}{9}m\breve{P}17$, also die Parallelflächen

für P, zwei Fl. von P, zwei von $\frac{17}{9}\breve{P}17$
- ∞P, eine Fl. von ∞P, eine von $\infty\breve{P}17$

Die Parallelflächen für irgend eine Gestalt der brachydiagonalen Nebenreihe $m\breve{P}\infty$ sind allgemein zwei Flächen von $\frac{5}{9}m\bar{P}\frac{5}{4}$, also die Parallelflächen

für $\frac{1}{2}\breve{P}\infty$, zwei Fl. von $\frac{5}{18}\bar{P}\frac{5}{4}$
- $\breve{P}\infty$, - - - $\frac{5}{9}\bar{P}\frac{5}{4}$
- $2\breve{P}\infty$ - - - $\frac{10}{9}\bar{P}\frac{5}{4}$
- $\infty\breve{P}\infty$, eine Fl. von $\infty\bar{P}\frac{5}{4}$

Die Parallelflächen für irgend eine Pyramide $m\breve{P}2$ sind allgemein zwei Flächen von $\frac{7}{9}m\bar{P}\frac{14}{5}$ und zwei Flächen von $\frac{7}{6}m\breve{P}\frac{7}{2}$, also die Parallelflächen

für $\breve{P}2$, zwei Fl. von $\frac{7}{9}\bar{P}\frac{14}{5}$, zwei von $\frac{7}{6}\breve{P}\frac{7}{2}$
- $2\breve{P}2$ - - - $\frac{14}{9}\bar{P}\frac{14}{5}$ - - $\frac{7}{3}\breve{P}\frac{7}{2}$

---

*) Die Polkante von $\breve{P}\infty$ wird nach Mitscherlich in höheren Temperaturen immer schärfer, und zwar für 80°*R*. um 5′ 29″; da eine gleichförmige Abnahme für sehr hohe Temperaturen kaum anzunehmen ist, so dürfte leicht der dem Bildungsacte entsprechende Werth von $a = \sqrt{7}$ zu setzen seyn.

Digitized by Google

Mittels dieser Resultate ist es leicht, jede beliebige Zwillingskante zu berechnen.

§. 592.

Fortsetzung.

Die Zwillingsbildung findet für den Arragonit theils mit Durchkreuzung, theils mit Juxtaposition Statt.

So kommt die Combination $2\breve{P}\infty.\infty P$ in sehr ausgezeichneten Durchkreuzungszwillingen vor, wie Fig. 632; auf gleiche Weise die Combination $\infty\breve{P}\infty.0P.\infty P$, Fig. 633; die brachydiagonalen Flächen beider Individuen bilden bei gewöhnlicher Temperatur Winkel von 116° 12′ und 63° 48′. Findet Wiederholung der Zwillingsbildung mit geneigten Zusammensetzungsflächen Statt, so entstehen sechsstrahlig sternförmige Drillinge, ganz ähnlich denen des Bleicarbonates in Fig. 644. Von diesen beiden Zusammensetzungen sind in Fig. 634 und 635 die Horizontalprojectionen dargestellt, aus welchen man ersieht, dass, wenn die Individuen des Zwillings Fig. 633 in der Richtung der Makrodiagonale bis zur gegenseitigen Berührung (in den Demarcationslinien *Cα* und *Cβ*) ausgedehnt sind, der Zwilling das Ansehen einer unregelmässigen sechsseitigen Säule gewinnt, in welcher die vier Seitenkanten *A* 116° 12′, die zwei Seitenkanten *a* dagegen 127° 36′ messen. In den Drillingen sind die Individuen gleichfalls sehr oft bis zur gegenseitigen Berührung ausgedehnt, so dass die sechs einspringenden verticalen Zwillingskanten verschwinden, und die ihnen entsprechenden Winkelräume ausgefüllt sind; es entstehen dann scheinbar sechsseitige Säulen von den Seitenkanten 116° 12′, welche aber eigentlich achtseitige Säulen sind, indem die beiden den Linien *εε* entsprechenden Seitenflächen in *a* durch eine sehr stumpfe einspringende Kante gebrochen sind, die bei gewöhnlicher Temperatur 168° 36′ misst.

Digitized by Google

§. 593.

Fortsetzung.

Sehr häufig findet die Zwillingsbildung des Arragonites mit Juxtaposition Statt. Die Individuen der Combination $\infty P.\infty\breve{P}\infty.\bar{P}\infty$ (zuweilen mit $\frac{1}{2}\breve{P}\infty$, $2\breve{P}\infty$, $\breve{P}2$, $2\breve{P}2$ u. a. untergeordneten Gestalten) kommen fast immer zwillingsartig verwachsen vor, wie Fig. 636, deren Horizontalprojection in Fig. 636 *a* dargestellt ist. Diese Modalität der Zwillingsbildung wird sehr treffend durch die Mohs'sche Formel: Zusammensetzungsfläche parallel, Umdrehungsaxe normal einer Fläche von ∞P ausgedrückt. Sind beide Individuen so ausgedehnt, dass sie den Winkelraum der verticalen einspringenden Zwillingskante ausfüllen, und die beiderseitigen Flächen *M* in *a* (Fig. 636 *a*) zusammenstossen, so entstehen sechsseitige Prismen von dreierlei verschiedenen Seitenkanten, indem die drei abwechselnden Winkel in *A* 116° 12′, die beiden Winkel in *B* 121° 54′, und der Winkel in *α* 127° 36′ messen. Ein solcher Krystall der Combination $\infty P.\breve{P}\infty.\frac{1}{2}\breve{P}\infty.2\breve{P}2$ ist nach Mohs in Fig. 641 und 641 *a* dargestellt. Die Zusammensetzung wiederholt sich zumal häufig mit durchgängig parallelen Zusammensetzungsflächen, wodurch reihenförmige Aggregate entstehen, wie Fig. 639; gewöhnlich sind jedoch die mittleren Individuen dermaassen zusammengedrückt, dass sie nur als mehr oder weniger dünne, in die Substanz eines grösseren Krystalles eingeschobene Lamellen erscheinen, welcher Krystall selbst wiederum aus zwei Individuen besteht. Dann sieht man auf den Flächen $\breve{P}\infty$ und $\infty\breve{P}\infty$ dieses scheinbar einfachen Krystalles schmale Furchen und Leisten oder Streifen wie in Fig. 640, welche der CK. mit dem Prisma ∞P parallel, und nichts anderes als die Ausgehenden der schmalen lamellaren Individuen sind, welche die beiden äusseren Individuen zwischen sich einschliessen.

Digitized by Google

Auch wiederholt sich diese Zwillingsbildung mit geneigten Zusammensetzungsflächen, und zwar auf zwei verschiedene Arten, entweder so, dass die Gruppirungsaxe der scharfen, oder so, dass sie der stumpfen Seitenkante des Prismas ∞P entspricht; in beiden Fällen entstehen kreisförmig in sich selbst zurücklaufende Aggregate. Die Zahl der möglichen vollständigen Individuen ist jedoch im ersten Falle auf 5, im zweiten auf 3 beschränkt; das sechste Individuum ist in jenem, das vierte in diesem Falle, oder, wenn sich der Kreis von zwei Seiten schliesst, das fünfte und sechste Individuum in jenem, das dritte und vierte Individuum in diesem Falle nur unvollständig ausgebildet. So erscheint die Combination $\infty P.\infty\breve{P}\infty.\breve{P}\infty$ in sehr schönen Drillingen, Fig. 637 (davon der Grundriss in Fig. 637 *a*) und Vierlingen (Grundriss in Fig. 638) der ersten Art; die Combination $\infty P.2\breve{P}\infty$ aus Spanien in Vierlingen der zweiten Art, Fig. 642 und 642 *a*, in welchen die Individuen III und IV nur unvollständig ausgebildet sind, und nicht immer die rinnenförmige verticale Kante der beiden schmalen Flächenstreifen von ∞P wahrnehmen lassen, wie in Fig. 642 *); vielmehr fehlt diese einspringende Kante oft, und der Vierling erscheint als eine unregelmässig sechsseitige Säule mit zwei Winkeln *A* von 116° 12′, drei Winkeln *a* von 127° 36′, und einem Winkel von 104° 48′.

§. 594.

Zwillinge des Bleicarbonates.

Die Zwillingskrystalle des Bleicarbonates sind denen des Arragonites sehr ähnlich, wie denn überhaupt zwischen den Krystallreihen beider Substanzen viele

---

*) Die Streifung der Flächen $2\breve{P}\infty$ ist nur eine zur Verdeutlichung des Bildes dienende Schraffirung.

Digitized by Google

merkwürdige Uebereinstimmungen Statt finden. Daher scheint auch die Analogie erlaubt, dass die Krystalle beider Species durch Temperaturerhöhung ähnliche Veränderungen erleiden, und folglich auch das Prisma ∞P des Bleicarbonates, welches Kupffers Messungen bei gewöhnlicher Temperatur zu 117° 14′ bestimmen, etwas stumpfer angenommen werden muss; nehmen wir demgemäss an, der dem Bildungsacte entsprechende Winkel sey 117° 28′ *), so wird

$$b : c = \sqrt{19} : \sqrt{7}$$

Nun sind die gewöhnlichsten Gestalten des Bleicarbonates folgende:

1) aus der Hauptreihe, $0P$, P, und ∞P;
2) aus der brachydiagonalen Nebenreihe, $\frac{1}{2}\breve{P}\infty$, $\breve{P}\infty$, $2\breve{P}\infty$, $3\breve{P}\infty$, $4\breve{P}\infty$ und $\infty\breve{P}\infty$;
3) aus einer brachyd. Zwischenreihe, $\infty\breve{P}3$;
4) aus der makrodiagonalen Nebenreihe, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und $\infty\bar{P}\infty$.

Für jedes mP im einen Individuo sind die Parallelflächen im andern Individuo zwei Flächen von mP und zwei Flächen von $\frac{25}{13}m\breve{P}25$; also die Parallelflächen

für	P zwei Fl.	von	P	und zwei von	$\frac{25}{13}\breve{P}25$
-	∞P eine Fl.	-	∞P	- eine -	$\infty\breve{P}25$

Für jedes $m\breve{P}\infty$ sind die Parallelflächen zwei Flächen von $\frac{7}{13}m\bar{P}\frac{7}{6}$; also die Parallelflächen

für	$\frac{1}{2}\breve{P}\infty$	zwei Fl. von	$\frac{7}{26}\bar{P}\frac{7}{6}$
-	$\breve{P}\infty$	- - -	$\frac{7}{13}\bar{P}\frac{7}{6}$
-	$2\breve{P}\infty$	- - -	$\frac{14}{13}\bar{P}\frac{7}{6}$
-	$3\breve{P}\infty$	- - -	$\frac{21}{13}\bar{P}\frac{7}{6}$
-	$4\breve{P}\infty$	- - -	$\frac{28}{13}\bar{P}\frac{7}{6}$
-	$\infty\breve{P}\infty$	eine Fl. von	$\infty\bar{P}\frac{7}{6}$

---

*) Sollten die Beobachtungen eine Abnahme des Winkels in höheren Temperaturen lehren, so bietet sich als nächstes Verhältniss von $b : c$ das von $\sqrt{8} : \sqrt{3}$ dar.

Digitized by Google

Für jedes $m\bar{P}\infty$ sind die Parallelflächen zwei Flächen von $\frac{19}{13}m\breve{P}\frac{19}{6}$; also die Parallelflächen

für $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ zwei Fl. von $\frac{19}{26}\breve{P}\frac{19}{6}$

- $\infty\bar{P}\infty$ eine Fl. - $\infty\breve{P}\frac{19}{6}$

Für das Prisma $\infty\breve{P}3$ endlich werden die Parallelflächen eine Fl. von $\infty\bar{P}27$ und eine Fl. von $\infty\breve{P}\frac{17}{8}$.

§. 595.

Fortsetzung.

Die Zwillingsbildung findet am Bleicarbonate theils mit Durchkreuzung, theils mit Juxtaposition Statt. So stellt Fig. 645 einen Zwilling der ersten Art von Johanngeorgenstadt vor, dessen Individuen die Combination $2\breve{P}\infty.\frac{1}{2}\breve{P}\infty.\infty\breve{P}\infty.P.\infty P$ zeigen; die sämmtlichen Flächen der brachydiagonalen Nebenreihe sind durch eine unregelmässige horizontale Streifung ausgezeichnet, welche zur Verdeutlichung des Bildes auf der Fläche *l* durch eine analoge Schraffirung angedeutet ist; Fig. 634 kann als Grundriss zur Erläuterung dieses Zwillingskrystalles dienen. Dieselbe Combination findet sich in Drillingskrystallen, wie solche Fig. 644 in der Horizontalprojection darstellt, für deren Erläuterung auch Fig. 635 zu Hülfe genommen werden kann, um den Parallelismus der Flächen *M* hervorzuheben, wo solcher wirklich Statt findet.

Sehr schöne Durchkreuzungszwillinge der in Fig. 648 dargestellten Combination $\infty\breve{P}\infty.P.\infty\breve{P}3.\infty P$ kommen unter andern zu Miess vor, Fig. 649; die Flächen *l* sind zur Verdeutlichung des Bildes horizontal schraffirt, während sie in der Wirklichkeit vertical gestreift zu seyn pflegen, wie in Fig. 648. Die Flächen *T* und *t* fallen meist in e i n e Ebene, auch gesellt sich wohl noch ein drittes Individuum hinzu, wodurch ganz ähnliche Drillinge entstehen, wie in Fig. 644.

Der Winkel, unter welchen sich die Individuen dieser Zwillinge kreuzen, beträgt bei der gewöhnli-

chen Temperatur 62° 46′ oder 117° 14′; in den Drillingen schneiden sich zwei Paar der Individuen unter demselben Winkel; das dritte Paar unter dem Winkel von 54° 28′ oder 125° 32′. Man kann dasjenige Individuum, gegen welches die beiden andern gleich geneigt sind (I in Fig. 635 und 644), als den Träger der ganzen Gruppe betrachten; ist derselbe sehr klein, so glaubt man auf den ersten Anblick einen Zwilling vor sich zu haben, dessen Individuen sich unter 54° 28′ schneiden, und dessen Zwillingsaxe die Normale einer Fläche von $\infty P\frac{7}{5}$ seyn würde.

Wenn sich die Individuen der Zwillinge in Fig. 649 oder die analog gebildeten Drillinge so weit über die Flächen *l* ausdehnen, dass die einspringenden Winkelräume der verticalen Zwillingskanten ausgefüllt werden, so entstehen scheinbar einfache sechsseitige Pyramiden, welche jedoch in beiden Fällen verschiedene Polkanten haben, wie solches aus den Grundrissen in Fig. 634 und 635 zu ersehen ist, wo von den Puncten *A* andere Polkanten auslaufen, als von den Puncten *a*, denen in den Drillingspyramiden eine sehr stumpfe einspringende Kante entspricht.

Findet die Zwillingsbildung mit Juxtaposition Statt, so ergeben sich für vertical säulenartige Krystalle ganz ähnliche Zwillinge, wie solche am Arragonit in §. 593 beschrieben wurden. Dagegen stellt Fig. 647 einen dergleichen Zwilling der in Fig. 646 abgebildeten pyramidalen Combination $P.2\breve{P}\infty.\infty\breve{P}\infty$ dar.

§. 596.

Zwillinge des Epistilbites.

Nach demselben Gesetze, wie die bisher betrachteten Zwillinge des Arragonites und Bleicarbonates sind auch die Zwillinge des Kalisalpeters, Strontianites, Witherites, Epistilbites, Harmotomes, Bournonites, rhombischen Silberglanzes, so wie gewisse

Digitized by Google

Zwillinge des rhombischen Kupferglanzes, des rhombischen Eisenkieses und Arsenikkieses gebildet, von welchen wir nur einige etwas näher betrachten wollen.

Der Epistilbit, eine dem Desmin sehr ähnliche Species*) (daher richtiger Epidesmin), krystallisirt in rhombischen Prismen $\infty P = M$ von 135° 10′, welche an den Enden durch die horizontalen Prismen $\breve{P}\infty$ ($s =$ 147° 40′) und $\bar{P}\infty$ ($t =$ 109° 46′) begränzt, und durch das brachydiagonale Flächenpaar $\infty\breve{P}\infty = r$ in den scharfen Seitenkanten abgestumpft sind. Einfache Krystalle sind jedoch selten; gewöhnlich finden sich Zwillingskrystalle nach dem Gesetze: Zwillingsaxe normal, Zusammensetzungsfläche parallel einer Fläche von ∞P. Die Individuen sind durch Juxtaposition verbunden, Fig. 643 und 643 *a*, und bilden ganz ähnliche Zwillinge, wie solche in Fig. 641 vom Arragonit dargestellt worden, und auch an den vertical-säulenförmigen Krystallen des Bleicarbonates häufig zu beobachten sind. Die Winkel des von den beiderseitigen Flächen *M* und *r* gebildeten sechsseitigen Prismas sind folgende:

---

*) Ich erlaube mir hierbei eine Bemerkung über die Namen Stilbit und Desmin. Bekanntlich confundirte Haüy die von Werner unterschiedenen Arten des Blätter- und Strahlzeolithes unter dem gemeinschaftlichen Namen Stilbit, welcher sich auf den ausgezeichneten Perlmutterglanz der vorherrschenden Krystall- und Spaltungsfläche bezieht. Als man die Nothwendigkeit einer Trennung einsah, behielt man den Namen Stilbit für den Strahlzeolith bei, obgleich der Glanz am Blätterzeolith noch ausgezeichneter ist, ja zuweilen selbst halbmetallisch wird, und gab dem Blätterzeolith den Namen Heulandit, um zugleich eine Artigkeit zu sagen. Wenn sich Namen auf besonders hervorstechende Eigenschaften beziehen können, sind sie wohl immer von ihnen zu entlehnen, und daher scheint mir für den Blätterzeolith der Name Stilbit eben so passend, als für den Strahlzeolith der von Breithaupt vorgeschlagene Name Desmin.

Digitized by Google

drei = 135° 10′
zwei = 112° 25′
einer = 89° 40′

§. 597.

Zwillinge des Harmotomes.

Der Harmotom oder Kreuzstein, der diesen letzteren Namen einer sehr regelmässigen Zusammensetzung verdankt, kraft welcher er fast immer in kreuzförmigen Zwillingen erscheint, wird von einigen Mineralogen als rhombisch, von andern als tetragonal angesehen. Die durch ihre Streifung sehr unvollkommene Beschaffenheit der Oberfläche hat bis jetzt die Entscheidung erschwert, da die Messungen jedenfalls nur auf kleine Abweichungen vom tetragonalen Charakter führen können. Die physischen, so wie einige morphologische Eigenschaften scheinen jedoch für die Annahme einer rhombischen Krystallreihe zu sprechen, in welcher die Dimensionen *b* und *c* sehr nahe gleich sind, und folglich das Prisma ∞P sehr nahe rechtwinklig ist.

Die gewöhnlichste Combination des Harmotomes ist $\infty\breve{P}\infty . \infty\bar{P}\infty . P . \breve{P}\infty$, Fig. 543; zwei dergleichen Krystalle durchkreuzen sich anscheinend genau unter rechten Winkeln, so dass man unter Voraussetzung beinahe gleicher Nebenaxen das Gesetz der Zwillingsbildung so aussprechen kann: Zwillingsaxe die Normale einer Fläche von ∞P. Die Flächen $\infty\breve{P}\infty$ bilden verticale, einspringende Zwillingskanten von 90°, je zwei Flächen von P fallen beinahe in eine Ebene, oder sind doch beinahe parallel; Fig. 658. Zuweilen werden die Krystalle mehr tafelartig, die einspringenden Winkelräume bedeutender, und die Flächen P durch die einspringenden Zwillingskanten der beiderseitigen horizontalen Prismen $\breve{P}\infty$ abgesondert; auch tritt wohl noch das Prisma $4\breve{P}\infty$ in die Combination,

Digitized by Google

und es entstehen Zwillinge wie Fig. 657. Selten fehlen die Pyramidenflächen gänzlich, so dass nur die Combination $\infty\breve{P}\infty.\infty\bar{P}\infty.\breve{P}\infty$ übrig bleibt, deren Individuen bisweilen so gebildet sind, dass die verticalen einspringenden Kanten verschwinden, indem die beiderseitigen makrodiagonalen Flächenpaare ein rechtwinklig vierseitiges Prisma bilden; Fig. 659.

§. 598.

Zwillinge des rhombischen Eisenkieses.

Der rhombische Eisenkies, dessen Varietäten unter den Namen Speerkies, Kammkies, Strahlkies bekannt sind, zeigt sehr häufig Zwillinge nach dem Gesetze: Zwillingsaxe die Normale, Zusammensetzungsfläche eine Fläche von ∞P. Die Dimensionen der Grundgestalt haben sehr nahe das Verhältniss

$$a:b:c = \sqrt{10}:\sqrt{7}:\sqrt{4}$$

Die Krystallreihe selbst ist nur wenig entwickelt, und zeigt gewöhnlich nur folgende Gestalten:

aus der Hauptreihe, $0P$, P, ∞P,
aus der brachyd. Nebenreihe, $\frac{1}{3}\breve{P}\infty$, $\breve{P}\infty$, und
aus der makrod. Nebenreihe, $\bar{P}\infty$.

Die Winkel des Prismas ∞P sind nach obigem Verhältnisse 105° 50′ und 74° 10′ (nach Phillips 106° 2′), die Polkante von $\breve{P}\infty$ 79° 50′ (nach Phillips 80° 0′), die Polkante von $\bar{P}\infty$ 64° 38′. In den Zwillingen werden die Parallelflächen

für P, zwei Flächen von P, zwei von $\frac{17}{11}\breve{P}\frac{17}{5}$
- ∞P, eine Fläche von ∞P, eine von $\infty\breve{P}\frac{17}{5}$
- $\breve{P}\infty$, zwei Flächen von $\frac{8}{11}P\frac{8}{3}$
- $\frac{1}{3}\breve{P}\infty$, - - - - $\frac{8}{33}P\frac{8}{3}$
- $\bar{P}\infty$, - - - - $\frac{14}{11}\breve{P}\frac{14}{3}$

Die Zwillingsbildung findet fast immer mit Juxtaposition Statt, und die Streifung der Flächen $0P$, $\frac{1}{3}\breve{P}\infty$ und $\breve{P}\infty$ lässt die Demarcationen der Individuen sehr leicht erkennen, wie dies aus Fig. 653 zu erse-

hen ist, welche im Grundrisse einen Zwilling der Combination $0P.\infty P$ darstellt. Meist wiederholt sich die Zusammensetzung mit geneigten Zusammensezzungsflächen, und dann entstehen kreisförmig in sich zurücklaufende Gruppen von drei und mehr Individuen, wie Fig. 654, welche denen des Arragonites in Fig. 638 ganz analog gebildet, und häufig am sogenannten Speerkiese zu beobachten sind. Schliesst sich der Kreis vollständig durch ein fünftes Individuum, so entstehen Fünflingskrystalle wie Fig. 655.

Ausser diesen Zwillingen kommen am rhombischen Eisenkiese noch andere vor, deren Gesetz: Zwillingsaxe die Normale einer Fläche von $\bar{P}\infty$. Zwei einzele Individuen der Combination $\infty P.\frac{1}{3}\breve{P}\infty$ würden, sich nach diesem Gesetze durchkreuzend, ungefähr wie Fig. 650 erscheinen; allein gewöhnlich sind es schon zwei nach dem ersteren Gesetze gebildete Zwillinge der Combination $0P.\breve{P}\infty.\bar{P}\infty.\infty P$, von denen zwei Individuen nach diesem zweiten Gesetze verbunden sind, so dass Vierlingskrystalle wie Fig. 656 zum Vorschein kommen, in welchen beide Gesetze zugleich verwirklicht sind. Die Fläche $0P$ des einen Paares entspricht der Fläche $\frac{1}{3}\bar{P}\infty$ des andern Paares von Individuen, und der Winkel der beiderseitigen basischen Flächen beträgt 115° 22′.

§. 599.

Zwillinge des rhombischen Arsenikkieses.

Im rhombischen Arsenikkiese macht sich die Zwillingsbildung nach denselben beiden Gesetzen geltend wie im rhombischen Eisenkiese.

Die Dimensionen der Species werden nahe durch das Verhältniss

$$a : b : c = \sqrt{16} : \sqrt{11} : \sqrt{5}$$

ausgedrückt; die gewöhnlichsten Gestalten sind $0P$, ∞P (112° 0′), $\frac{1}{4}\breve{P}\infty$, $\breve{P}\infty$ (79° 20′) und $\bar{P}\infty$ (58° 25′).

Digitized by Google

Hieraus folgen für das Gesetz: Zwillingsaxe die Normale einer Fläche von ∞P, die Parallelflächen

für ∞P, eine Fl. von ∞P, eine von $\infty \breve{P} 7$
- $\frac{1}{4}\breve{P}\infty$, zwei Fl. von $\frac{5}{32}\bar{P}\frac{5}{3}$
- $\breve{P}\infty$, - - - $\frac{5}{8}\bar{P}\frac{5}{3}$
- $P\infty$, - - - $\frac{41}{8}\breve{P}\frac{11}{3}$

und für das Gesetz: Zwillingsaxe die Normale einer Fläche von $\bar{P}\infty$, die Parallelflächen

für $0P$ eine Fläche von $\frac{10}{11}\bar{P}\infty$
- $\bar{P}\infty$ - - - - $\bar{P}\infty$, eine von $\frac{1}{43}\bar{P}\infty$
- ∞P zwei Flächen von $\frac{21}{32}\breve{P}\frac{21}{11}$
- $\frac{1}{4}\breve{P}\infty$ - - - - $\frac{21}{44}\breve{P}\frac{21}{16}$
- $\breve{P}\infty$ - - - - $\frac{24}{11}\breve{P}\frac{24}{10}$

Die Zwillingsbildung der ersten Art findet zumal für die fast tafelartige Combination $\infty P.\frac{1}{4}\breve{P}\infty.0P$ theils mit Juxtaposition Statt, wie in Fig. 653; theils mit Durchkreuzung, wie in Fig. 651; auch wiederholt sich selbige sowohl mit parallelen als geneigten Zusammensetzungsflächen. Die Streifung lässt jedenfalls die Demarcationen der Individuen sehr wohl erkennen.

Die Zwillinge der zweiten Art sind fast immer Durchkreuzungszwillinge, und finden sich so besonders häufig an der Combination $\infty P.\frac{1}{4}\breve{P}\infty.0P$, Fig. 650.

§. 600.

Zwillinge des Chrysoberylles und Manganerzes.

Am Chrysoberylle, für welchen sehr nahe

$$a:b:c = \sqrt{3}:3:\sqrt{2}$$

tritt nicht selten eine Zwillingsbildung nach dem Gesetze ein: Zwillingsaxe die Normale einer Fläche von $\breve{P}\infty$, oder auch einer Fläche von $3\breve{P}\infty$. Da die Polkante von $\breve{P}\infty$ sehr nahe 120°, oder jene von $3\breve{P}\infty$ sehr nahe 60° misst, so folgt, dass sich die Hauptaxen beider Individuen sehr nahe unter 60° schneiden, und dass eine Fläche von $\breve{P}\infty$ des einen Individuums der Fläche $\infty\breve{P}\infty$ des andern beinahe paral-

Digitized by Google

lel wird, und *vice versa*; Fig. 652. Die Zwillingsbildung wiederholt sich zuweilen mit geneigten Zusammensetzungsflächen, und dann entstehen sternförmige Drillingskrystalle. Wiewohl die Flächen $\infty\bar{P}\infty$ beider Individuen gewöhnlich in eine Ebene fallen, so giebt sich doch ihre Demarcationslinie durch die Sutur zu erkennen, in welcher die verticalen Streifen jener Flächen zusammenstossen.

Nach demselben Gesetze sind auch die Zwillinge des Glanzmanganerzes oder Marganites gebildet *), indem gleichfalls die Zwillingsaxe einer Fläche des Prismas $\breve{P}\infty$ entspricht, dessen Polkante jedoch 122° 50′ misst, daher dies auch der Neigungswinkel der Hauptaxen beider Individuen wird; Fig 660.

§. 601.

Zwillinge des Staurolithes.

Der Staurolith ist eine durch ihre kreuzförmigen Zwillingskrystalle sehr merkwürdige Species, obgleich die Krystallreihe selbt sehr wenig entwickelt ist, indem die Individuen gewöhnlich die säulenförmige Combination $\infty P.\infty\breve{P}\infty.0P$ darstellen, welche nur zuweilen durch die Flächen des horizontalen Prismas $\bar{P}\infty$ etwas modificirt wird.

Phillips giebt an dieser Krystallform die Winkel an:

$$\infty P : \infty\breve{P}\infty = 115° 18'$$
$$\infty P : \bar{P}\infty = 137° 58'$$

ich fand durch neuerdings wiederholte Messungen an einem ziemlich gut spiegelnden Krystalle vom Gotthardt

---

*) An dieser Species findet sich noch ein zweites Gesetz verwirklicht, welches jedoch nur sofern wirkliche Zwillinge liefert, wiefern die Krystallreihe durch das Auftreten rhombischer Sphenoide charakterisirt ist; dies Gesetz lautet nämlich: Zwillingsaxe die Normale von $\infty\breve{P}\infty$.

Digitized by Google

$$\infty P : \infty\breve{P}\infty = 115^\circ\, 20'$$
$$\infty P : \bar{P}\infty = 138^\circ\, 2'$$

daraus folgt

für ∞P die stumpfe Kante 129° 20′
- $\bar{P}\infty$ die Polkante 69° 16′

und

$$a : b : c = 1,447 : 2,1123 : 1$$

Haüy nahm die approximativen Winkel $\infty P =$ 129° 31′ und $\bar{P}\infty = 70^\circ\, 31'$, oder die Dimensionen

$$a : b : c = 2 : 3 : \sqrt{2}$$

an. Wegen der eben so merkwürdigen als einfachen Verhältnisse, die sich aus dieser Annahme für die Zwillingskrystalle ergeben, dürfte es nicht unwahrscheinlich seyn, dass das Haüysche Verhältniss der Dimensionen der Temperatur des Bildungsactes entspreche, und folglich dasjenige sey, welchem allein physische Bedeutsamkeit für die Species zuerkannt werden kann.

Es sind nämlich die Zwillinge des Staurolithes nach folgenden beiden Gesetzen gebildet:

1) Zwillingsaxe die Normale einer Fläche des horizontalen Prismas $\frac{3}{2}\breve{P}\infty$; Fig. 661.
2) Zwillingsaxe die Normale einer Fläche der Pyramide $\frac{3}{2}\breve{P}\frac{3}{2}$; Fig. 662.

In beiden Fällen findet eine vollkommene Durchkreuzung der Individuen Statt, weshalb sie immer ungefähr so erscheinen, wie es die Figg. 661 und 662 darstellen.

Ist nun wirklich $a : b = 2 : 3$, so werden die nach dem ersten Gesetze gebildeten Zwillinge die merkwürdige Eigenschaft besitzen, dass beide Individuen genau rechtwinklig, und die Flächen 0P des einen den Flächen $\infty\breve{P}\infty$ des andern genau parallel sind; eine Eigenschaft, welche verschwindet, wenn die aus Phillips's und meinen Messungen folgenden Dimensionen die wahren, d. h. die dem Bildungsacte ent-

Digitized by Google

sprechenden Dimensionen sind, weil sich dann beide Individuen unter einem Winkel von 88° $\frac{1}{2}$ kreuzen würden.

Ist ferner wirklich $a:b:c = 2:3:\sqrt{2}$, so folgt für die nach dem zweiten Gesetze gebildeten Zwillinge,

a) dass sich die Hauptaxen beider Individuen unter 60° schneiden;
b) dass sich auch die Flächen $\infty\breve{P}\infty$ beider Individuen unter 60° schneiden;
c) dass das eine System der Zwillingskanten ein regelmässiges Hexagon darstellt.

Diese und andere, im nächsten §. angegebene Relationen verschwinden dagegen, wenn das Haüysche Verhältniss der Dimensionen nicht das wahre ist.

Es wäre daher wohl der Mühe werth, die Veränderungen zu untersuchen, welchen die Winkel des Staurolithes in höheren Temperaturen unterworfen sind, da die geognostischen Verhältnisse dieses Minerales darauf hindeuten, dass er aus einem feurig flüssigen Zustande zur Erstarrung gekommen, und folglich in einer weit höheren Temperatur gebildet sey, als diejenige ist, bei welcher die gewöhnlichen Messungen angestellt werden.

§. 601.

Fortsetzung.

Unter Voraussetzung der von Haüy angegebenen Dimensionen erhalten wir folgende Relationen zwischen den Flächen beider Individuen.

1) In den rechtwinkligen Zwillingen sind die Parallelflächen

für	$0P$	die Flächen $\infty\breve{P}\infty$
-	$\infty\breve{P}\infty$	- - - $0P$
-	∞P	- - - $\frac{2}{3}\bar{P}\infty$
-	$\bar{P}\infty$	- - - $\infty\breve{P}\frac{3}{2}$

Digitized by Google

Die Gränze beider Individuen wird bei vollkommen symmetrischer Ausbildung von zwölf einspringenden Zwillingskanten gebildet, die zu sechs in einer Ebene liegen, und in selbiger ein symmetrisches Hexagon mit zwei Winkeln von 143° 8′ und vier Winkeln von 108° 26′ bilden.

2) In den schiefwinkligen Zwillingen finden sich die Parallelflächen aus §. 586, indem man

$$a = 2,\ b = 3,\ c = \sqrt{2}$$
$$m = r = \tfrac{3}{2},\ \text{und}\ n = 1$$

setzt, wie folgt:

für 0P eine Fläche von $\frac{3}{2}\breve{P}\frac{3}{2}$
- $\infty\breve{P}\infty$ - - - - $\frac{3}{2}\breve{P}\frac{3}{2}$
- ∞P - - - - $\frac{1}{4}\breve{P}3$, und eine von $3\breve{P}6$
- $\bar{P}\infty$ - - - - $\frac{9}{2}\breve{P}\frac{9}{2}$, - - - $\frac{1}{2}\breve{P}\frac{3}{2}$

Die Gränze beider Individuen wird bei vollkommen symmetrischer Ausbildung von zwölf einspringenden Zwillingskanten gebildet, die zu sechs in e i n e r Ebene liegen; das eine System bildet ein gleichwinkliges Hexagon, das andere ein unregelmässiges Hexagon mit zwei rechten Winkeln.

§. 602.

Zwillinge des rhombischen Kupferglanzes.

Wie am Staurolith das Gesetz verwirklicht ist, dass die Zwillingsaxe die Normale einer Fläche der Pyramide $\frac{3}{2}\breve{P}\frac{3}{2}$, so findet sich am rhombischen Kupferglanze das Gesetz, dass die Zwillingsaxe die Normale einer Fläche der Pyramide $\frac{1}{2}P$. Aus den von Mohs mitgetheilten Messungen

$$\infty P = 119°\ 35'$$

Mittelkante von $\frac{1}{3}P = 65°\ 28'$

folgt für die Dimensionen der Krystallreihe

$$a : b : c = 0{,}9703 : 1 : 0{,}5822$$

oder ziemlich nahe

$$a : b : c = \sqrt{47} : \sqrt{50} : \sqrt{17}$$

Die Combination $0P.\frac{1}{3}P.\frac{2}{3}\breve{P}\infty$, welche bis zur Täuschung einer hexagonalen Tafel mit zweireihig angesetzten Randflächen ähnelt, obgleich die Mittelkanten der scheinbar hexagonalen Pyramide zweierlei Werth (65° 28′ und 65° 45′) haben, kommt nach dem erwähnten Gesetze zusammengesetzt vor, Fig. 663. Die Axen beider Individuen, und folglich auch die basischen Flächen derselben bilden einen Winkel von 88° und sind daher auf einander beinahe rechtwinklig.

Häufiger finden sich jedoch Zwillinge nach dem Gesetze: Zwillingsaxe die Normale, Zusammensetzungsfläche eine Fläche von ∞P; die Zusammensetzung wiederholt sich sowohl mit parallelen als auch mit geneigten Zusammensetzungsflächen, und bildet daher ähnliche Drillinge, wie solche am Arragonit und Bleicarbonat beschrieben worden, und auch ganz auf dieselbe Art am Bournonit und am rhombischen Silberglanze vorkommen.

Viertes Capitel.

Zwillinge des tetragonalen Systemes.

A. Theorie.

§. 603.

Allgemeinstes Zwillingsgesetz.

Die Theorie der Zwillinge des tetragonalen Systemes wird dem in §. 561 aufgestellten Gesetze zufolge davon ausgehen müssen, dass sich für zwei Individuen einer und derselben tetragonalen Krystallreihe die Flächennormale irgend einer ditetragonalen Pyramide mPn als Zwillingsaxe geltend macht. Da nun der geometrische Grundcharakter des tetragonalen von jenem des rhombischen Systemes nur darin

Digitized by Google

abweicht, dass die beiden Nebenaxen b und c einander gleich sind, so werden wir die Theorie der Zwillinge tetragonaler Krystallreihen unmittelbar aus den Resultaten des §. 586 ableiten können, indem wir in selbigen

$$b = c = r = 1$$

setzen; denn

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

ist allgemein die Gleichung einer Fläche der ditetragonalen Pyramide mPn.

Wir erhalten also für das Gesetz, da die Zwillingsaxe die Normale einer Fläche von mPn, folgende Resultate.

Gleichungen der Axen des einen Individuums in Bezug auf die Axen des andern:

Axe der x':

$$\frac{x}{m^2n^2a^2 + m^2a^2 - n^2} + \frac{y}{2mna} = 0$$

$$y - \frac{z}{n} = 0$$

Axe der y':

$$\frac{x}{2mna} + \frac{y}{m^2n^2a^2 + n^2 - m^2a^2} = 0$$

$$\frac{z}{ma} - x = 0$$

Axe der z':

$$\frac{z}{m^2a^2 + n^2 - m^2n^2a^2} + \frac{x}{2mn^2a} = 0$$

$$\frac{x}{n} - \frac{y}{ma} = 0$$

Substituenden der Coordinaten x', y' und z' in irgend einer für das Axensystem des einen Individuums gegebenen Gleichung, um selbige auf das Axensystem des andern Individuums zu beziehen:

Digitized by Google

$$x' = \frac{1}{M^2}[2mn(y + nz)a - A^2x]$$

$$y' = \frac{1}{M^2}[2mn(maz + x)a - B^2y]$$

$$z' = \frac{1}{M^2}[2mn(nx + may)a - C^2z]$$

wenn nämlich

$$m^2n^2a^2 + m^2a^2 + n^2 = M^2$$
$$m^2n^2a^2 + m^2a^2 - n^2 = A^2$$
$$m^2n^2a^2 - m^2a^2 + n^2 = B^2$$
$$-m^2n^2a^2 + m^2a^2 + n^2 = C^2$$

Ist endlich für irgend eine Fläche

$$\frac{x'}{m'a} + \frac{y'}{n'} + \frac{z'}{r'} = 1$$

des einen Individuums die Gleichung der Parallelfläche im andern Individuo

$$\frac{x}{pa} + \frac{y}{q} + \frac{z}{s} = 1$$

so sind die Werthe der Coëfficienten p, q und s folgende:

$$p = \frac{m'n'r'M^2}{2mn(nn' + r')m'a^2 - n'r'A^2}$$

$$q = \frac{m'n'r'M^2}{2mn(r' + mm'a^2)n' - r'm'B^2}$$

$$s = \frac{m'n'r'M^2}{2mn(mm'a^2 + nn')r' - m'n'C^2}$$

§. 604.

Erstes Zwillingsgesetz.

Das gewöhnlichste Gesetz der Zwillingsbildung im tetragonalen Systeme ist nun folgendes:

Zwillingaxe die Normale einer Fläche von P∞, oder: Umdrehungsaxe normal, Zusammensetzungsfläche parallel einer Fläche derjenigen Pyramide, welche die Polkanten der Grundgestalt regelmässig abstumpft.

Digitized by Google

Um die Formeln des vorhergehenden §. diesem Gesetze anzupassen, haben wir in ihnen

$$m = 1, \text{ und } n = \infty$$

zu setzen, und erhalten so folgende Resultate:

G l e i c h u n g e n d e r A x e n des einen Individuums in Bezug auf die Axen des andern:

Axe der x':

$$y = 0, \text{ und } \frac{x}{a^2-1} + \frac{z}{2a} = 0$$

Axe der y':

$$x = 0, \text{ und } z = 0$$

Axe der z':

$$\frac{z}{a^2-1} - \frac{x}{2a} = 0, \text{ und } y = 0$$

S u b s t i t u e n d e n der Coordinaten x', y' und z':

$$x' = \frac{1}{a^2+1}[2az - x(a^2-1)]$$

$$y' = -y$$

$$z' = \frac{1}{a^2+1}[2ax + z(a^2-1)]$$

C o ë f f i c i e n t e n p, q und s in der Gleichung

$$\frac{x}{pa} + \frac{y}{q} + \frac{z}{s} = 1$$

welche die Parallelfläche einer durch die Gleichung*)

$$\frac{x'}{ma} + \frac{y'}{n} + \frac{z'}{r} = 1$$

gegebenen Fläche des einen Individuums bestimmt:

$$p = \frac{mr(a^2+1)}{2ma^2 - r(a^2-1)}$$

$$q = n$$

$$s = \frac{mr(a^2+1)}{2r + m(a^2-1)}$$

*) Die Accente der Buchstaben m', n' und r' können jetzt wegbleiben, da ihre Unterscheidung von andern m, n und r unnöthig wird.

Digitized by Google

Da m, n und r rationale Zahlen, so wird die Parallelfläche jedenfalls eine reelle seyn, wenn a rational oder eine Quadratwurzel ist.

§. 605.

Fortsetzung; Parallelflächen der Pyramide mPn.

Die zu Ende des vorhergehenden §. stehenden Werthe von p, q und s gelten allgemein für die Parallelflächen irgend einer ditetragonalen Pyramide mPn, beziehen sich jedoch zunächst nur auf das Flächenpaar im Octanten der positiven Halbaxen; nimmt man m negativ, so erhält man die Parallelflächen des in dem Nebenoctanten der anderen Pyramidenhälfte gelegenen Flächenpaares. Um dann für die einzelen Flächen jedes Paares die entsprechenden Parallelflächen zu bestimmen, braucht man nur ein Mal $r=1$, das andere Mal $n=1$, und $r=n$ zu setzen. So erhält man vier Verhältnisse von Parametern für die vier Parallelflächen eines Gliedes der ditetragonalen Pyramide; sie verwandeln sich in die vier Verhältnisse, welche den Parallelflächen des Nebengliedes entsprechen, wenn man den in die Axe der y fallenden Parameter negativ nimmt. Dadurch wird jedoch in den krystallographischen Zeichen der respectiven Gestalten, welchen diese Parallelflächen angehören, nichts geändert, und wir gelangen daher zu dem Resultate, dass die Flächen einer jeden ditetragonalen Pyramide mPn des einen Individuums paarweis den Flächen vierer Gestalten in dem andern Individuo entsprechen, und *vice versa.*

Diese Flächenpaare, und die Verhältnisse der ihnen entsprechenden Parallelflächen bestimmen sich, wie folgt:

a) Das erste Flächenpaar von mPn ist dasjenige, welches mit der Zwillingsaxe unmittelbar zum

Durchschnitte kommt; seine Parallelflächen im andern Individuo haben das Verhältniss der Ableitungszahlen *):

$$\frac{m(a^2+1)}{2ma^2-a^2+1} : \pm n : \frac{m(a^2+1)}{2+m(a^2-1)}$$

b) Das zweite Flächenpaar von mPn wird von denjenigen beiden Nebenflächen der vorhergehenden gebildet, welche mit ihnen in den diagonalen Polkanten zusammentreffen; seine Parallelflächen haben das Verhältniss:

$$\frac{mn(a^2+1)}{2ma^2-n(a^2-1)} : \pm 1 : \frac{mn(a^2+1)}{2n+m(a^2-1)}$$

c) Das dritte Flächenpaar von mPn wird von denjenigen beiden Nebenflächen des ersten Paares gebildet, welche mit ihm die Mittelkanten gemeinschaftlich haben; seinen Parallelflächen entspricht das Verhältniss:

$$-\frac{m(a^2+1)}{2ma^2+a^2-1} : \pm n : -\frac{m(a^2+1)}{m(a^2-1)-2}$$

d) Das vierte Flächenpaar von mPn endlich wird von denjenigen Nachbarflächen des ersten Paares gebildet, welche zugleich die Nebenflächen der beiden andern Paare sind; seine Parallelflächen haben das Verhältniss:

$$-\frac{mn(a^2+1)}{2ma^2+n(a^2-1)} : \pm 1 : -\frac{mn(a^2+1)}{m(a^2-1)-2n}$$

§. 606.

Fortsetzung; Parallelflächen der Pyramide mP.

Setzt man in den Resultaten des vorhergehenden §. $n=1$, so erhält man für die Flächen der tetragonalen Pyramide mP des einen Individuums die Parallelflächen im andern Individuo. Dabei ist klar, dass

*) In diesen und allen folgenden Verhältnissen bezieht sich das erste Glied auf die Hauptaxe.

Digitized by Google

das erste und zweite, so wie das dritte und vierte Flächenpaar von mPn nur je einem Flächenpaare von mP entsprechen, daher auch für jedes mP in dem einen Individuo nur zwei verschiedene Gestalten im andern Individuo gefordert werden.

Es bestimmen sich nämlich für die beiden, mit der Zwillingsaxe unmittelbar zum Durchschnitte kommenden Flächen von mP die Parallelflächen im andern Individuo durch das Verhältniss:

$$\frac{m(a^2+1)}{2ma^2-(a^2-1)} : \pm 1 : \frac{m(a^2+1)}{2+m(a^2-1)}$$

und für die beiden übrigen Flächen von mP die Parallelflächen im andern Individuo durch das Verhältniss:

$$-\frac{m(a^2+1)}{2ma^2+(a^2-1)} : \pm 1 : -\frac{m(a^2+1)}{m(a^2-1)-2}$$

§. 607.

Fortsetzung; Parallelflächen der Pyramide $mP\infty$.

Setzt man in den Resultaten des §. 605 $n = \infty$, so erhält man für die Flächen der tetragonalen Pyramide $mP\infty$ des einen Individuums die Parallelflächen im andern Individuo. Dabei ist klar, dass die dem ersten und dritten Flächenpaare von mPn in §. 605 entsprechenden Flächen zwei verschiedene Gestalten im andern Individuo fordern, während für die, dem zweiten und vierten Flächenpaare entsprechenden Flächen eine und dieselbe Gestalt gilt.

Derjenigen Fläche von $mP\infty$, welche mit der Zwillingsaxe unmittelbar zum Durchschnitte kommt, entspricht nämlich im andern Individuo die Fläche einer Pyramide der Nebenreihe von dem Verhältnisse:

$$\frac{m(a^2+1)}{2ma^2-a^2+1} : \infty : \frac{m(a^2+1)}{2+m(a^2-1)}$$

Diejenigen beiden Flächen von $mP\infty$, welche die Nebenflächen der vorhergehenden an den Polkanten

Digitized by Google

sind, haben zu Parallelflächen: die Flächen einer ditetragonalen Pyramide von dem Verhältnisse:

$$-\frac{m(a^2+1)}{a^2-1} : \pm 1 : \frac{m(a^2+1)}{2}$$

Die dritte Nebenfläche endlich, welche mit der ersteren eine Mittelkante bildet, hat zur Parallelfläche wiederum die Fläche einer Pyramide aus der Nebenreihe von dem Verhältnisse:

$$-\frac{m(a^2+1)}{2ma^2+a^2-1} : \infty : -\frac{m(a^2+1)}{m(a^2-1)-2}$$

§. 608.

Fortsetzung; Parallelflächen der Prismen und der Basis.

Setzt man in den Resultaten des §. 605 $m=\infty$, so erhält man für das ditetragonale Prisma ∞Pn folgende Bestimmungen:

Dasjenige Flächenpaar des Prismas, welches mit der Zwillingsaxe unmittelbar zum Durchschnitte kommt, hat zwei Parallelflächen von dem Verhältnisse:

$$\frac{a^2+1}{2a^2} : \pm n : \frac{a^2+1}{a^2-1}$$

Die Nebenflächen des vorhergehenden Paares haben dagegen die Parallelflächen:

$$\frac{n(a^2+1)}{2a^2} : \pm 1 : \frac{n(a^2+1)}{a^2-1}$$

Setzt man in diesen Verhältnissen $n=1$, so erhält man für die Flächen des Prismas ∞P das Verhältniss seiner Parallelflächen:

$$\frac{a^2+1}{2a^2} : \pm 1 : \frac{a^2+1}{a^2-1}$$

Setzt man dagegen $n=\infty$, so erhält man für die Parallelflächen des Prismas $\infty P\infty$ die Verhältnisse:

$$\frac{a^2+1}{2a^2} : \infty : \frac{a^2+1}{a^2-1}$$

und

$$\infty : 1 : \infty$$

Digitized by Google

Endlich entspricht der Fläche 0P des einen Individuums im andern Individuo die Fläche:

$$\frac{2}{1-a^2} : \infty : 1$$

§. 609.

Zweites Zwillingsgesetz.

Ein zweites, jedoch weit seltneres Zwillingsgesetz im Tetragonalsysteme ist:

Zwillingaxe die Normale einer Fläche von P, oder: Umdrehungsaxe normal, Zusammensetzungsfläche parallel einer Fläche der Grundgestalt.

Um die diesem Gesetze entsprechenden Resultate der Theorie zu finden, haben wir in den Formeln des §. 603 $m = n = 1$ zu setzen, und erhalten so folgende Bestimmungen:

Gleichungen der Axen des einen Individuums in Bezug auf die Axen des andern:

Axe der x':

$$\frac{x}{2a^2-1} + \frac{y}{2a} = 0, \quad y - z = 0$$

Axe der y':

$$\frac{x}{2a} + y = 0, \quad \frac{z}{a} - x = 0$$

Axe der z':

$$z + \frac{x}{2a} = 0, \quad x - \frac{y}{2} = 0$$

Substituenden der Coordinaten x', y' und z':

$$x' = \frac{1}{2a^2+1}[2ay + 2az - (2a^2-1)x]$$

$$y' = \frac{1}{2a^2+1}[2a^2z + 2ax - y]$$

$$z' = \frac{1}{2a^2+1}[2ax + 2a^2y - z]$$

Digitized by Google

Coëfficienten p, q und s in der Gleichung

$$\frac{x}{pa} + \frac{y}{q} + \frac{z}{s} = 1$$

welche die Parallelfläche einer durch die Gleichung

$$\frac{x'}{ma} + \frac{y'}{n} + \frac{z'}{r} = 1$$

gegebenen Fläche des einen Individuums bestimmt:

$$p = \frac{mnr(2a^2 + 1)}{2ma^2(n + r) - nr(2a^2 - 1)}$$

$$q = \frac{mnr(2a^2 + 1)}{2n(ma^2 + r) - rm}$$

$$s = \frac{mnr(2a^2 + 1)}{2r(ma^2 + n) - mn}$$

Da m, n und r rationale Zahlen sind, so wird die Parallelfläche jedenfalls eine reelle Fläche seyn, wenn a rational oder eine Quadratwurzel ist.

§. 610.

Fortsetzung; Parallelflächen der Pyramide mPn.

Die zu Ende des vorhergehenden §. stehenden Werthe von p, q und s bestimmen im Allgemeinen für irgend eine Fläche von mPn in dem einen Individuo die im andern Individuo vorhandene Parallelfläche, und es kommt nur noch darauf an, diese allgemeine Bestimmung in einer unserer krystallographischen Bezeichnung mehr entsprechenden Form darzustellen.

Die Werthe von p, q und s beziehen sich zunächst nur auf dasjenige Flächenpaar von mPn, welches in den Octanten der Zwillingsaxe, oder in den Octanten der positiven Halbaxen fällt. Setzt man successiv m, n und r negativ, so erhält man diejenigen Werthe derselben, welche sich auf die Flächenpaare in den drei Nebenoctanten beziehen. Um endlich die einzelen Flächen jedes Paares zu fixiren, hat man nur ein Mal $r = 1$, und das andere Mal $n = 1$, und $r = n$ zu setzen.

Auf diese Art erhält man durch Zergliederung des allgemeinen Resultates folgende besondere Resultate für die vier verschiedenen Flächenpaare der ditetragonalen Pyramide mPn:

a) Das erste Flächenpaar von mPn ist dasjenige, welches in den Octanten der Zwillingsaxe fällt; seinen Parallelflächen im andern Individuo entsprechen die Flächen einer ditetragonalen Pyramide von dem Verhältnisse der Parameter:

$$\frac{1}{2ma^2(n+1)-n(2a^2-1)} : \frac{1}{2n(ma^2+1)-m} : \frac{1}{2(ma^2+n)-mn}$$

b) Das zweite Flächenpaar von mPn ist dasjenige Nebenpaar des ersteren, welches in der entgegengesetzten Hälfte der Gestalt liegt; seinen Parallelflächen entspricht das Verhältniss:

$$\frac{1}{2ma^2(n+1)+n(2a^2-1)} : \frac{1}{2n(ma^2-1)-m} : \frac{1}{2(ma^2-n)-mn}$$

c) Das dritte Flächenpaar von mPn ist dasjenige, welches von den beiden Nebenflächen des ersten Paares in derselben Gestalthälfte gebildet wird; seine Parallelflächen bestimmen sich durch das Verhältniss:

$$\frac{1}{2ma^2(n-1)-n(2a^2-1)} : \frac{-1}{2(ma^2-n)+mn} : \frac{1}{2n(ma^2+1)+m}$$

d) Das vierte Flächenpaar endlich wird von denjenigen beiden Flächen gebildet, welche an den Polkanten des zweiten Paares liegen; seinen Parallelflächen entspricht das Verhältniss:

$$\frac{-1}{2ma^2(n-1)+n(2a^2-1)} : \frac{1}{2(ma^2+n)+mn} : \frac{-1}{2n(ma^2-1)+m}$$

§. 611.

Fortsetzung; Parallelflächen von mP.

Setzt man in den Verhältnissen des vorhergehenden §. $n = 1$, so erhält man die Parallelflächen der tetragonalen Pyramide mP, wie folgt:

Digitized by Google

a) Derjenigen Fläche von mP, welche in dem Octanten der Zwillingsaxe liegt, entspricht die Parallelfläche

$$\frac{m(2a^2-1)+2}{2a^2(2m-1)+1} : 1 : 1$$

b) Diejenige Fläche von mP, welche mit der vorhergehenden eine Mittelkante bildet, hat die Parallelfläche:

$$\frac{m(2a^2-1)-2}{2a^2(2m+1)-1} : 1 : 1$$

c) Den beiden andern Flächen von mP entsprechen endlich die Flächen einer ditetragonalen Pyramide von dem Verhältnisse:

$$\frac{m(2a^2+1)+2}{2a^2-1} : \frac{m(2a^2+1)+2}{m(2a^2+1)-2} : 1$$

§. 612.

Fortsetzung; Parallelflächen von mP∞.

Setzt man in den Verhältnissen des §. 610 $n=\infty$, so erhält man für die Flächen der tetragonalen Pyramide mP∞ folgende Parallelflächen:

a) Für die beiden an der Zwillingsaxe liegenden Flächen zwei Flächen einer ditetragonalen Pyramide von dem Verhältnisse der Ableitungszahlen:

$$\frac{1}{2a^2(m-1)+1} : \frac{1}{2(ma^2+1)} : \frac{1}{2-m}$$

Ist also die Pyramide 2P∞, so werden diese Parallelflächen wieder zwei Flächen von 2P∞, und ist sie P∞, so werden es zwei Flächen von $2(a^2+1)$P$2(a^2+1)$.

b) Für die beiden andern Flächen von mP∞ werden die Parallelflächen einer ditetragonalen Pyramide von dem Verhältnisse der Ableitungszahlen:

Digitized by Google

$$\frac{1}{2a^2(m+1)-1} : \frac{1}{2(ma^2-1)} : \frac{-1}{2+m}$$

angehören.

§. 613.

Fortsetzung; Parallelflächen der Prismen und der Basis.

Setzt man in den Verhältnissen des §. 610 $m=\infty$, so erhält man die Parallelflächen des ditetragonalen Prismas ∞Pn, nämlich

a) für die beiden Flächen im Octanten der Zwillingsaxe:

$$\frac{2na^2-1}{2a^2(n+1)} : 1 : \frac{2na^2-1}{2a^2-n}$$

b) für die beiden Nebenflächen der ersteren:

$$\frac{1}{2a^2(n-1)} : \frac{-1}{2a^2+n} : \frac{1}{2na^2+1}$$

Hieraus folgen die Verhältnisse der Parallelflächen:

für das Prisma ∞P:

$$\frac{2a^2-1}{4a^2} : 1 : 1$$

und $\infty : -1 : 1$

für das Prisma $\infty P\infty$:

$$1 : 1 : 2a^2$$

Endlich findet sich für die Basis 0P die Parallelfläche

$$\frac{2}{1-2a^2} : 1 : 1$$

§. 614.

Drittes Zwillingsgesetz.

Ausser den beiden Zwillingsgesetzen, deren Theorie im Vorhergehenden ausführlicher entwickelt worden, kommen im Gebiete des Tetragonalsystemes, jedoch selten, noch einige andere Gesetze vor, von welchen wir nur dasjenige erwähnen wollen, welches

Digitized by Google

sich für die hemiëdrischen Combinationen des Scheelkalkes und tetragonalen Kupferkieses verwirklicht findet, und auch nur für dergleichen Combinationen wirkliche Zwillingskrystalle zur Folge haben kann, weil es dem in §. 578 angegebenen zweiten Gesetze des Tesseralsystemes ganz analog ist. Es lautet nämlich:

Zwillingsaxe die Normale einer Fläche von ∞P, oder: Umdrehungsaxe normal, Zusammensetzungsfläche parallel einer Fläche des Prismas der Hauptreihe.

Die Theorie dieses Gesetzes ist sehr einfach, indem es auf die holoëdrischen Gestalten ohne allen Einfluss ist, für die hemiëdrischen Gestalten aber nur eine Reproduction der holoëdrischen Muttergestalten zur Folge hat. Es erhält nämlich durch Verwirklichung dieses Gesetzes eine jede hemiëdrische Gestalt des einen Individuums zu der gleichnamigen hemiëdrischen Gestalt des andern Individuums genau diejenige Stellung, in welcher beide als complementare Gegenkörper aus einer und derselben Muttergestalt abzuleiten sind. Die Theorie hat daher für die Zwillinge dieser Art gar keine besondere Aufgabe zu lösen, weil die gegenseitigen Verhältnisse der Flächen beider Individuen ein für alle Mal bestimmt sind.

B. Beschreibung der wichtigsten Zwillinge.

§. 615.

Zwillinge des Zinnerzes.

Das Zinnerz ist eine von denjenigen Mineralspecies, welche weit häufiger in Zwillingskrystallen, als in einfachen Krystallen vorkommen. Für seine Grundgestalt bestimmt sich die Axe:

$$a = \sqrt{\tfrac{5}{11}}$$

und als die gewöhnlichsten Gestalten seiner Krystallreihe erscheinen

$0P$
$P \;=\; s$, Polk. 121° 36′, Mittelk. 87° 16′
$P\infty = P$, - - 133° 27′, - - 67° 58′
$\infty P\frac{3}{2} = r$, Seitenk. 112° 38′, und 157° 22′
$\infty P \;=\; g$
$\infty P\infty = l$

Die Zwillinge sind nach dem ersten Gesetze gebildet, also die Zwillingsaxe eine Normale der Pyramide P∞; hiernach werden, unter Voraussetzung des obigen Werthes von a, die Parallelflächen

für 0P, eine Fläche von $\frac{11}{3}P\infty$,
- P, zwei Fl. von P, zwei von $7P\frac{7}{4}$,
- P∞, eine Fl. P∞, zwei Fl. von $\frac{11}{3}P\frac{11}{8}$, eine 7P∞,
- $\infty P\frac{3}{2}$, zwei Fl. von $\frac{16}{15}P\frac{16}{9}$, zwei von $\frac{12}{5}P4$,
- ∞P, zwei Fl. von $\frac{8}{5}P\frac{8}{3}$,
- ∞P∞, eine Fl. von $\frac{3}{6}P\infty$, eine von ∞P∞.

§. 616.

Fortsetzung.

Die Zwillingsbildung findet am Zinnerze gewöhnlich nur mit Juxtaposition Statt; so stellt Fig. 664 einen Zwilling der Combination P.∞P, Fig. 665 einen Zwilling der Combination P.∞P.∞P∞, und Fig. 666 einen Zwilling derselben Combination dar, in welcher jedoch die Prismen statt der Pyramide vorherrschen. Der Neigungswinkel der Hauptaxen beträgt in diesen Zwillingen 112° 2′; der visirartig einspringende Winkel, welchen die beiderseitigen Polkanten x der Grundgestalt, oder die sehr häufigen, und an ihrer Streifung kenntlichen Abstumpfungsflächen dieser Polkanten bilden, 135° 56′; der ein- oder ausspringende Winkel der beiderseitigen Flächen ∞P (g) 129° 2′.

In der Regel wiederholt sich die Zwillingsbildung, entweder mit parallelen Zusammensetzungsflächen, wie in Fig. 667, in welchem Falle oft viele lamellare In-

Digitized by Google

dividuen schichtenweis mit einander abwechseln, oder noch häufiger mit geneigten Zusammensetzungsflächen, in welchem Falle Drillingskrystalle wie Fig. 669, oder auch analoge Vierlings-, Fünflingskrystalle u. s. w. entstehen. Diese letztere Art des Vorkommens ist die gewöhnlichere der Varietäten aus dem Erzgebirge, deren Drillinge und Vierlinge meist so auf der Unterlage aufgewachsen sind, dass die Enden der beiden äussersten Individuen nach unten, und die mittleren Individuen (also z. B. in dem Drillinge Fig. 669 das Individuum II) nach oben gewendet sind. Die Combinationskanten *t* der nach aussen gewendeten Flächen *l* sind oft durch schmale Spuren der Flächen P∞ etwas eingekerbt.

Diese Drillings-, Vierlingskrystalle u. s. w. stellen in sich selbst zurücklaufende Systeme von Individuen dar; das Maximum der Anzahl vollständiger Individuen ist fünf, so dass ein sechstes, den Kreis schliessendes Individuum nur unvollständig ausgebildet seyn kann. Zuweilen finden sich dergleichen Sechslingskrystalle, von welchen einer der Combination ∞P.∞P∞.∞P$\frac{4}{3}$ in Fig. 668 abgebildet ist.

Endlich wiederholt sich auch die Zusammensetzung symmetrisch an mehren Polkanten der Grundgestalt zugleich; ja, man findet Individuen, welche an jeder Polkante von P das Rudiment eines andern Individuums zeigen, so dass Neunlingskrystalle zum Vorscheine kommen, die bei vollkommen symmetrischer Ausbildung wie Fig. 670 erscheinen.

§. 617.

Zwillinge des Rutiles.

Die Zwillingskrystalle des Rutiles haben sehr viel Aehnlichkeit mit denen des Zinnerzes, wiewohl sie nicht in so mannichfaltigen Verwachsungsarten beobachtet sind.

Digitized by Google

Nach Breithaupts Messungen des Neigungswinkels der Hauptaxen in den Zwillingskrystallen beträgt derselbe etwas über 115°; vielleicht entspricht daher der Grundgestalt die Axe

$$a = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

wonach dieser Winkel 115° 22′ betragen würde. Die gewöhnlichsten Gestalten sind:

P,	Polk.	123° 44′,	Mittelk.	83° 38′
P∞,	- -	135° 34′,	- -	64° 38′
∞P3,	Seitenk.	143° 8′,	und	126° 52′

∞P und ∞P∞.

Die Zwillinge sind nach demselben Gesetze gebildet wie jene des Zinnerzes; daher werden, unter Voraussetzung des Werthes von $a = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$, die Parallelflächen

für P, zwei Fl. von P, zwei von $13P\frac{13}{7}$,
- P∞, eine Fl. P∞, zwei Fl. $\frac{10}{3}P\frac{10}{7}$, eine 13P∞,
- ∞P3, zwei Fl. $\frac{3}{4}P\frac{9}{7}$, zwei Fl. $\frac{21}{4}P7$,
- ∞P, zwei Fl. $\frac{7}{4}P\frac{7}{3}$,
- ∞P∞, eine Fl. ∞P∞, eine Fl. $\frac{3}{4}$P∞.

Die Zwillingsbildung findet gewöhnlich mit Juxtaposition Statt, und liefert bei der säulenförmigen Form der Individuen die bekannten knieförmigen Zwillinge, dergleichen einer der Combination ∞P3.P in Fig. 671 dargestellt ist. Der Neigungswinkel der Hauptaxen beider Individuen beträgt 115° 22′ (nach Breithaupt jedoch nur 115° 2′). Die Zusammensetzung wiederholt sich nicht selten, und bringt Drillingskrystalle hervor wie Fig. 672. Sind die Individuen sehr dünn, nadelförmig, und findet die Zusammensetzung für viele derselben zugleich nach mehren Richtungen Statt, so entstehen theils sparrige, theils netzartige Krystallgruppen, welche letztere bei zunehmender Feinheit der Individuen endlich in filzartige Gewebe haarfeiner Krystalle übergehen.

Digitized by Google

§. 618.

Zwillinge des Schwarzmanganerzes.

Die Krystallreihe des schwarzen Manganerzes hat zur Grundgestalt eine tetragonale Pyramide, für welche

$$a = \sqrt{\tfrac{11}{8}}, \text{ oder vielleicht } = \sqrt{\tfrac{7}{5}}$$

Bis jetzt sind nur die Gestalten

P,	Polk.	105° 28′,	Mittelk.	117° 49′
P∞,	- -	114° 54′,	- -	99° 5′
$\frac{1}{3}$P,	- -	140° 0′,	- -	57° 52′

beobachtet worden; gewöhnlich ist nur die Grundgestalt ausgebildet. Die Zwillingsbildung findet nach dem ersten Gesetze Statt, und es werden daher, wenn $a = \sqrt{\frac{7}{5}}$, die Parallelflächen

für P,	zwei Fl. P,	zwei Fl. $\frac{3}{4}P\frac{3}{2}$	
- $\frac{1}{3}$P,	- - $4P\frac{8}{3}$,	- - $\frac{7}{5}P\frac{7}{3}$	
- P∞,	- - $6P\frac{6}{5}$,	eine Fl. P∞,	eine Fl. $\frac{1}{2}$P∞.

Die Individuen sind durch Juxtaposition oder theilweise Penetration verbunden, Fig. 673; der einspringende Winkel der Polkanten *x* beträgt 161° 50′ (oder 160° 48′, wenn $a = \sqrt{\frac{7}{5}}$). Die Zusammensetzung wiederholt sich zuweilen an allen vier Polkanten der einen Pyramidenhälfte eines mittleren Individuums, wodurch sehr symmetrische Fünflingskrystalle entstehen, Fig. 674. Jedoch pflegt dann das centrale Individuum, welches gleichsam den Träger der ganzen Gruppe bildet, die übrigen dermaassen an Grösse zu übertreffen, dass diese letzteren nur wie Rudimente von Individuen erscheinen, die aus dem grösseren Individuo herausragen; man sieht dann an jeder Polkante dieses letzteren wohl zwei und mehre der ersteren, wie Fig. 675 zeigt.

§. 619.

Zwillinge des tetragonalen Kupferkieses.

Der tetragonale Kupferkies ist eine durch den hemiëdrischen Charakter ihrer Combinationen eben so

Digitized by Google

wie durch die Häufigkeit und Mannichfaltigkeit ihrer Zwillingsbildung sehr merkwürdige Species, deren Krystallformen aber auch durch diese beiden Verhältnisse den bizarresten Verunstaltungen unterworfen zu seyn pflegen, so dass man oft an dem Vorhandenseyn irgend eines Symmetriegesetzes zweifeln, und nichts weniger als die einfache Regelmässigkeit des tetragonalen Systemes erwarten möchte.

Die Krystallreihe des Kupferkieses ist nämlich der sphenoidischen Hemiëdrie unterworfen; es erscheinen daher häufig die Pyramiden der Hauptreihe als tetragonale Sphenoide, die Pyramiden der Zwischenreihen als tetragonale Skalenoëder, und nur die Pyramiden der Nebenreihe so wie die Prismen jedenfalls mit ihrer vollen Flächenzahl.

Für die Grundgestalt bestimmt sich nach Haidingers Messungen

$$a = \sqrt{\tfrac{33}{34}}$$

Die gewöhnlichsten Gestalten sind:

0P	$= a$				
$\frac{1}{2}$P	$= n$,	Polk.	132° 19′,	Mittelk.	69° 44′
P	$= P$,	- -	109° 53′,	- -	108° 40′
$\frac{3}{2}$P	$= r$,	- -	100° 44′,	- -	128° 52′
P∞	$= b$,	- -	120° 30′,	- -	89° 9′
$\frac{3}{2}$P∞	$= o$,	- -	108° 18′,	- -	111° 50′
2P∞	$= c$,	- -	101° 49′,	- -	126° 11′
∞P	$= m$,	und ∞P∞ $= l$			

ausser ihnen kommen noch mehre Skalenoëder und flache Sphenoide vor, deren Bestimmung zum Theil noch nicht möglich war.

Es sind besonders folgende drei Zwillingsgesetze, welche sich am tetragonalen Kupferkiese verwirklicht finden:

1) Zwillingsaxe die Normale einer Fläche P∞,

2) Zwillingsaxe die Normale einer Fläche P,

3) Zwillingsaxe die Normale einer Fläche ∞P.

Digitized by Google

Wir wollen nun die wichtigsten der nach diesen Gesetzen gebildeten Zwillingsformen näher in Betrachtung ziehen.

§. 620.

Fortsetzung.

Die Zwillingsbildung nach dem ersten Gesetze findet meist mit Juxtaposition Statt; so stellt z. B. Fig. 676 einen Zwilling der Combination P.0P.2P∞.P∞ dar, deren Physignomie jedoch nicht selten dadurch verändert wird, dass die Pyramide P in zwei Sphenoide von verschiedener Ausdehnung zerfällt. Die beiderseitigen Flächen *b* bilden ein- und ausspringende Winkel von 178° 18′, die Flächen *c* einspringende Winkel von 144° 50′, die beiderseitigen Basen *a* einen Winkel von 89° 9′. Wiederholt sich die Zusammensetzung an allen vier oberen oder unteren Polkanten von P, so entstehen symmetrische Fünflingskrystalle, wie Fig. 677, in welchen das mittlere Individuum, als Träger der ganzen Gruppe, mit seinem oberen und unteren Ende frei ausgebildet ist, während seine Seiten durch die vier andern Individuen verdeckt sind.

Auf den ersten Anblick hat dieser Fünflingskrystall (den man auch als einen Sechslingskrystall deuten kann) grosse Aehnlichkeit mit der tesseralen Combination O.∞O.∞O∞, zumal, wenn die einspringenden Zwillingskanten der Flächen *c* sehr klein oder gar nicht vorhanden sind. Allein selbst dann, wenn die, diesen Zwillingskanten entsprechenden Einkerbungen auf den Kanten des scheinbaren Oktaëders fehlen, wird man durch die ihren Höhenlinien parallele Streifung der Flächen von P auf die Anerkennung der Zusammensetzung geleitet, weil je drei dieser Flächen zu einer Fläche des Pseudooktaëders contribuiren, und daher ihre resp. Streifungen in drei

Suturen zusammenstossen. Auch fallen je drei dieser Flächen nicht in eine Ebene, sondern bilden sehr stumpfe theils aus- theils einspringende Winkel (von 178° 36′), daher denn auch eigentlich ein Oktaëder mit getheilten Flächen die vorherrschende Gestalt dieser pseudotesseralen Combination bildet. Dass die Flächen des scheinbaren Rhombendodekaëders gleichfalls gebrochen sind, versteht sich von selbst *).

Wenn Combinationen mit vorherrschenden Sphenoiden oder Skalenoëdern nach demselben Gesetze zwillingsartig verbunden sind, so entstehen bei wiederholter Zwillingsbildung gleichfalls Aggregate, welche an die Formen des Tesseralsystemes erinnern; so stellt z. B. Fig. 678 einen Fünflings- oder Sechslingskrystall vor, dessen einzele Individuen die Combination eines vorherrschenden Skalenoëders (*s*) mit einem die kürzere Polkante abstumpfenden Sphenoide, der Basis (*a*), und dem sehr untergeordneten Sphenoide $-\frac{P}{2}$ zeigen. Die ganze Gruppe erscheint, bei symmetrischer Ausbildung, wie ein Hexakistetraëder, dessen mittlere Kanten durch ein in verwendeter Stellung befindliches Trigondodekaëder, und dessen rhombische Ecke durch das Hexaëder abgestumpft sind.

Ein nach demselben Gesetze gebildeter Zwilling der Combination $\frac{3}{2}P.\frac{3}{2}P\infty.0P.P.\frac{1}{2}P$ ist in Fig. 679 abgebildet.

§. 621.

Fortsetzung.

Häufiger als die im vorigen §. beschriebenen Zwillinge kommen am Kupferkiese diejenigen vor, welche nach dem zweiten Gesetze gebildet sind, oder deren

---

*) Die meisten Flächen *P* entsprechen dem Ikositetraëder $\frac{6}{6}\frac{7}{6}O\frac{6}{6}\frac{7}{6}$, und die meisten Flächen *b* dem Tetrakishexaëder $\infty O\frac{3}{3}\frac{4}{3}$.

Zwillingsaxe die Normale einer Fläche der Grundgestalt ist. So sieht man sehr oft zwei Individuen der Combination $\frac{P}{2}.-\frac{P}{2}$ nach diesem Gesetze durch Juxtaposition zu Zwillingen verwachsen, welche die grösste Aehnlichkeit mit den im Tesseralsysteme beschriebenen Zwillingen des Oktaëders haben; Fig. 680. Die Individuen sind meist in der Richtung der Zwillingsaxe verkürzt, und bilden, bei der sehr häufig Statt findenden Wiederholung mit parallelen Zusammensetzungsflächen, schichtenweise Aggregate wie Fig. 681.

Einen nach demselben Gesetze gebildeten Zwilling der Combination $P.2P\infty.P\infty.0P$ stellt Fig. 682 dar.

Wenn der sphenoidische Habitus sehr hervortritt, wie z. B. in dem Krystalle Fig. 683, und zugleich eine theilweise Penetration der Individuen Statt findet, so erhalten die nach demselben Gesetze gebildeten Zwillinge nicht selten ein ganz eigenthümliches, an die in Fig. 622 abgebildeten Zwillinge des Fahlerzes erinnerndes Ansehen; Fig. 684.

Dieselbe Zwillingsbildung wiederholt sich auch oft mit geneigten Zusammensetzungsflächen; macht sich dann, zugleich mit der sphenoidischen Hemiedrie, auch die ungleichförmige Ausdehnung der Flächen geltend, so erhalten die Drillinge u. s. w. meist ein so unregelmässiges Ansehen, dass man die Form der einzelen Individuen nur durch eine sorgfältige Untersuchung herausfinden kann. So stellt Fig. 685 einen dergleichen Drillingskrystall der Combination $\frac{P}{2}.2P\infty.\infty P$ dar, in welchem die wahre Symmetrie der Formen dermaassen entstellt ist, dass man eher eine unregelmässige Combination des triklinoëdrischen, als eine Combination des tetragonalen Systemes zu sehen glaubt.

Die nach dem dritten Gesetze gebildeten Zwillinge

Digitized by Google

sind die seltensten; sie können nur an Krystallen von sphenoidischem Habitus vorkommen, und sind z. B. von der Combination $\frac{P}{2}.-\frac{P}{2}$ als wahre Durchkreuzungszwillinge auf der Grube Kurprinz bei Freiberg gefunden worden, Fig. 686.

Uebrigens findet man nicht selten zusammengesetzte Krystalle des Kupferkieses, an welchen mehr als ein Gesetz der Zwillingsbildung verwirklicht ist; so wie denn auch noch andere Gesetze vorzukommen scheinen.

§. 622.

Zwillinge des Kalkscheelates.

Der durch seine eigenthümliche Hemiëdrie so ausgezeichnete Scheelkalk kommt zuweilen in Verwachsungen nach dem dritten Gesetze vor, welche nur kraft jener Hemiëdrie auf das Prädicat von Zwillingskrystallen Anspruch haben.

Die Krystalle von Schlackenwalde, in welchen nach Breithaupt $a = \sqrt{\frac{9}{8}}$ zeigen bisweilen die Combination $P.2P\infty.\frac{l}{r}\frac{4P2}{2}.\frac{r}{l}\frac{\frac{3}{2}P3}{2}$ Fig. 687, an welcher die ditetragonalen Pyramiden als tetragonale Pyramiden von abnormer Flächenstellung erscheinen. Durchsetzen sich zwei dergleichen Individuen nach dem Gesetze: Zwillingsaxe die Normale einer Fläche von ∞P; so bilden sie Zwillingskrystalle wie Fig. 688, welche man für einfache Krystalle halten könnte, wenn nicht einerseits die abnorme Vertheilung der Flächen *a* und *g*, anderseits die Verhältnisse der Streifung auf die Anerkennung einer Zusammensetzung führten, indem die den Combinationskanten mit 4P2 parallelen Streifungen der Flächen von P in einer Sutur zusammenstossen, welche den Höhenlinien der Flächen der scheinbar einfachen Pyramide P parallel ist.

Digitized by Google

Fünftes Capitel.

Zwillinge des hexagonalen Systemes.

A. Theorie.

§. 623.

Entwurf der Theorie.

Der eigenthümliche Charakter des Hexagonalsystemes, welcher schon auf die Berechnung seiner Gestalten Einfluss hatte, macht sich auch bei der Entwicklung der Theorie seiner Zwillingskrystalle geltend. Der Gang, welchen diese Entwicklung zu nehmen hat, ist ungefähr folgender.

Man geht von der Annahme aus, dass die Normale einer Fläche F irgend einer dihexagonalen Pyramide mPn (oder eines Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$) die Zwillingsaxe sey, und sucht zuvörderst die orthometrischen Gleichungen dieser Zwillingsaxe im Individuo I, indem man die, ursprünglich für das schiefwinklige Axensystem (der sich unter 60° schneidenden Axen der y und z), gegebene Gleichung der Fläche F

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

orthometrisch macht, und aus ihr die Gleichungen der Normale als Functionen der orthometrischen Coordinaten x_1, y_1 und z_1 ableitet.

Das Individuum II stellt man sich aus der parallelen Stellung gegen das Individuum I, wie gewöhnlich, um die Zwillingsaxe durch 180° verdreht vor, und sucht nun die orthometrischen Gleichungen seiner schiefwinkligen Axen, die wir als Axen der x', y' und z' einführen wollen. Man erhält also die Gleichungen dieser Axen gleichfalls als Functionen der Coordinaten x_1, y_1 und z_1.

Digitized by Google

Hierauf geht man zur Transformation der Coordinaten über, indem man die Cosinus der Neigungswinkel der schiefwinkligen Axen der x', y' und z' des Individuums II gegen die rechtwinkligen Axen der x_1, y_1 und z_1 des Individuums I aufsucht, und erhält so die Substituenden der Coordinaten x_1, y_1 und z_1, um irgend eine in dem Individuo I gegebene Linie oder Fläche auf das schiefwinklige Axensystem des Individuums II beziehen zu können.

Damit hat denn die Theorie ihre Aufgabe erfüllt, indem nun die Bestimmung derjenigen Fläche, welche im Individuo II irgend einer im Individuo I gegebenen Fläche entspricht, sehr leicht dadurch gewonnen wird, dass man die, aus dem krystallographischen Zeichen folgende, Gleichung der gegebenen Fläche orthometrisch macht, und endlich für die orthometrischen Coordinaten x_1, y_1 und z_1 ihre Werthe als Functionen der schiefwinkligen Coordinaten x', y' und z' substituirt.

§. 624.

Gleichungen der Axen des Individuums II.

Es sey also

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

die, auf das schiefwinklige Axensystem des Individuum I bezogene, Gleichung derjenigen Fläche von mPn, deren Normale als Zwillingsaxe auftritt, so wird dieselbe Gleichung, indem man

$$x = x_1$$

$$y = \frac{2y_1}{\sqrt{3}}$$

$$z = z_1 - \frac{y_1}{\sqrt{3}}$$

setzt, orthometrisch ausgedrückt

$$\frac{x_1}{ma} + \frac{(2-n)y_1}{n\sqrt{3}} + z_1 = 1$$

Digitized by Google

Hieraus folgen für die Normale aus dem Mittelpuncte, oder für die Zwillingsaxe die orthometrischen Gleichungen:

$$\frac{x_1}{n\sqrt{3}} - \frac{y_1}{ma(2-n)} = 0$$

$$\frac{z_1}{ma} - x_1 = 0$$

$$\frac{y_1}{2-n} - \frac{z_1}{n\sqrt{3}} = 0$$

die Länge dieser Normale

$$N = \frac{man\sqrt{3}}{\sqrt{4m^2a^2(n^2-n+1)+3n^2}} = \frac{man\sqrt{3}}{M}$$

und endlich die Neigungswinkel (NX), (NY) und (NZ) der Zwillingsaxe gegen die schiefwinkligen Axen der x, y und z

$$cos(NX) = \frac{n\sqrt{3}}{M}$$

$$cos(NY) = \frac{ma\sqrt{3}}{M}$$

$$cos(NZ) = \frac{man\sqrt{3}}{M}$$

Nach erfolgter Drehung des Individuums II um die Zwillingsaxe ergeben sich folgende Bestimmungen für die Lage seiner schiefwinkligen Axen, d. h. der Axen der x', y' und z':

1) jede dieser Axen liegt in der Ebene durch N und die gleichnamige Axe des Individuums I;
2) jede derselben bildet mit N denselben Winkel wie die gleichnamige Axe des Individuums I.

Für die Axe der x' gilt also zuvörderst die orthometrische Gleichung:

$$\frac{y_1}{2-n} - \frac{z_1}{n\sqrt{3}} = 0$$

Man setze, ihre zweite Gleichung sey:

$$\frac{x_1}{\alpha} + \frac{y_1}{\beta} = 0$$

so bestimmt sich ihr Neigungswinkel (NX') zur Zwillingsaxe nach der dritten Formel für $\cos U$ in §. 23

$$\cos(NX') = \frac{4ma(n^2 - n + 1)\beta - an(2-n)\sqrt{3}}{M\sqrt{4(n^2 - n + 1)\beta^2 + (2-n)^2\alpha^2}}$$

Da nun

$$\cos(NX') = \cos(NX)$$

so bestimmt sich das Verhältniss von α und β, und wir erhalten daher folgende orthometrische Gleichungen für die Axe der x':

$$\frac{x_1}{4m^2a^2(n^2-n+1)-3n^2} + \frac{y_1}{2man(2-n)\sqrt{3}} = 0$$

$$\frac{z_1}{6man^2} + \frac{x_1}{4m^2a^2(n^2-n+1)-3n^2} = 0$$

$$\frac{y_1}{2-n} - \frac{z_1}{n\sqrt{3}} = 0$$

Die Axe der z' hat zuvörderst die orthometrische Gleichung:

$$\frac{x_1}{n\sqrt{3}} - \frac{y_1}{ma(2-n)} = 0$$

eine zweite Gleichung findet man am leichtesten aus der Bedingung, dass die Axe der z' auf der Axe der x' rechtwinklig ist, und erhält daher überhaupt folgende orthometrische Gleichungen für die Axe der z':

$$\frac{x_1}{n\sqrt{3}} - \frac{y_1}{ma(2-n)} = 0$$

$$\frac{z_1}{2m^2a^2(n^2+2n-2)-3n^2} - \frac{x_1}{6man^2} = 0$$

$$\frac{y_1}{2m^2a^2(2-n)n\sqrt{3}} - \frac{z_1}{2m^2a^2(n^2+2n-2)-3n^2} = 0$$

Die Axe der y' endlich fällt in die Ebene durch N und die Axe der y, welche letztere durch die Gleichungen

$$x_1 = 0 \text{ und } \frac{y_1}{\sqrt{3}} - z_1 = 0$$

bestimmt wird; die Gleichung dieser Ebene ist daher

$$\frac{x_1}{3n} + \frac{y_1}{2ma(2n-1)\sqrt{3}} - \frac{z_1}{2ma(2n-1)} = 0$$

Digitized by Google

Setzt man nun, die Gleichungen der Axe der y' seyen:

$$\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{\beta}=0, \text{ und } \frac{z_1}{\gamma}+\frac{x_1}{\delta}=0$$

so folgt aus ihrer Lage in der Ebene NY:

$$\frac{\beta}{a}=\frac{2ma(2n-1)}{n\sqrt{3}}+\frac{\gamma\sqrt{3}}{\delta}$$

und aus ihrer Rechtwinkligkeit auf der Axe der x':

$$\frac{\gamma}{\delta}=-\frac{4m^2a^2(4n-n^2-1)-3n^2}{12man}$$

und daher

$$\frac{\beta}{a}=\frac{4m^2a^2(n^2-1)+3n^2}{4man\sqrt{3}}$$

Die orthometrischen Gleichungen für die Axe der y' werden also folgende:

$$\frac{x_1}{4man\sqrt{3}}+\frac{y_1}{4m^2a^2(n^2-1)+3n^2}=0$$

$$\frac{z_1}{4m^2a^2(4n-n^2-1)-3n^2}-\frac{x_1}{12man}=0$$

$$\frac{y_1}{4m^2a^2(n^2-1)\sqrt{3}+3n^2\sqrt{3}}+\frac{z_1}{4m^2a^2(4n-n^2-1)-3n^2}=0$$

§. 625.

Gleichungen der Axen, wenn die Zwillingsaxe eine Normale von mP.

In allen bis jetzt bekannten Zwillingen des Hexagonalsystemes ist es wohl die Fläche irgend einer Gestalt der Hauptreihe, deren Normale die Rolle der Zwillingsaxe spielt; wie denn am häufigsten die Hauptaxe selbst, oder die Normale von 0P als Zwillingsaxe auftritt. Wir können daher unsre ferneren Rechnungen bedeutend vereinfachen, wenn wir, den allgemeinsten Gesichtspunct verlassend, unsre Untersuchungen zunächst auf den Fall beschränken, da die

Digitized by Google

Flächennormale irgend einer Gestalt der Hauptreihe, also irgend eines m'P, die Zwillingsaxe ist *).

Zu dem Ende haben wir in den orthometrischen Gleichungen der Axen des Individuums II $n = 1$ zu setzen; sie erhalten dann folgende Form:

Gleichungen der Axe der x':

$$\frac{x_1}{4m'^2a^2-3} + \frac{y_1}{2m'a\sqrt{3}} = 0$$

$$\frac{z_1}{6m'a} + \frac{x_1}{4m'^2a^2-3} = 0$$

$$y_1 - \frac{z_1}{\sqrt{3}} = 0$$

Gleichungen der Axe der y':

$$\frac{x_1}{4m'a} + \frac{y_1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\frac{z_1}{8m'^2a^2-3} - \frac{x_1}{12m'a} = 0$$

$$\frac{y_1}{3\sqrt{3}} + \frac{z_1}{8m'^2a^2-3} = 0$$

Gleichungen der Axe der z':

$$\frac{x_1}{\sqrt{3}} - \frac{y_1}{m'a} = 0$$

$$\frac{z_1}{2m'^2a^2-3} - \frac{x_1}{6m'a} = 0$$

$$\frac{y_1}{2m'^2a^2\sqrt{3}} - \frac{z_1}{2m'^2a^2-3} = 0$$

§. 626.

Transformation der Coordinaten.

Bezeichnen wir die Neigungswinkel der recht-

---

*) Da weiter unten drei Buchstaben m, n und r vorkommen, welche accentuirt werden müssten, um sie von dem m zu unterscheiden, welches in den Gleichungen der Zwillingsaxe auftritt, so schien es mir bequemer, den Accent auf dieses m übergehen zu lassen, um die folgenden Formeln nur mit einem, statt mit drei accentuirten Buchstaben schreiben zu können.

Digitized by Google

winkligen Axen der x_1, y_1 und z_1 gegen die schiefwinkligen Axen der x', y' und z' mit (X_1X'), (X_1Y'), (X_1Z'), (Y_1X') u. s. w., so erhalten wir für die Cosinus dieser Winkel folgende Werthe:

$$\cos(X_1X') = -\frac{4m'^2a^2-3}{4m'^2a^2+3}$$

$$\cos(X_1Y') = \frac{6m'a}{4m'^2a^2+3}$$

$$\cos(X_1Z') = \frac{6m'a}{4m'^2a^2+3}$$

$$\cos(Y_1X') = \frac{2m'a\sqrt{3}}{4m'^2a^2+3}$$

$$\cos(Y_1Y') = -\frac{3\sqrt{3}}{8m'^2a^2+6}$$

$$\cos(Y_1Z') = \frac{2m'^2a^2\sqrt{3}}{4m'^2a^2+3}$$

$$\cos(Z_1X') = \frac{6m'a}{4m'^2a^2+3}$$

$$\cos(Z_1Y') = \frac{8m'^2a^2-3}{8m'^2a^2+6}$$

$$\cos(Z_1Z') = \frac{2m'^2a^2-3}{4m'^2a^2+3}$$

Da nun nach bekannten Regeln:

$$x_1 = x'\cos(X_1X') + y'\cos(X_1Y') + z'\cos(X_1Z')$$

$$y_1 = x'\cos(Y_1X') + y'\cos(Y_1Y') + z'\cos(Y_1Z')$$

$$z_1 = x'\cos(Z_1X') + y'\cos(Z_1Y') + z'\cos(Z_1Z')$$

so werden die Substituenden der Coordinaten x_1, y_1 und z_1, um irgend eine für das Individuum I gegebene orthometrische Gleichung auf das schiefwinklige Axensystem des Individuums II zu beziehen, folgende:

$$x_1 = \frac{1}{4m'^2a^2+3}[-(4m'^2a^2-3)x'+6m'ay'+6m'az']$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{4m'^2a^2+3}[2m'ax'-\tfrac{3}{2}y'+2m'^2a^2z']$$

$$z_1 = \frac{1}{4m'^2a^2+3}[6m'ax'+\tfrac{1}{2}(8m'^2a^2-3)y'+(2m'^2a^2-3)z']$$

Digitized by Google

§. 627.

Parameter der Parallelfläche einer Fläche des Individuums I.

Ist uns nun im Individuo I eine Fläche gegeben, so ist sie es ursprünglich durch die, aus dem krystallographischen Zeichen ihrer respectiven Gestalt mPn abzulesende, Gleichung

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + \frac{z}{r} = 1$$

welche sich auf das schiefwinklige Axensystem bezieht; diese Gleichung wird orthometrisch ausgedrückt:

$$\frac{x_1}{ma} + \frac{(2r-n)y_1}{nr\sqrt{3}} + \frac{z_1}{r} = 1$$

Dieselbe Fläche erhält aber, wenn man sie auf das schiefwinklige Axensystem des Individuums II bezieht, eine Gleichung von der Form

$$\frac{x'}{pa} + \frac{y'}{q} + \frac{z'}{s} = 1$$

in welcher sich die Grössen p, q und s bestimmen, wie folgt:

$$p = \frac{mnr(4m'^2a^2+3)}{4mm'(n+r)a^2 - nr(4m'^2a^2-3)}$$

$$q = \frac{mnr(4m'^2a^2+3)}{4m'^2a^2mn + 3r(2m'n - m)}$$

$$s = \frac{mnr(4m'^2a^2+3)}{4m'^2a^2mr + 3n(2m'r - m)}$$

Diese Werthe gelten zunächst für die beiden, in dem Sextanten der positiven Nebenaxen gelegenen Flächen der oberen Hälfte des Individuums I, und zwar hat man für die eine dieser Flächen $r = 1$, für die andere $n = 1$ und $r = n$ zu setzen.

Für die beiden Nebenflächen in derselben Pyramidenhälfte ist

$$r = 1, \text{ und } n = \frac{n}{n-1}$$

oder

$$n = 1, \text{ und } r = \frac{n}{n-1}$$

und für die beiden **Nachbarflächen** in derselben Pyramidenhälfte

$$n = n, \text{ und } r = -\frac{n}{n-1}$$

oder $$r = n, \text{ und } n = -\frac{n}{n-1}$$

zu setzen. Auf diese Weise werden die Parallelflächen von sechs Flächen oder von drei Flächenpaaren der gegebenen Gestalt mPn bestimmt; die sechs übrigen Flächen, oder drei übrigen Flächenpaare bestimmen sich sogleich aus den vorigen, indem man m negativ nimmt.

§. 628.

Parallelflächen einer dihexagonalen Pyramide mPn.

Führt man die im vorigen §. angedeuteten Substitutionen der Werthe von n und r aus, so erhält man folgende Resultate:

Den Flächen einer dihexagonalen Pyramide mPn in dem einen Individuo sind paarweis die Flächen sechs verschiedener dihexagonaler Pyramiden in dem andern Individuo parallel; und zwar bestimmen sich diese Flächenpaare und die ihnen entsprechenden Parallelflächen, wie folgt:

1) Dem ersten, im Sextanten der Zwillingsaxe gelegenen Flächenpaare entspricht im andern Individuo ein Flächenpaar von den Coëfficienten *):

$$p = \frac{1}{4mm'(n+1)a^2 - n(4m'^2a^2 - 3)}$$

$$q = \frac{1}{4m'^2a^2mn + 3(2m'n - m)}$$

*) Da die Grösse $mn(4m'^2a^2+3)$ ein gemeinschaftlicher Zähler für alle Werthe von p, q und s ist, und doch jedenfalls die Quotienten $\frac{p}{q}$ und $\frac{s}{q}$ oder $\frac{p}{s}$ und $\frac{q}{s}$ gebildet werden müssen, es also nur auf das Verhältniss der Grössen p, q und s ankommt, so ist jener gemeinschaftliche Factor im Folgenden weggelassen worden.

Digitized by Google

$$s = \frac{1}{4m'^2a^2m + 3n(2m' - m)}$$

2) Das zweite Flächenpaar wird von den beiden, in derselben Pyramidenhälfte gelegenen Nebenflächen des ersteren gebildet; ihm entsprechen in dem andern Individuo zwei Flächen von den Coëfficienten:

$$p = \frac{1}{4mm'(2n-1)a^2 - n(4m'^2a^2 - 3)}$$

$$q = \frac{1}{4m'^2a^2mn + 3(2m'n - mn + m)}$$

$$s = \frac{1}{4m'^2a^2m(n-1) + 3n(2m' - m)}$$

3) Das dritte Flächenpaar wird von den beiden in derselben Pyramidenhälfte gelegenen Nachbarflächen des ersten Paares gebildet; ihm entsprechen in dem andern Individuo zwei Flächen von den Coëfficienten:

$$p = -\frac{1}{n(4m'^2a^2 - 3) - 4mm'(2-n)a^2}$$

$$q = -\frac{1}{4m'^2a^2(n-1)m - 3(2m'n - m)}$$

$$s = \frac{1}{4m'^2a^2m + 3(2m'n + mn - m)}$$

Für die drei anliegenden Flächenpaare in der entgegengesetzten Pyramidenhälfte bestimmen sich die Coëfficienten der Parallelflächen, wenn man in vorstehenden Werthen von p, q und s die auf die Hauptaxe bezügliche Ableitungszahl m negativ einführt.

§. 629.

Regel bei der Anwendung der gefundenen Resultate.

Die Resultate des vorhergehenden §. beziehen sich auf das subsidiarische dreizählige Axensystem des Individuums II, in welchem sich die Axen der y' und z' unter 60° schneiden, während die Axe der

x' auf beiden rechtwinklig ist. Sie sind daher noch nicht in derjenigen Form ausgedrückt, in welcher sie sich unmittelbar an unsre krystallographische Ableitung und Bezeichnung anschliessen, weil diese auf dem in der Erscheinung gegebenen vierzähligen Axensysteme der Axen der x', y', z' und u' beruhen. Um nun die Parallelflächen auf eine mit dieser Ableitung und Bezeichnung übereinstimmende Weise darzustellen, dazu wird folgende Behandlung der gefundenen Grössen p, q und s erfordert.

Man dividire jedenfalls durch die kleinere der beiden Grössen q und s die beiden andern, verwandle also das gefundene Verhältniss $p:q:s$ in

$$\frac{p}{q} : 1 : \frac{s}{q}$$

oder in

$$\frac{p}{s} : \frac{q}{s} : 1$$

Nun ist der Quotient $\frac{q}{s}$ oder $\frac{s}{q}$ entweder $>$ oder $=$ oder $<$ 2; ist er $=$ oder $<$ 2, so bezieht sich die gesuchte Parallelfläche auf die Nebenaxen der y' und z', und $\frac{q}{s}$ oder $\frac{s}{q}$ wird der auf eine dieser Nebenaxen, $\frac{p}{s}$ oder $\frac{p}{q}$ der auf die Hauptaxe bezügliche Ableitungscoëfficient der gesuchten Fläche.

Ist dagegen der Quotient $\frac{q}{s}$ oder $\frac{s}{q} > 2$, so fällt die gesuchte Parallelfläche in einen der, durch die Axe der u' bestimmten Sextanten, und ist dann jedenfalls statt $\frac{q}{s}$ die Grösse $\frac{q}{q-s}$, statt $\frac{s}{q}$ die Grösse $\frac{s}{s-q}$ als der auf die Nebenaxe bezügliche Ableitungscoëfficient einzuführen. Zugleich ist in diesem Falle

ganz besonders darauf zu achten, ob der Quotient $\frac{q}{s}$ oder $\frac{s}{q}$ positiv oder negativ ist, weil sich danach die Lage der Fläche in diesem oder jenem der von der Axe der u' abhängigen Sextanten bestimmt.

Es fällt nämlich zuvörderst die gesuchte Fläche in den Sextanten der z' und u', oder in den Sextanten der y' und $-u'$, je nachdem $\frac{q}{s}$ oder $\frac{s}{q}$ der gefundene Quotient, oder, mit andern Worten, je nachdem $s < q$, oder $q < s$ ist. Der Parameter 1 liegt aber im ersten Falle in der Axe der z' oder in der Axe der u', je nachdem $\frac{q}{s}$, im zweiten Falle in der Axe der y' oder in der Axe der u', je nachdem $\frac{s}{q}$ positiv oder negativ ist.

§. 630.

Parallelflächen der hexagonalen Pyramide *m*P.

Setzt man in den Resultaten des §. 628 $n = 1$, und bringt hierauf für selbige die Regeln des §. 629 in Anwendung, so erhält man für die hexagonale Pyramide mP des einen Individuums folgende Parallelflächen im andern Individuo.

1) Der mit der Zwillingsaxe unmittelbar zum Durchschnitte kommenden Fläche von mP entspricht eine Fläche der hexagonalen Pyramide pP, für welche

$$p = \frac{6m' + m(4m'^2a^2 - 3)}{8mm'a^2 - (4m'^2a^2 - 3)}$$

2) Derjenigen Fläche von mP, welche mit der ersteren eine Mittelkante bildet, entspricht im zweiten Individuo die Fläche einer Pyramide pP, für welche

$$p = \frac{6m' - m(4m'^2a^2 - 3)}{8mm'a^2 + (4m'^2a^2 - 3)}$$

3) Denjenigen beiden Flächen von mP, welche mit der ersteren Fläche Polkanten bilden, entsprechen zwei Flächen von den Coëfficienten:

$$p = \frac{1}{4mm'a^2 - (4m'^2a^2 - 3)}$$

$$q = \frac{1}{4m'^2a^2m + 6m'}$$

$$s = \frac{1}{3(2m' - m)}$$

4) Denjenigen beiden Flächen endlich, welche mit der zweiten Fläche Polkanten bilden, entsprechen zwei Flächen von dem Verhältnisse:

$$p = \frac{1}{4mm'a^2 + (4m'^2a^2 - 3)}$$

$$q = -\frac{1}{6m' - 4m'^2a^2}$$

$$s = -\frac{1}{3(2m' + m)}$$

§. 631.

Parallelflächen der hexagonalen Pyramide mP2.

Die Flächen einer jeden Pyramide der Nebenreihe sind den Flächen dreier verschiedener Gestalten in dem andern Individuo parallel.

1) Demjenigen Flächenpaare, welches mit der Zwillingsaxe unmittelbar zum Durchschnitte kommt, entsprechen zwei Flächen von dem Verhältnisse:

$$p = \frac{1}{6mm'a^2 - (4m'^2a^2 - 3)}$$

$$q = \frac{2}{8m'^2a^2m + 3(4m' - m)}$$

$$s = \frac{1}{2m'^2a^2m + 3(2m' - m)}$$

2) Denjenigen beiden Flächen, welche an den Mit-

telkanten der beiden ersteren anliegen, entsprechen zwei Flächen von dem Verhältnisse:

$$p = -\frac{1}{4m'^2a^2 - 3}$$

$$q = -\frac{2}{4m'^2a^2m - 3(4m' - m)}$$

$$s = \frac{2}{4m'^2a^2m + 3(4m' + m)}$$

3) Denjenigen beiden Flächen endlich, welche an den Polkanten der ersteren anliegen, entsprechen zwei Flächen von dem Verhältnisse:

$$p = \frac{1}{6mm'a^2 + (4m'^2a^2 - 3)}$$

$$q = \frac{2}{8m'^2a^2m - 3(4m' + m)}$$

$$s = \frac{1}{2m'^2a^2m - 3(2m' + m)}$$

§. 632.

Parallelflächen der Prismen und der Basis.

Die Flächen eines jeden dihexagonalen Prismas ∞Pn sind paarweis den Flächen dreier dihexagonaler Pyramiden parallel; es entsprechen nämlich

1) dem ersten Flächenpaare zwei Flächen von dem Verhältnisse:

$$p = \frac{1}{4m'(n + 1)a^2}$$

$$q = \frac{1}{4m'^2a^2n - 3}$$

$$s = \frac{1}{4m'^2a^2 - 3n}$$

2) dem zweiten Flächenpaare zwei Flächen von dem Verhältnisse:

$$p = \frac{1}{4m'(2n - 1)a^2}$$

Digitized by Google

$$q = \frac{1}{4m'^2a^2n - 3(n-1)}$$

$$s = \frac{1}{4m'^2a^2(n-1) - 3n}$$

3) dem dritten Flächenpaare zwei Flächen von dem Verhältnisse:

$$p = \frac{1}{4m'(2-n)a^2}$$

$$q = -\frac{1}{4m'^2a^2(n-1) + 3}$$

$$s = \frac{1}{4m'^2a^2 + 3(n-1)}$$

Den Flächen des Prismas ∞P entsprechen eine Fläche einer hexagonalen, und zwei Flächen einer dihexagonalen Pyramide, nämlich

1) der ersten Fläche eine Fläche

$$\frac{4m'^2a^2 - 3}{8m'a^2}\mathrm{P}$$

2) den beiden andern Flächen zwei Flächen von dem Verhältnisse

$$p : q : s = \frac{1}{4m'a^2} : \frac{1}{4m'^2a^2} : -\frac{1}{3}$$

Den Flächen des Prismas ∞P2 entsprechen zwei Flächen einer Pyramide, und eine Fläche von ∞P2, nämlich

1) den beiden mit der Zwillingsaxe zum Durchschnitte kommenden Flächen zwei Flächen von dem Verhältnisse:

$$p : q : s = \frac{1}{6m'a^2} : \frac{2}{8m'^2a^2 - 3} : \frac{1}{2m'^2a^2 - 3}$$

2) der mit der Zwillingsaxe parallelen Fläche eine Fläche

$$\infty\mathrm{P}2$$

Endlich entspricht der basischen Fläche 0P jedenfalls eine Fläche von

$$\frac{6m'}{4m'^2a^2 - 3}\mathrm{P}$$

Digitized by Google

§. 633.

Allgemeine Brauchbarkeit der gefundenen Resultate.

Die meisten Zwillinge des hexagonalen Systemes sind bis jetzt im Gebiete seiner hemiëdrischen Krystallreihen beobachtet worden. Wiewohl sich nun die vorstehenden Resultate zunächst auf die holoëdrischen Gestalten beziehen, so sind sie doch auf die Zwillinge der hemiëdrischen und tetartoëdrischen Gestalten anwendbar, sobald man nur für selbige die primitive Ableitung und Bezeichnung zu Grunde legt, was überhaupt bei allen theoretischen Untersuchungen im Gebiete dieses Systemes anzuempfehlen ist. Was die Zwillinge der rhomboëdrischen Formen insbesondere betrifft, so sind für jedes Skalenoëder von seiner respectiven Muttergestalt mPn nur entweder die Flächenpaare Nr. I, V und VI, oder die Flächenpaare Nr. II, III und IV, für jedes Rhomboëder eben so nur die diesen drei Flächenpaaren entsprechenden abwechselnden Flächen in Betrachtung zu ziehen, zu welchem Ende die secundären Zeichen mR^n der Skalenoëder auf ihre primitiven Zeichen

$$mnP\frac{2n}{n+1}$$

reducirt werden müssen.

§. 634.

Häufigstes Zwillingsgesetz.

Das allergewöhnlichste Gesetz, welches jedoch nur für hemiëdrische Formen wirkliche Zwillinge zur Folge hat, ist:

Zwillingsaxe die Hauptaxe, oder die Normale von 0P.

Dieses Gesetz giebt für die Individuen rhomboëdrischer Combinationen das sehr einfache Resultat, dass die beiderseitigen hemiëdrischen Gestalten ihre

Digitized by Google

resp. Muttergestalt reproduciren, indem jedes $\frac{mPn}{2}$ des einen Individuums die Stellung von $-\frac{mPn}{2}$ des andern Individuums erhält, und *vice versa*; weshalb beide zugleich den vollständigen Flächeninbegriff der holoëdrischen Gestalt mPn darstellen.

Wenn diese Art der Zusammensetzung mit Juxtaposition Statt findet, so ist die Zusammensetzungsfläche entweder die Basis $0R$, in welchem Falle die Zwillinge oft sehr regelmässig erscheinen, indem jedes Individuum fast genau die Hälfte eines einzigen Individuums darstellt; oder die Zusammensetzungsfläche ist eine Fläche von ∞R, in welchem Falle die Zwillinge zuweilen noch sehr symmetrisch gebildet sind.

Wenn endlich Durchkreuzung der Individuen Statt findet, so erscheinen die Zwillinge gleichfalls nicht selten sehr symmetrisch mit gegenseitig über einander hervorspringenden Theilen.

Die Berechnung der gewöhnlichsten Zwillingskanten ist in allen diesen Fällen ein sehr einfaches Problem, indem man, wenn Juxtaposition Statt findet, nur den Neigungswinkel einer jeden Fläche F des einen Individuums gegen die Zusammensetzungsfläche zu verdoppeln braucht, um ihre respective Zwillingskante mit der analogen Fläche F' des andern Individuums zu finden; wogegen, wenn Durchkreuzung Statt findet, die Zwillingskanten je zweier Skalenoëder die Supplemente der normalen Polkante und der Mittelkante der entsprechenden dihexagonalen Pyramide, die Zwillingskanten je zweier Rhomboëder die Supplemente der Polkante und der Mittelkante der entsprechenden hexagonalen Pyramide sind.

Digitized by Google

B. Beschreibung der wichtigsten Zwillinge.

§. 635.

Zwillinge des Kalkspathes.

Der Kalkspath, dieser Proteus des Mineralreiches, welcher an Mannichfaltigkeit seiner einfachen Gestalten sowohl als seiner Combinationen alle bekannten Mineralspecies übertrifft, und fast von jedem besonderen Fundorte in eigenthümlichen Formen bekannt ist, wird auch durch seine Zwillingsbildung besonders merkwürdig, indem er unter allen hexagonalen Mineralspecies die mannichfaltigsten Zwillingskrystalle zeigt.

Die Dimensionen der Grundgestalt des Kalkspathes sind nach Breithaupts sehr interessanten Beobachtungen in verschiedenen Varietäten etwas verschieden, wie sich auch von einer Species erwarten liess, deren Substanz zwar in der reinsten Form kohlensaurer Kalk, aber gewöhnlich durch grössere oder kleinere Antheile der mit Kalk isomorphen Basen verunreinigt ist. Die durch Mannichfaltigkeit der Gestalten und häufiges Vorkommen vorzüglich ausgezeichneten Varietäten (Breithaupts polymorpher Carbonspath) besitzen den Polkantenwinkel der Grundgestalt

$$105° \ 8'$$

während derselbe Winkel in den übrigen Varietäten zwischen 105° 0′ und 105° 17′ schwankt, und in der gewöhnlich gemessenen Varietät des Isländischen Kalkspathes 105° 5′ beträgt.

Es scheint hiernach erlaubt, anzunehmen, dass der Werth der Axe

$$a = \sqrt{\tfrac{8}{11}}$$

die Species im Allgemeinen charakterisire, weil der daraus folgende Winkel

$$105° \ 9' \ 41''$$

Digitized by Google

ungefähr der mittlere zwischen den beobachteten Extremen und fast genau derjenige ist, welchen die polymorphen Varietäten zeigen *).

Die wichtigsten der am Kalkspathe beobachteten Zwillingsgesetze sind **):

1) Zwillingsaxe die Normale von $0R$;
2) - - - - - - - - $-\frac{1}{2}R$;
3) - - - - - - - - R;
4) - - - - - - - - $-2R$.

§. 636.

Fortsetzung; Zwillinge nach dem ersten Gesetze.

Die nach dem ersten Gesetze gebildeten Zwillinge des Kalkspathes sind jedenfalls leicht zu erkennen, wiewohl sie nicht selten, bei Juxtaposition der Individuen in der Fläche $0R$ so symmetrisch gebildet sind, dass sie scheinbar ein einziges Individuum darstellen. So findet sich häufig die Combination $\infty R.-\frac{1}{2}R$, Fig. 689, in Zwillingen wie Fig. 690, deren Form sich am richtigsten darstellen lässt, wenn man sie mit Haüy als Hemitropieen beschreibt, indem man voraussetzt, das Individuum Fig. 689 sey durch einen Parallelschnitt der Basis halbirt, und die eine Hälfte gegen die andere durch 180° verdreht worden. Dasselbe gilt von

---

*) Will man für a eine rationale Zahl haben, so bietet sich am nächsten $\frac{6}{7}$ dar, was die Polkante 104° 56′ giebt, daher man diesen Werth wenigstens für Zeichnungen und Modelle ohne Fehler zu Grunde legen kann.

**) Das Gesetz, Zwillingsaxe die Normale von ∞R, lässt sich für den Kalkspath, in welchem kein Unterschied zwischen dem oberen und unteren Ende der Gestalten besteht, auf das erste Gesetz zurückführen. Für hemimorphische Krystallreihen wäre dies jedoch nicht gestattet. Das von Mohs angeführte Gesetz, Zwillingsaxe die Polkante von R, lässt sich auf das zweite Gesetz zurückführen, welches für manche Zwillinge auch so ausgesprochen werden kann: Zwillingsaxe die Normale von $\frac{11}{16}R$, weil dieses letztere Rhomboëder das inverse von R ist (§. 349). Vergl. §. 562.

den in Fig. 694 abgebildeten Zwillingen der Combination $-\frac{5}{4}R.0R.R$, Fig. 693.

Besonders häufig kommt das unter dem Namen der metastatischen Varietät bekannte Skalenoëder R^3 nach diesem Gesetze als Zwillingskrystall vor, sowohl in seiner selbständigen Ausbildung als auch in seinen Combinationen mit andern Gestalten. Wenn die Individuen, wie gewöhnlich, durch Juxtaposition in der Fläche $0R$ verbunden sind, so erscheinen die Zwillingskrystalle als sehr regelmässige Hemitropieen; so stellt Fig. 697 eine Hemitropie des vollständig ausgebildeten Skalenoëders R^3, Fig. 699 eine Hemitropie der Combination $R^3.\frac{1}{4}R^3$, und Fig. 703 eine Hemitropie der in Fig. 702 abgebildeten Combination $R^3.-\frac{1}{2}R.\infty R$ vor. Alle diese Zwillinge scheinen gewöhnlich auch in der Natur selbst so regelmässig aus zwei Hälften eines Individuums zusammengesetzt zu seyn, dass ihnen die Haüysche Construction vollkommen entspricht. In Fig. 697 und 699 betragen die aus- und einspringenden horizontalen Zwillingskanten 138° 0′; diese Winkel verschwinden dagegen, wenn die Flächen des Prismas ∞R vorhanden sind, wie in Fig. 703, welche Flächen dann im Zwillinge nicht mehr als symmetrische Trapezoide (wie im einfachen Krystall, Fig. 702), sondern als zweierlei verschiedene Rhomben erscheinen, deren horizontale Diagonalen nicht selten durch eine schwache Einkerbung die Zusammensetzung verrathen.

§. 637.

Fortsetzung.

Findet dieselbe Zusammensetzung mit Penetration der Individuen Statt, so entstehen Zwillinge, wie solche z. B. für die Combination $-\frac{1}{2}R.\infty R$ in Fig. 695, für das Skalenoëder R^3 in Fig. 700 und 701 abgebildet sind, welche letztere beiden Figuren diese Art

Digitized by Google

der Zusammensetzung mit Wiederholung darstellen, indem aus einem grösseren Individuo mehre kleinere Individuen herausragen; ein Verhältniss, welches, wenn auch nicht in der idealen Regelmässigkeit, wie es die Figuren zeigen, so doch nicht selten zu beobachten ist. Dabei lässt sich in der Lage der kleineren Individuen gegen das grössere noch der Unterschied geltend machen, dass die Rudimente der ersteren entweder aus den stumpferen oder aus den schärferen Polkanten des letzteren hervorragen; ein Unterschied, welcher durch die Figuren 700 und 701 veranschaulicht wird. Uebrigens ist in Fig. 700 auch der mittlere Krystall als Träger der ganzen Gruppe schon ein durch Juxtaposition gebildeter Zwilling, wie Fig. 697.

Einen merkwürdigen Fall von sich umschliessenden Individuen der Gestalt $-\frac{1}{2}R$ hat Haidinger beobachtet; das eine grössere Individuum ist auf eine eigenthümliche Art seinen eigenen Flächen parallel ausgehöhlt, und bildet gleichsam ein flaches Becken, in dessen Boden das zweite Individuum eingesenkt ist; Fig. 696.

Nicht selten findet die Zwillingsbildung nach dem ersten Gesetze in der Art Statt, dass eine Fläche von ∞R als Zusammensetzungsfläche auftritt. So finden sich z. B. Individuen der Combination $\infty R.-\frac{1}{2}R$, des Skalenoëders R^3 und andrer Gestalten, auch das primitive Rhomboëder R selbst, in Krystallen und Spaltungsstücken (jedoch häufiger noch in der Species des Paratomspathes als in der des Kalkspathes) wie Fig. 692, das Rhomboëder $-2R$ wie Fig. 691 zusammengesetzt.

§. 638.

Fortsetzung; Zwillinge nach dem zweiten Gesetze.

Die Zwillingsbildung nach dem zweiten Gesetze, da nämlich die Normale einer Fläche des Rhomboëders $-\frac{1}{2}R$ die Zwillingsaxe ist, kommt mit Juxtapo-

Digitized by Google

sition unter andern sehr häufig an den Spaltungsstücken mancher derber Varietäten und zumal des Isländischen Doppelspathes vor. Da das Rhomboëder $-\frac{1}{2}R$ die Polkanten des Rhomboëders R regelmässig abstumpft, so entspricht die Zusammensetzungsfläche jedenfalls einer solchen Abstumpfungsfläche, und man erhält daher die Stellung beider Individuen, wenn man ein Rhomboëder R nach einem durch zwei parallele Mittelkanten gehenden Schnitte halbirt, und die eine Hälfte gegen die andre um 180° verdreht denkt; Fig. 704. Die Zusammensetzung wiederholt sich gewöhnlich, indem mehre lamellare Individuen in beiderlei Stellung mit einander abwechseln; Fig. 705. Oft sind mehre dergleichen Lamellen von sehr geringer Dicke in ein Rhomboëder eingeschlossen, und dann offenbart sich die Zusammensetzung nur durch schmale Furchen oder Streifungen, welche auf zwei Gegenflächen des Rhomboëders ihren längeren Diagonalen parallel laufen, und nichts anders als die Ausgehenden der eingeschlossenen Individuen sind; Fig. 706. Dieses Verhältniss findet sehr häufig in den wasserhellen Spaltungsstücken des Isländischen Doppelspathes Statt, und hat nicht nur mancherlei (nur aus dieser Zusammensetzung erklärliche) optische Phänomene, sondern auch die Entstehung von sehr vollkommenen Absonderungsflächen zur Folge, welche nicht selten für Spaltungsflächen gehalten worden sind.

Auch wirkliche Krystalle, wie z. B. Combinationen des Prismas ∞R mit andern Gestalten sind dieser Zusammensetzung unterworfen, welche sich jedenfalls daran erkennen lässt, dass die Hauptaxen beider Individuen einen Winkel von 127° 34′ bilden; Fig. 707.

Setzt man $a = \sqrt{\frac{8}{11}}$, so werden dio Parallelflächen:

für die Fläche $0R$ eine Fl. von $\frac{33}{25}R$
für die erste Fläche ∞R - - - $\frac{25}{32}R$
- - - - - R - - - $\frac{8}{57}R$

wofür man jedoch, Behufs der Zeichnung der Zwillingskrystalle, ohne Fehler die aus dem Werthe $a = \sqrt{\frac{3}{4}}$ folgenden Flächen $\frac{4}{5}R$, $\frac{3}{4}R$ und $\frac{1}{7}R$ setzen kann.

§. 639.

Fortsetzung; Zwillinge nach dem dritten Gesetze.

Die nach dem Gesetze: Zwillingsaxe Normale von R, gebildeten Zwillinge zeichnen sich dadurch sehr aus, dass die Hauptaxen ihrer beiden Individuen fast rechtwinklig sind, indem der Neigungswinkel derselben 89° 8′ beträgt. In säulenförmigen oder andern Krystallen von etwas langgestreckter Form sind sie daher sehr leicht zu erkennen. Sie finden sich z. B. nicht selten an der Combination $\infty R . 0R$, Fig. 708, und unter andern sehr schön zu Gersdorf an der Combination $\infty R . -\frac{1}{2}R$. Auch gehören hierher die von Haüy beschriebenen herzförmigen Zwillingskrystalle der *Variété analogique*, oder der in Fig. 702 dargestellten Combination $R^3 . -\frac{1}{2}R . \infty R$, deren Zwillinge bisweilen aus zwei ziemlich symmetrischen Hälften bestehen, so dass sie sich aus einem Krystall wie Fig. 702 construiren lassen, wenn man annimmt, derselbe sey nach einer Fläche des primitiven Rhomboëders (also nach einer Spaltungsfläche) halbirt, und die eine Hälfte gegen die andre durch 180° verdreht worden. Die achtseitige Figur *abcdadcb* stellt sehr nahe die Conture eines solchen Schnittes, und Fig. 709 das Resultat der Hemitropie selbst in einer solchen Stellung dar, dass die Zusammensetzungsfläche vertical und auf den Beobachter gerichtet ist, weil die Zwillinge in dieser Stellung aufgewachsen zu seyn pflegen.

§. 640.

Fortsetzung; Zwillinge nach dem vierten Gesetze.

Nach dem vierten Gesetze, welchem zufolge die

Digitized by Google

Normale einer Fläche von $-2R$ als Zwillingsaxe auftritt, kommen unter andern die Skalenoëder R^3 und solche Combinationen, in welchen R^3 die vorherrschende Gestalt bildet, verwachsen vor; Fig. 710. Der Neigungswinkel der Hauptaxen beider Individuen beträgt 53° 50′, und der einspringende Neigungswinkel der einander zugekehrten stumpferen Polkanten der beiden Skalenoëder R^3 98° 2′.

Was die zur Construction der Axen des zweiten Individuums erforderlichen Elemente betrifft, so kann man ohne Fehler die Haüysche Annahme $a = \sqrt{\frac{3}{4}}$ zu Grunde legen, nach welcher sich bestimmt die Parallelfläche

der Fläche $0R$ eine Fläche von $\frac{4}{5}R$
der ersten Fläche ∞R - - - - $\frac{3}{4}R$
- - - - - - R - - - - $\frac{3}{7}R$

§. 641.

Zwillinge der rhomboëdrischen Silberblende.

Die rhomboëdrische Silberblende oder das Rothgiltigerz kommt in verschiedenartigen Zwillingskrystallen vor. Nicht selten findet man Krystalle nach dem Gesetze: Zwillingsaxe die Hauptaxe, verwachsen, in welchem Falle theils die Basis, theils auch eine Fläche von ∞R als Zusammensetzungsfläche auftritt. So hat Haidinger sehr schöne, durch Juxtaposition gebildete Zwillinge der in Fig. 711 perspectivisch, Fig. 712 im Grundrisse dargestellten Combination

$$\infty P2.\frac{\infty R}{2}.\tfrac{1}{4}R^3.\tfrac{5}{8}R^3.R^3.-\tfrac{1}{2}R^3.-\tfrac{1}{2}R.-2R$$

beobachtet, deren Zusammensetzungsfläche eine Fläche von ∞R, und welche bei gehörig symmetrischer Ausbildung scheinbar einen einzigen Krystall darstellen, indem sich die Individuen wie die beiden Hälften zweier Individuen verhalten; Grundriss in Fig. 713.

Digitized by Google

In andern Zwillingen derselben Combination fand eine vollkommene Durchkreuzung der Individuen Statt, so dass sie im Grundrisse wie Fig. 714 erscheinen, indem die beiderseitigen Skalenoëder ihre resp. dihexagonalen Pyramiden reproduciren.

Der Hemimorphismus, welcher sich an vielen Combinationen dieser Species auf eine sehr bestimmte Weise vorfindet, und schon durch das so häufige Auftreten des trigonalen Prismas $\frac{\infty R}{2}$ als ein gesetzliches Verhältniss dieser Krystallreihe zu erkennen giebt, hat bisweilen ganz eigenthümliche zwillingsartige Zusammensetzungen zur Folge, indem zwei säulenartige Individuen in einer Parallelfläche von $0R$ dergestalt an einander stossen, dass alle Flächen des einen den Flächen des andern parallel sind, mit alleiniger Ausnahme der dem trigonalen Prisma entsprechenden Flächen, welche für beide Individuen widersinnig liegen. Fig. 721 stellt eine dergleichen zwillingsartige Verwachsung der Combination

$$\infty P2.R^3.\tfrac{1}{4}R^3.\frac{\infty R}{2}.$$

dar, deren Bild das Original wenig an Regelmässigkeit übertrifft.

§. 642.

Fortsetzung.

Nicht selten finden sich die Individuen der rhomboëdrischen Silberblende nach dem Gesetze verwachsen: Zwillingsaxe normal, Zusammensetzungsfläche parallel einer Fläche von $\frac{1}{4}R$, oder auch: Zwillingsaxe eine Polkante von $-\frac{1}{2}R$, Zusammensetzungsfläche die Normalfläche dieser Kante. So entspricht z. B. der in Fig. 719 dargestellte Zwilling der Combination $\infty P2.-\frac{1}{2}R$ der zweiten Formel, während er hingegen richtiger nach der ersten Formel beschrie-

Digitized by Google

ben werden würde, wenn das eine Individuum nur nach oben, das andere nur nach unten hin ausgebildet wäre, in welchem Falle ein knieförmiger Zwilling zum Vorschein kommen würde. Der Neigungswinkel der beiderseitigen Hauptaxen beträgt 26° 0′. Diese Zwillingsbildung wiederholt sich gewöhnlich mehrfach nach verschiedenen Richtungen, so dass immer ein Individuum an das andere anschliesst, und bouquetartige Gruppen von vielen, nach oben divergirenden Individuen entstehen; Fig. 720 stellt einen nach diesem Gesetze gebildeten Vierlingskrystall dar; meist ist jedoch das centrale Individuum, gleichsam der Träger der ganzen Gruppe, grösser als die übrigen; ja es kommen dergleichen Gruppen vor, in welchen das mittlere Individuum eine ganz andere Combination zeigt, als die übrigen.

Ueberhaupt aber sind die nach diesem Gesetze gebildeten Zwillinge der Silberblende gar nichts Seltenes, und finden sich vielmehr für die verschiedenartigsten Formen verwirklicht. So giebt es z. B. von Andreasberg sehr schöne Zwillinge der Combination

$$\infty P2. -3R^{\frac{7}{4}}.\tfrac{1}{7}R^{5}$$

in welcher auch untergeordnet das trigonale Prisma $\frac{\infty R}{2}$ und, wie es scheint, die hexagonale Pyramide $\frac{2}{3}P2$ auftritt. Einen Zwilling der Art zeigt die Fig. 718; die Kantenwinkel der beiden Skalenoëder sind folgende:

für $3R^{\frac{7}{4}}$, $X = 86°\,36′$, $Y = 157°\;\;6′$, $Z = 135°\,44′$
für $\frac{1}{7}R^{5}$, - - $146°\,14′$, - - $157°\,42′$, - - $59°\,20′$

die Combinationskante von $3R^{\frac{7}{4}}$ zu $\infty P2$ beträgt 157° 52′. Ausser diesen Gestalten zeigen diese Zwillinge noch ein merkwürdiges Verhältniss, indem die Polkante Y des einen Individuums mit der Polkante $Y′$

des andern Individuums coincidirt, weshalb diese Polkante selbst die Zwillingsaxe, und folglich auch die Normale einer Fläche des Rhomboëders $\frac{1}{4}R$ repräsentirt. Weil nun aber die längeren Polkanten des Skalenoëders $-3R^{\frac{7}{4}}$ der Lage nach mit den Polkanten des Rhomboëders $\frac{75}{8}R$ übereinstimmen (§. 307), so müssen die Rhomboëder

$$\frac{1}{4}R \text{ und } \frac{75}{8}R$$

inverse Rhomboëder seyn (§. 349), woraus sich

$$\frac{75}{32} = \frac{3}{2a^2}$$

und $$a^2 = 0{,}64 = \frac{16}{25}$$

als der Werth der Hauptaxe in dieser Varietät der rhomboëdrischen Silberblende ergiebt. Nach diesem Werthe sind auch die vorstehenden Winkel der Skalenoëder berechnet worden, deren Bestimmung auf folgenden Messungen beruhte:

$$\begin{aligned} \text{in } 3R^{\frac{7}{4}}, \text{ Polk. } X &= 86°\tfrac{1}{2} \\ \text{CK. zu } \infty P2 &= 158° \\ \text{in } \tfrac{1}{7}R^{5}, \text{ Polk. } X &= 146° \\ \text{Polk. } Y &= 158° \end{aligned}$$

Uebrigens kommen an der Silberblende auch ähnliche Zwillinge vor wie Fig. 708, in welchen jedoch die Hauptaxen beider Individuen um einige Grad von der Rechtwinkligkeit abweichen; an den Krystallen der Combination $\infty P2.-\frac{1}{2}R$ von Joachimsthal und andern Varietäten findet sich diese Zwillingsbildung gar nicht selten. Die Zwillingsaxe entspricht einer Normale des Rhomboëders R, oder auch einer Polkante des Rhomboëders $-2R$, und der Neigungswinkel der Hauptaxen beträgt 85° 28′.

§. 643.

Zwillinge des Chabasites, Levynes und Zinnobers.

Der Chabasit findet sich oft in Durchkreuzungs-

Digitized by Google

zwillingen nach dem Gesetze: Zwillingsaxe die Hauptaxe. Die Individuen zeigen theils das Rhomboëder *R*, dessen Polk. ungefähr 95° messen, theils die Combination *R*.—½*R*.—2*R*, an welcher wohl auch das Prisma ∞P2 Theil nimmt. Unter Voraussetzung einer völlig symmetrischen Ausbildung erscheinen die Zwillinge der Grundgestalt selbst, wie Fig. 715; gewöhnlich aber ist ein Individuum das vorherrschende, so dass nur Rudimente des zweiten Individuums über seinen Flächen hervorragen. Dasselbe ist auch in den Zwillingen der erwähnten Combination der Fall, obwohl Exemplare vorkommen, in denen die Regelmässigkeit der Fig. 716 beinahe realisirt ist, und die beiderseitigen Flächen ∞P2 wirklich coincidiren, so dass die den Mittenkanten von *R* parallelen Streifungen derselben sich kreuzen.

Der Levyn, eine dem Chabasit sehr ähnliche Species, findet sich auch in ganz ähnlichen Durchkreuzungszwillingen der Combination 0*R*.*R*.—½*R*, Fig. 717; indess messen die Polkanten des Rhomboëders *R* nicht 95°, sondern 79° 30′.

Endlich kommt auch der Zinnober oder die rhomboëdrische Mercurblende in ganz analog gebildeten Zwillingskrystallen vor, sowohl mit Juxtaposition als auch mit Durchkreuzung der Individuen, wie solches die Figuren 722 und 723 darstellen, welche sich beide auf die Combination *R*.0*R* beziehen; die Polkanten des Rhomboëders *R* messen ungefähr 72°.

§. 644.

Zwillinge des Eisenglanzes.

Der Eisenglanz oder das rhomboëdrische Eisenerz kommt in Zwillingen vor, welche gleichfalls nach dem herrschenden Gesetze gebildet sind, dass die Hauptaxe als Zwillingsaxe auftritt. So finden sich zu Altenberg sehr regelmässige Durchkreuzungszwillinge

Digitized by Google

der Combination $\frac{4}{3}$P2.*R*.0*R*, Fig. 724, welche dadurch ausgezeichnet sind, dass von den beiderseitigen Flächen der Pyramide $\frac{4}{3}$P2 je zwei in eine Ebene fallen, während die Flächen der Rhomboëder *R* einspringende Winkel bilden.

Dagegen sind die tafelartigen Krystalle des vulcanischen Eisenglanzes von Stromboli zwar nach demselben Stellungsgesetze, aber nach einer andern Modalität der Verwachsung zusammengesetzt, indem z. B. zwei Individuen der Combination 0*R*.*R*.∞P2, Fig. 725, durch Juxtaposition in einer Fläche des Prismas ∞*R* verbunden, und meist so symmetrisch gebildet und in einander geschoben sind, dass sie die Hälften eines einzigen Individuums darstellen, und zwei Flächen von ∞P2 beiderseits in eine Ebene fallen; Fig. 726. Da die Flächen 0*R* zuweilen triangulär gestreift sind, so kann die verwendete Lage der Streifen auf der einen Hälfte dieser Flächen als ein Merkmal der Zusammensetzung dienen, welche sich übrigens durch die Lage der beiderseitigen Rhomboëderflächen sehr bestimmt zu erkennen giebt.

§. 645.

Zwillinge des Titaneisenerzes.

Die am Titaneisen von Gastein Statt findende rhomboëdrische Tetartoëdrie, kraft welcher die hexagonalen Pyramiden der Nebenreihe als Rhomboëder auftreten, hat eine eigenthümliche von Mohs entdeckte Zwillingsbildung zur Folge, in welcher sich gleichsam die Tendenz zur Reproduction hemiëdrischer Formen offenbart. Nach den Messungen von Mohs beträgt der Polkantenwinkel des Rhomboëders *R* fast genau 86°; denken wir uns nun die, gewöhnlich tafelartige, Combination 0*R*.$\frac{4}{3}$P2.*R* erst als eine rhomboëdrische Combination, so wird sie etwa so erscheinen wie Fig. 729. Weil aber vermöge der Tetartoë-

drie der Krystallreihe die Pyramide $\frac{4}{3}P2$ in zwei Rhomboëder von diagonaler Flächenstellung zerfällt, so werden wir diese hemiëdrische Combination in zwei tetartoëdrische Combinationen zerlegen können, von welchen die eine wie Fig. 727, die andere wie Fig. 728 erscheinen wird, indem beide Figuren so gezeichnet sind, dass die beiderseitigen Flächen von R einander parallel liegen. Dies ist aber eben die Stellung, welche die Zwillingsbildung fordert, indem Individuen, deren Krystallformen sich wie die beiden tetartoëdrischen Complemente oder Gegenkörper Fig. 727 und 728 verhalten, mit einander verwachsen sind, wobei gewöhnlich die Basis als Zusammensetzungsfläche dient. Meist findet jedoch eine theilweise, mehr oder weniger regelmässige Penetration der Individuen Statt, welche, wenn sie als eine vollkommene Durchkreuzung zweier absolut symmetrischer Individuen gedacht wird, einen scheinbar einfachen Krystall der rhomboëdrischen Combination $0R.\frac{4}{3}P2.R$ liefern würde, wie solchen, mit Andeutung seiner Zusammensetzung, Fig. 729 in schiefer, und Fig. 730 in horizontaler Projection zeigt. Das Gesetz dieser Zwillingsbildung kann man daher auch so aussprechen: Zwillingsaxe eine Normale von $\infty P2$, weil nach diesem Gesetze die Stellung der Rhomboëder der Hauptreihe unverändert bleibt, während jedes Rhomboëder der Nebenreihe in verwendete Stellung gelangt.

§. 646.

Zwillinge des Quarzes.

Während sich die Krystallreihe des Kalkspathes durch die grosse Mannichfaltigkeit ihrer Gestalten und Combinationen als die reichhaltigste Krystallreihe des ganzen Mineralreiches auszeichnet, würde jene des Quarzes, bei der auffallenden Einförmigkeit ihrer meisten Gestalten und Combinationen nur ein

Digitized by Google

geringeres krystallographisches Interesse gewähren, wenn nicht diese Einförmigkeit durch die ganz eigenthümliche Erscheinungsweise ihrer Gestalten, welche wir oben als das Resultat der trapezoëdrischen Tetartoëdrie zu deuten versuchten, hinreichend aufgewogen, und durch dieselbe Erscheinungsweise die Krystallreihe des Quarzes zu einer der merkwürdigsten des ganzen Mineralreiches erhoben würde.

Die eigenthümliche Tetartoëdrie bedingt auch die Möglichkeit von Zwillingskrystallen mit parallelen Hauptaxen der Individuen, wie sie bei holoëdrischer Ausbildung der Krystallreihe nicht Statt finden könnten. Da nämlich jede Pyramide mP der Hauptreihe in zwei Rhomboëder $\pm r\frac{mP}{4}$ und $\pm l\frac{mP}{4}$ zerfällt, zwischen welchen, obwohl sie häufig ins Gleichgewicht treten, doch eben sowohl eine krystallographische und physische Differenz obwaltet, als z. B. zwischen den beiden Tetraëdern $\frac{O}{2}$ und $-\frac{O}{2}$ der Zinkblende oder des Helvines*), so werden je zwei Individuen des Quarzes in der That einen Zwilling liefern, sobald das eine gegen das andere in einer um die Hauptaxe durch 180° verdrehten Stellung gebildet ist, gesetzt auch, die beiden Rhomboëder, wie z. B. $r\frac{P}{4}$ und $l\frac{P}{4}$, seyen in völligem Gleichgewichte. Zwillinge

---

*) Nach Prof. Breithaupts Beobachtungen ist die krystallographische Verschiedenheit sogar in den Dimensionen der beiden Rhomboëder ausgesprochen, welche man gewöhnlich als hemiëdrische Complemente zu betrachten pflegte; die verschiedenen Cohärenzverhältnisse nach $\frac{P}{4}$ und $\frac{P}{4}$ sind neulich durch Savarts akustische Untersuchungen bestätigt worden.

Digitized by Google

der Art finden sich gar nicht selten an der Combination $\infty P . r\frac{P}{4} . l\frac{P}{4}$; sie sind, bei ungleicher Ausdehnung der beiden Rhomboëder, sehr leicht zu erkennen, hingegen auch leicht zu verkennen, sobald P als hexagonale Pyramide auftritt. Sind die Individuen durch Juxtaposition verbunden, so ist gewöhnlich eine Fläche von ∞P die Zusammensetzungsfläche, und die Zwillinge erscheinen wie Fig. 732 oder 733; findet eine vollkommene Durchkreuzung Statt, so entstehen, wenn nur eines der Rhomboëder von P ausgebildet ist, die von Weiss beschriebenen, sehr symmetrischen Zwillinge, in welchen, wie dies Fig. 731 zeigt, immer das eine Individuum vorherrschend aufzutreten, und gleichsam den Träger für die Rudimente des andern Individuums zu bilden pflegt.

Aehnliche Zwillinge mit gegenseitiger Penetration der Individuen kommen auch nicht selten an solchen Varietäten des Bergkrystalls vor, in welchen beide Rhomboëder von P nahe im Gleichgewichte sind. Die gegenseitige Umschliessung, und das Eingreifen der Masse des einen Individuums in die des andern findet dann meist auf eine so unregelmässige Weise Statt, dass es unmöglich seyn würde, irgend eine Zusammensetzungsfläche anzugeben. Die Demarcationen beider Individuen, deren respective Flächen grösstentheils coincidiren, lassen sich nur an hier und da hervorspringenden Flächenelementen, an leichten Einfurchungen oder Einschnitten, an der Discontinuität der Streifung, des Glanzes oder der sonstigen Beschaffenheit der Oberfläche erkennen, und es erfordert oft eine genaue Untersuchung, um sich von dem wirklichen Daseyn einer Zusammensetzung zu überzeugen, und nicht ein einzeles Individuum vorauszusetzen, wo man es mit einem Zwillinge zu thun hat.

Digitized by Google

§. 647.

Fortsetzung.

Wenn ausser den Flächen von ∞P und P noch trigonale Trapezoëder ausgebildet sind, so hat die Zwillingsbildung nicht selten eine eigenthümliche Vertheilung dieser Flächen zur Folge. Die Fig. 734 stellt z. B. einen einfachen Krystall der Combination $\infty P . P . l\frac{6P\frac{6}{5}}{4}$ dar, von welchem in Fig. 735 ein vollkommener Durchkreuzungszwilling abgebildet ist, dergleichen freilich in der Wirklichkeit nicht so symmetrisch ausgebildet sind, wie sie dieses ideale Bild zeigt. Einen durch Juxtaposition gebildeten Zwilling der Combination $\infty P . P$ mit zwei, sich zu einem Skalenoëder ergänzenden, jedoch wegen der Krümmung ihrer Flächen nicht bestimmbaren Trapezoëdern $+ r\frac{mPn}{4}$ und $+ l\frac{mPn}{4}$ sieht man in Fig. 733.

Da auch die Fläche $0P$ als Zusammensetzungsfläche auftreten kann, so entstehen Krystalle, deren obere und untere Hälften verschiedenen Individuen angehören; und aus einer derartigen Zusammensetzung dürften wenigstens viele Fälle zu erklären seyn, in welchen die Trapezflächen und die rhombischen Flächen der Gestalt $2P2$ nicht so vertheilt erscheinen, wie es das Gesetz der trapezoëdrischen Tetartoëdrie fordert. Wenn z. B. zwei Individuen der in Fig. 736 abgebildeten Combination

$$\infty P . P . \frac{6P\frac{6}{5}}{4} . \frac{2P2}{4}$$

so mit einander verwachsen sind, dass sie in der Fläche $0P$ zusammenstossen, und das eine gegen das andere um 180° verdreht ist, so werden sie bei gleichmässiger Ausbildung des Prismas ∞P einen scheinbar einfachen Krystall darstellen, in welchem die Flächen

Digitized by Google

s nicht mehr einer trigonalen Pyramide, sondern einem Rhomboëder von diagonaler Flächenstellung anzugehören, die Flächen *u* aber auf eine solche Weise vertheilt scheinen, als ob die abwechselnden Glieder ihrer resp. Muttergestalt gänzlich verschwunden, und von den drei übrigen je zwei und zwei Flächen zurückgeblieben wären, wie dies Fig. 737 zeigt *).

Der Unterschied der linken und rechten Trapezoëder befähigt übrigens den Quarz zu einer ganz eigenthümlichen Zwillingsbildung, deren Resultat niemals durch eine blosse Umdrehung des einen Individuums gegen das andere construirt werden kann. Denn es können sich zwei Individuen in völlig paralleler Stellung befinden, was die Flächen von P, 2P2 u. a. Gestalten betrifft, und dennoch einen Zwilling bilden, wenn z. B. an dem einen Individuo ein rechtes, an dem andern ein linkes Trapezoëder ausgebildet ist. Solche Fälle scheinen unsre Ansicht von dieser Tetartoëdrie erst recht zu bestätigen, weil eigentlich auch die Flächen der Rhomboëder $\pm r\frac{P}{4}$ oder $\pm l\frac{P}{4}$ als die von rechts oder von links her gewachsenen Hälften der Flächen von P gedeutet werden müssen.

---

*) Es liessen sich selbst manche von denjenigen Fällen, da ein Krystall an jedem Ende sechs Flächen *s*, oder sechs Trapezflächen zeigt, auf Zwillingsbildungen zurückführen; in der Regel sind jedoch solche Krystalle durch eine gleichzeitige Ausbildung complementärer tetartoëdrischer Formen zu erklären.

Digitized by Google

Sechstes Capitel.

Zwillinge des monoklinoëdrischen Systemes.

A. Theorie *).

§. 648.

Gleichungen der Axen des Individuums II in Bezug auf das Individuum I.

Wiewohl es noch zweifelhaft ist, ob für die klinoëdrischen Krystallsysteme überhaupt der Begriff der Zwillingsaxe als der einer Flächennormale irgend einer Gestalt aufgefasst werden darf, so wollen wir doch unsre Untersuchung, wenigstens für das monoklinoëdrische System, auf diese Ansicht gründen, weil sie für die meisten Zwillinge dieses Systemes vollkommen gestattet ist, sobald es sich nur um die geometrische Construction derselben handelt.

*) Die Theorie der Zwillinge dieses Systemes ist nicht in der Ausführlichkeit entwickelt worden, wie jene der vorhergehenden Krystallsysteme, besonders aus dem Grunde, weil von einer genauen Untersuchung der Zwillinge monoklinoëdrischer Krystallformen die Beantwortung der Frage über die Zulässigkeit schiefwinkliger Axensysteme überhaupt mit abhängt, und daher, im Falle einer negativen Entscheidung, die Theorie der Zwillinge dieses Systemes keine andere ist, als die der Zwillinge des rhombischen Systemes. Bevor jedoch diese Entscheidung möglich ist, müssen die Messungen im Gebiete dieses Systemes mit grosser Genauigkeit wiederholt, und zugleich Beobachtungen über das Verhalten der Krystallwinkel in höheren Temperaturen angestellt werden, da sich viele Krystalle offenbar in grosser Hitze gebildet haben, die Gesetze der Zwillingsbildung aber nur insofern richtig aufgefasst werden können, inwiefern man die dem Bildungsacte entsprechenden Dimensionen zu Grunde legt. Für den Wolfram scheint der orthometrische Charakter durch die Zwillingsbildung auf eine von aller Messung unabhängige Art erwiesen zu seyn, obwohl seine Formen nach den Gesetzen des monoklinoëdrischen Systemes gebildet sind; dasselbe gilt vom Pyroxen.

Digitized by Google

Es sey also in dem Individuo I eine Fläche gegeben, welche die Axen der x, y und z in den Centraldistanzen a, b und c schneidet, so ist

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

ihre klinometrische Gleichung, und die Gleichungen ihrer Normale N, als der vorausgesetzten Zwillingsaxe, werden:

$$\frac{x}{b - a\cos C} - \frac{y}{a - b\cos C} = 0$$

$$\frac{z}{ab\sin^2 C} - \frac{x}{c(b - a\cos C)} = 0$$

$$\frac{y}{c(a - b\cos C)} - \frac{z}{ab\sin^2 C} = 0$$

Die Axen des zweiten Individuums, welche wir als Axen der x', y' und z' einführen wollen, sind durch folgende Verhältnisse bestimmt:

1) jede Axe fällt in die Ebene durch N und die gleichnamige Axe des Individuums I;
2) jede Axe bildet mit der N denselben Winkel, wie die gleichnamige Axe des Individuums I.

Aus der ersten Bedingung folgt, dass für jede der Axen der x', y' und z' eine, und zwar diejenige Gleichung der N gilt, in welcher die mit ihr gleichnamige Coordinate nicht auftritt. Die zweite Bedingung lässt auf eine zweite Gleichung gelangen, indem man z. B. für die Axe der z' eine fingirte Gleichung von der Form

$$\frac{z}{\gamma} + \frac{x}{\delta} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{y}{\varepsilon} + \frac{z}{\zeta} = 0$$

einführt, den Cosinus des Neigungswinkels (NX') gegen N berechnet, und aus der Gleichung

$$\cos(NX') = \cos(NX)$$

das Verhältniss $\gamma : \delta$ oder $\varepsilon : \zeta$ ableitet.

Führt man die hier angedeuteten Rechnungen durch, so erhält man für die Axe der z' folgende Gleichungen:

Digitized by Google

$$\frac{x}{b-a\cos C}-\frac{y}{a-b\cos C}=0$$

$$\frac{z}{c^2(a^2+b^2-2abc\cos C)-a^2b^2\sin^2 C}+\frac{x}{2abc(b-a\cos C)}=0$$

Die zweiten Gleichungen der beiden andern Axen lassen sich nun leichter aus der Bedingung finden, dass sie beide auf der Axe der z' rechtwinklig sind; man erhält auf diese Art

für die Axe der y':

$$\frac{x}{2ac^2(b-a\cos C)}+\frac{y}{b^2c^2+a^2b^2\sin^2 C-c^2a^2}=0$$

$$\frac{z}{ab\sin^2 C}-\frac{x}{c(b-a\cos C)}=0$$

und für die Axe der x':

$$\frac{x}{b^2c^2-a^2c^2-a^2b^2\sin^2 C}-\frac{y}{2bc^2(a-b\cos C)}=0$$

$$\frac{z}{2ab^2c\sin^2 C}-\frac{x}{b^2c^2-a^2c^2-a^2b^2\sin^2 C}=0$$

§. 649.

Gewöhnlichste Gesetze der Zwillingsbildung.

Die gewöhnlichsten Zwillingsgesetze, welche bis jetzt im Gebiete des monoklinoëdrischen Krystallsystemes beobachtet wurden, sind folgende:

1) Zwillingsaxe die Normale von $\infty P \infty$; oder, Umdrehungsaxe normal, Zusammensetzungsfläche parallel dem orthodiagonalen Hauptschnitte; Gyps, Amphibol, Pyroxen, Wolfram.

2) Zwillingsaxe die Normale von $0P$; oder, Umdrehungsaxe normal, Zusammensetzungsfläche parallel der Basis; Titanit, Orthoklas.

3) Zwillingsaxe die Normale von $\pm mP\infty$; oder, Umdrehungsaxe normal, Zusammensetzungsfläche parallel dem horizontalen Hemiprisma $\pm mP\infty$; Epidot.

Digitized by Google

4) Zwillingsaxe die Normale von (mP∞); oder, Umdrehungsaxe normal, Zusammensetzungsfläche parallel einer Fläche des Klinoprismas (mP∞); Orthoklas, Ryakolith.

Die drei ersten Gesetze lassen sich jedoch, vorausgesetzt, dass für die Krystalle kein Unterschied von links und rechts, von oben und unten Statt findet, nach §. 562 auch so aussprechen:

1) Zwillingsaxe die Hauptaxe;
2) Zwillingsaxe die Klinodiagonale;
3) Zwillingsaxe die klinodiagonale Polkante von $\pm m$P.

Wo jedoch, nicht durch geometrische, aber durch physische Verhältnisse, wie z. B. durch verschiedene Spaltbarkeit nach den beiden Flächen des Prismas ∞P, ein Unterschied von rechts und links, und daher auch von oben und unten gegeben ist, da kann man nicht beliebig die Stellungsgesetze nach der einen oder andern Art aussprechen; vielmehr wird die Beobachtung, wie die als links und rechts verschiedenen Flächen in den Zwillingen vertheilt sind, auf die ausschliessliche Anerkennung des einen oder des andern Gesetzes führen. Der Orthoklas ist die einzige monoklinoëdrische Species, in welcher bestimmt eine solche Verschiedenheit von rechts und links Statt findet, und daher wohl auch die einzige Species, für welche nach folgendem Gesetze eine Art von Zwillingskrystall anzuerkennen wäre:

Zwillingsaxe die Orthodiagonale; oder, Umdrehungsaxe normal, Zusammensetzungsfläche parallel dem klinodiagonalen Hauptschnitte *).

---

*) Ob der Gyps ein ähnliches Verhältniss zeigt, wage ich nicht zu entscheiden; merkwürdig sind jedoch wegen ihrer Regelmässigkeit die zwillingsartigen Zusammensetzungen, welche in meinem Lehrbuche der Mineralogie erwähnt und daselbst in Fig. 440 abgebildet sind.

Digitized by Google

§. 650.

Gleichungen der Axen, wenn die Zwillingsaxe die Normale von $mP\infty$, $0P$ oder $\infty P\infty$.

Für den Fall, da die Zwillingsaxe die Normale des Hemiprismas $mP\infty$, haben wir, unter der Voraussetzung, dass $a:b:c$ das Verhältniss der Lineardimensionen der Grundgestalt ist, in den Gleichungen des §. 648 ma statt a, und ∞ statt c zu setzen, und erhalten so die Gleichungen:

der Axe der x':

$$\frac{x}{b^2 - m^2a^2} - \frac{y}{2b(ma - b\cos C)} = 0$$

$$z = 0$$

der Axe der y':

$$\frac{x}{2ma(b - ma\cos C)} + \frac{y}{b^2 - m^2a^2} = 0$$

$$z = 0$$

der Axe der z':

$$x = 0, \quad y = 0$$

Ist dagegen die Zwillingsaxe die Normale von $0P$, so werden die Gleichungen:

der Axe der x':

$$x + \frac{y}{2\cos C} = 0, \quad z = 0$$

der Axe der y':

$$x = 0, \quad z = 0$$

der Axe der z':

$$x = 0, \quad y = 0$$

Ist endlich die Zwillingsaxe die Normale von $\infty P\infty$, so werden die Gleichungen:

der Axe der x':

$$y = 0, \quad z = 0$$

der Axe der y':

$$\frac{x}{2\cos C} + y = 0, \quad z = 0$$

der Axe der z':

$$x = 0, \quad y = 0$$

§. 651.

Transformation der Coordinaten, wenn die Zwillingsaxe die Normale von 0P oder ∞P∞.

Da die beiden Gesetze:

A. Zwillingsaxe die Hauptaxe oder die Normale von ∞P∞, und

B. Zwillingsaxe die Klinodiagonale oder die Normale von 0P

diejenigen sind, welche sich am häufigsten verwirklicht finden, so wollen wir die ihnen entsprechenden Transformationen der Coordinaten vornehmen. Die Coordinate z' ist in beiden Fällen ganz unabhängig von der Zwillingsbildung, da die Axe der z' mit der Axe der z coincidirt; wir haben also nur die Substituenden der Coordinaten x' und y' aufzusuchen.

A. Wenn die Zwillingsaxe die Hauptaxe ist, so werden die Substituenden der Coordinaten des zweiten Individuums folgende:

$$x' = x - 2y\cos C$$
$$y' = y$$
$$z' = -z$$

und daher die Gleichung einer im Individuo II durch die Gleichung

$$\frac{x'}{ma} + \frac{y'}{nb} + \frac{z'}{rc} = 1$$

bestimmten Fläche, im Individuo I folgende:

$$\frac{x}{ma} + \frac{(2nb\cos C - ma)y}{mnab} - \frac{z}{rc} = 1$$

Soll nun diese Gleichung einer reellen Fläche entsprechen, so muss

$$\frac{b}{a}\cos C$$

eine rationale Zahl seyn.

B. Wenn die Zwillingsaxe die Normale von 0P ist, so werden die Substituenden der Coordinaten:

Digitized by Google

$$x' = x$$
$$y' = +y - 2x \cos C$$
$$z' = -z$$

und daher die Gleichung derjenigen Fläche, welche im Individuo II durch die Gleichung

$$\frac{x'}{ma} + \frac{y'}{nb} + \frac{z'}{rc} = 1$$

bestimmt wird, im Individuo I folgende:

$$\frac{(nb - 2ma \cos C)x}{mnab} - \frac{y}{nb} - \frac{z}{rc} = 1$$

welche nur dann einer reellen Fläche entsprechen kann, wenn

$$\frac{a}{b} \cos C$$

eine rationale Zahl ist.

§. 652.

Gleichungen der Axen, wenn die Zwillingsaxe eine Normale von (mP∞).

Wenn die Zwillingsaxe die Normale einer Fläche des Klinoprismas (mP∞) ist, so haben wir, unter der Voraussetzung, dass $a : b : c$ das Verhältniss der Lineardimensionen der Grundgestalt, in den Gleichungen des §. 648

ma statt a, und
∞ statt b

einzuführen, und erhalten so die Gleichungen der Axen des zweiten Individuums, nämlich:

der Axe der x':

$$\frac{x}{c^2 - m^2 a^2 \sin^2 C} + \frac{y}{2c^2 \cos C} = 0$$
$$\frac{z}{2mac \sin^2 C} - \frac{x}{c^2 - m^2 a^2 \sin^2 C} = 0$$

der Axe der y':

$$x = 0, \; z = 0$$

Digitized by Google

der Axe der z':

$$x + \frac{y}{\cos C} = 0$$

$$\frac{z}{c^2 - m^2 a^2 \sin^2 C} + \frac{x}{2mac} = 0$$

Die wichtigsten der bis jetzt beobachteten Fälle dieser Art sind die bekannten Zwillinge des Orthoklases von Baveno, deren Zwillingsaxe eine Normale von (2P∞), und die knieförmigen Zwillinge des Wolframes, deren Zwillingsaxe eine Normale von ($\frac{2}{3}$P∞). Für beide Fälle vereinfacht sich der fernere Calcül bedeutend, weil im Orthoklas das Prisma (2P∞) rechtwinklig, im Wolfram aber der Winkel C ein rechter ist. Sollte sich auch für den Pyroxen die bisherige Annahme bestätigen, dass $C = 90°$, so würden gewisse seiner Zwillinge gleichfalls nach diesem Gesetze gebildet seyn.

B. Beschreibung der wichtigsten Zwillinge.

§. 653.

Zwillinge des Tinkals.

Der Tinkal so wie der gereinigte Borax findet sich nicht selten in Zwillingen nach dem Gesetze:

Zwillingsaxe die Normale von ∞P∞, oder:

Zwillingsaxe die Hauptaxe, Zusammensetzungsfläche der orthodiagonale Hauptschnitt.

Für die Dimensionen des Tinkals fand ich approximativ

$$C = 73° \; 25'$$

$$a : b : c = 0{,}512 : 1 : 0{,}9094$$

Eine nicht seltene Krystallform ist die Combination

∞P.∞P∞(∞P∞).0P.P.2P, Fig. 738,

von welcher zwei Individuen nach dem angegebenen Gesetze durch Juxtaposition verbunden einen Zwilling wie Fig. 739 darstellen; die beiderseitigen schiefen Basen (P) bilden an dem einen Ende einsprin-

Digitized by Google

gende, an dem andern Ende ausspringende Winkel von ungefähr 146° 50′.

Genauere Messungen würden vielleicht auf ein solches Verhältniss der Dimensionen führen, dass die Fläche 0P des einen Individuums der Fläche $\frac{9}{8}$P∞ des andern Individuums parallel würde.

§. 654.

Zwillinge des Gypses.

Der Gyps erscheint häufig in Zwillingskrystallen nach zwei verschiedenen Gesetzen.

Für die Dimensionen der Krystallreihe fand ich approximativ:

$$C = 81°\ 26' \text{ (ob } \cos C = \tfrac{3}{20}\text{?)}$$
$$a : b : c = 0{,}5975 : 1 : 1{,}445$$

oder sehr nahe $a : b = 3 : 5$, und $\frac{b}{a} \cos C = \frac{1}{4}$.

Eine der gewöhnlichsten Combinationen ist

(∞P∞).∞P.—P. Fig. 740

und gerade diese Combination findet sich besonders häufig in Zwillingen nach dem Gesetze:

Zwillingsaxe die Hauptaxe; oder:

Zwillingsaxe die Normale von ∞P∞.

Die Individuen sind meist durch Juxtaposition in dem orthodiagonalen Hauptschnitte verbunden, und dabei so symmetrisch gebildet, dass die Krystallflächen (∞P∞) beiderseits in eine Ebene fallen, weshalb Fig. 741 den gewöhnlichen Habitus dieser Zwillinge naturgetreu darstellt. Die Polkanten der Hemipyramiden —P bilden ein- und ausspringende Winkel von 105° 52′.

Zuweilen ist auch die Zusammensetzungsfläche eine Fläche von (∞P∞), in welchem Falle die Individuen wohl auch etwas in einander geschoben sind. Bei dieser Verwachsungsart ist der Unterschied zu bemerken, ob die Individuen mit ihren linken oder mit ih-

Digitized by Google

ren rechten Flächen ($\infty P\infty$) zusammengewachsen sind; ein Unterschied, welcher zwei verschiedene Resultate bedingt, indem *Zwillinge* mit rechts verwachsenen Individuen und Zwillinge mit links verwachsenen Individuen auf keine Weise in parallele Stellung gebracht werden können. Der Unterschied verschwindet nur im Falle einer vollkommenen Durchkreuzung, also bei Coincidenz der beiderseitigen klinodiagonalen Flächenpaare, oder auch, im Falle das eine Individuum von dem andern in der Richtung der Orthodiagonale gänzlich umschlossen wird.

§. 655.

Fortsetzung.

Ein zweites am Gypse vorkommendes Gesetz der Zwillingsbildung ist:

Zwillingsaxe die Normale von $-P\infty$, oder:
Zwillingsaxe die Polkante von $-P$.

Die nach diesem Gesetze gebildeten Zwillinge werden meist von linsenartigen Individuen gebildet, deren unregelmässiger Form etwa die Combination $-P.P.\frac{1}{3}P\infty.\infty P.(\infty P\infty)$ zu Grunde liegt, wie solche die Figur 742 in klinodiagonaler Projection zeigt. Denkt man sich nämlich in dieser Combination das Prisma ∞P noch kürzer, so rücken endlich die Flächen beider Hemipyramiden, deren Polkanten und Combinationskanten zu $\frac{1}{3}P\infty$ zugerundet sind, zusammen, und es entsteht eine krummflächige Form, welche durch andere, sehr unregelmässig zwischen $-P$ und $\frac{1}{3}P\infty$ ausgebildete Flächen noch mehr entstellt wird, und gewöhnlich die Gestalt einer langgezogenen Linse hat. Zwei dergleichen linsenförmige Individuen sind nun nach dem angegebenen Gesetze theils durch Juxtaposition, theils durch Penetration verbunden. Den ersteren Fall stellt Fig. 743 dar, in welcher die Individuen absichtlich so gezeichnet sind, wie sie nur sel-

Digitized by Google

ten ausgebildet zu seyn pflegen; denn gewöhnlich ist die wahre Form durch die linsenartige Missbildung in dem Grade entstellt, dass die Individuen dieser Zwillinge kaum Spuren einer ebenflächigen Gestalt wahrnehmen lassen.

Zur ferneren Erläuterung dieser Zwillinge mag die Fig. 744 dienen, welche den klinodiagonalen Hauptschnitt zweier, nach diesem Gesetze verbundener Individuen der Combination ∞P.—P.P.(∞P∞) darstellt. Denkt man sich ausser der Hemipyramide —P (*l*) noch die Fläche des Hemiprismas —½P∞ (*AB*) und der Basis 0P (*BC*) vorherrschend ausgebildet, so begreift man, nicht nur, wie sich ungefähr eine linsenförmige Krümmung im Profile ausbilden muss, sondern auch, wie bei alleinigem Vorherrschen der Flächen —½P∞ und P∞ die Zwillinge selbst eine pfeilspitzenartige Form *ADA'E* erhalten müssen, in welcher der von den beiderseitigen —½P∞ gebildete ausspringende Winkel *ADA'* ungefähr 25°, und der von den beiderseitigen P∞ gebildete einspringende Winkel *AEA'* ungefähr 123° misst. Dergleichen pfeilspitzenartige Zwillinge, die jedoch auch in andern Dimensionen von andern Flächen gebildet werden können, finden sich nicht selten in sehr grossen Exemplaren mitten in dem körnigen oder dichten Gypse der jüngeren Formationen.

§. 656.

Zwillinge des Pyroxenes.

An der Species des Pyroxenes kommen, unter Voraussetzung klinoëdrischer Dimensionen, folgende Gesetze der Zwillingsbildung vor:

1) Zwillingsaxe die Hauptaxe, oder die Normale des orthodiagonalen Flächenpaares.
2) Zwillingsaxe eine Normale der Hemipyramide (P2).
3) Zwillingsaxe die Normale des Hemiprismas P∞.

Digitized by Google

Diese Gesetze gelten in der angegebenen Form für das aus den Kupfferschen Messungen folgende Verhältniss der Dimensionen

$$C = 74° \; 1'$$

$$a : b : c = 0{,}5399 : 1 : 0{,}9136$$

welches freilich zunächst nur für den Diopsid gilt, während sich in andern Varietäten, bei der grossen Rolle, welche die isomorphen Elemente von Kalk und Magnesia in dieser Species spielen, etwas verschiedene Dimensionen erwarten lassen *).

Eine der gewöhnlichsten Krystallformen des vulcanischen Pyroxenes oder Augites ist:

$\infty P . \infty P \infty . (\infty P \infty) . P.$ Fig. 745.

Sind zwei Individuen der Art nach dem ersten Gesetze durch Juxtaposition in dem orthodiagonalen Hauptschnitte verbunden, so entsteht ein Zwilling wie Fig. 746, in welchem die Flächen der beiden Hemipyramiden P ein- und ausspringende Winkel von 153° 21′, die Polkanten derselben eben dergleichen Winkel von 149° 14′ bilden. Meist sind beide Individuen so symmetrisch ausgebildet, und so regelmässig verwachsen, dass die Flächen ($\infty P \infty$) beiderseits in eine Ebene fallen, und gar keine Demarcation der Individuen bemerken lassen. Diese Zwillingsbildung findet sich auch häufig an andern Combinationen des Augites sowohl als auch des Diopsides; an letzterem auch in derben Massen, meist mit häufiger Wiederholung, in den bekannten schaligen Aggregaten.

Die Hemipyramide P des einen Individuums entspricht sehr nahe dem Klinoprisma ($P\infty$) des andern, und *vice versa*, weil, wie sich auch aus obigen Dimensionen ergiebt, $P\infty$ sehr nahe dieselbe Neigung zur Axe hat wie 0P.

---

*) Es ist sehr nahe $a : b = 7 : 13$, und $\cos C = \frac{7}{26}$, wenn $C = 74° \; 21'$.

Auch der Fassait kommt in Zwillingen nach dem ersten Gesetze vor; zuweilen sind beide Individuen in der Richtung der Hauptaxe in einander geschoben, so dass die beiderseitigen Prismen ∞P und die übrigen verticalen Flächen coincidiren *). Wollte man für diese Modalität der Verwachsung eine Zusammensetzungsfläche angeben, so würde dies nur eine auf der Hauptaxe genau rechtwinklige Fläche seyn können. An den Tyroler Augiten so wie an manchen Diopsiden ist auch nicht selten eine Fläche ausgebildet, welche horizontal zu seyn scheint, und, unter Voraussetzung einer orthometrischen Krystallreihe, mit $0P$ zu bezeichnen seyn würde, während sie obigen klinoëdrischen Dimensionen zufolge sehr nahe durch $\frac{1}{2}P\infty$ dargestellt wird.

§. 657.

Fortsetzung.

Der Augit (wie z. B. die in Fig. 745 abgebildete Varietät) kommt zuweilen in Zwillingen mit geneigten Hauptaxen vor, deren Zwillingsaxe nothwendig der Ebene des orthodiagonalen Hauptschnittes parallel seyn muss, weil die Flächen $\infty P\infty$ beider Individuen einander in der That parallel zu seyn scheinen, während sich die Hauptaxen nahe unter 120° schneiden **). Die Fig. 747 zeigt den Habitus dieser

---

*) Die hiesige akademische Sammlung besitzt sehr schöne Zwillingskrystalle dieser Art.

**) Haüy hat gleichfalls Zwillinge des Augites von Stromboli beschrieben und abgebildet, in welchen die beiderseitigen $\infty P\infty$ in eine Ebene fallen, während die Hauptaxen einen Winkel von 81° bilden. Ja, unter den bekannten Durchkreuzungen der Combination $\infty P.\infty P\infty.(\infty P\infty).P.\frac{1}{2}P\infty$ aus dem Fassathale giebt es welche, in denen beide Individuen genau rechtwinklig auf einander sind, so dass die, meist etwas gekrümmten Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ des einen Individuums in die Flächen $(\infty P\infty)$ des andern fallen.

Digitized by Google

Zwillinge, wie sie Breithaupt von Schima im böhmischen Mittelgebirge mitgebracht.

Setzen wir das Verhältniss $a : b = 7 : 13$ und $C = 74° 21'$, oder irgend ein anderes Verhältniss, für welches

$$\frac{a}{2b} = cos C$$

als das eigenthümliche der Species voraus, so werden die Flächen der Hemipyramide (P2) rechtwinklig auf der Ebene des orthodiagonalen Hauptschnittes, und folglich die Normalen derselben der Ebene desselben Hauptschnittes parallel, wodurch die eine Bedingung dieser Zwillinge erfüllt ist.

Berechnen wir ferner die Polkante der Hemipyramide (P2), so finden wir solche sehr nahe = 120°, daher denn auch die zweite Bedingung der Zwillinge, dass sich die Hauptaxen nahe unter 120° schneiden, durch die Annahme: Zwillingsaxe eine Normale von (P2), erfüllt würde.

Auf der andern Seite ist nicht zu läugnen, dass diese, so wie die in der Anmerkung erwähnten Zwillinge von Stromboli und aus dem Fassathale sehr viel für die Annahme orthometrischer Dimensionen sprechen.

An manchen derben Varietäten des Pyroxenes, zumal am Malakolith und Salit, kommt häufig eine Zusammensetzung vor, deren Gesetz sich am richtigsten so aussprechen lässt: Zusammensetzungsfläche parallel, Umdrehungsaxe normal einer Fläche des Hemiprismas P∞. Diese Zusammensetzung wiederholt sich vielfach, und veranlasst schalige Aggregate, deren abwechselnde Individuen sich in paralleler Stellung befinden.

Endlich finden sich an den erwähnten Augiten aus Tyrol schiefwinklige Durchkreuzungen, deren Gesetz

Digitized by Google

noch nicht ausgemittelt ist, wenn sie überhaupt nach einem bestimmten Gesetze gebildet sind.

§. 658.

Zwillinge des Epidotes.

Der Epidot findet sich in Zwillingskrystallen nach dem Gesetze:

Zwillingsaxe die Normale von P∞, oder:
Zusammensetzungsfläche parallel, Umdrehungsaxe normal der Fläche des Hemiprismas P∞.

Die Elemente der Krystallreihe sind nämlich zufolge den Messungen von Haidinger:

$$C = 89° 27'$$
$$a : b : c = 0{,}4843 : 1 : 0{,}3072$$

Die Krystalle haben bekanntlich das Eigenthümliche (was sich jedoch auch an dem Glaubersalz, der Kupferlasur u. a. Substanzen findet), dass sie nach der Orthodiagonale säulenartig in die Länge gestreckt sind. So finden sich z. B. zu Floss in der Oberpfalz Krystalle der Combination

∞P∞.—3P∞.P∞.∞P2, Fig. 751,

in welchen *o* : *o* = 116° 52′, *M* : *T* = 115° 24′, *M* : *i* = 145° 39′, *T* : *i* = 98° 57′; zwei Individuen der Art sind nicht selten zu Zwillingen nach dem angegebenen Gesetze verbunden, wie Fig. 752, in welchen der Winkel *M* : *M′* 129° 12′, der Winkel *i* : *i′* 162° misst, und die im Bilde links liegenden Flächen *o* einen ausspringenden, die rechts liegenden Flächen *o* einen einspringenden Winkel von 154° 3′ bilden.

Zu Arendal findet sich unter andern die Combination

∞P∞.P∞.—P∞.—P.P2, Fig. 756,

in welcher der Winkel einer vorderen oberen gegen eine hintere untere Fläche von —P (*n* : *n*) 109° 27′, der Winkel einer vorderen unteren gegen eine hintere obere Fläche von P2 (*u* : *u*) 70° 56′, und folglich

Digitized by Google

der Winkel $u : T$ 144° 32′, endlich der Winkel von $\infty P\infty$ zu $P\infty$ ($M : T$) 115° 24′ beträgt.

Die Fig. 757 stellt einen nach dem angegebenen Gesetze gebildeten Zwilling dieser Combination in schiefer, Fig. 758 denselben in klinodiagonaler Projection dar; seine wichtigsten Winkel sind

$M : M' = 129° \ 12'$

$M : T$ oder $M' : T' = 115° \ 24'$

$T : r$ oder $T' : r' = 128° \ 19'$

$r : r' = 103° \ 22'$

§. 659.

Zwillinge des Amphiboles.

Der Amphibol ist, zumal in den unter dem Namen basaltische Hornblende bekannten Varietäten, einer sehr regelmässigen Zwillingsbildung nach dem Gesetze:

Zwillingsaxe die Hauptaxe, oder:

Zwillingsaxe normal, Zusammensetzungsfläche parallel dem orthodiagonalen Hauptschnitte,

unterworfen.

Eine der gewöhnlicheren Combinationen ist in Fig. 748 dargestellt; ihr Zeichen wird für p als Basis und M als Prisma der Hauptreihe:

$$\infty P.(\infty P\infty).0P.P.(3P3)\ (2P\infty).$$

Die Dimensionen der Krystallreihe sind noch nicht mit hinlänglicher Genauigkeit ausgemittelt; einigen approximativen Messungen zufolge wäre:

$C = 75° \ 10'$

$M : M = 124° \ 30'$

$r : r = 148° \ 30'$

$z : z = 120° \ 26'$

Zwei Individuen dieser Art, nach dem angegebenen Gesetze verwachsen, bilden Zwillinge wie Fig. 749, welche gewöhnlich ein sehr symmetrisches Ansehen haben und scheinbar einen einzigen Krystall

Digitized by Google

darstellen, weil beide Individuen nach gleichen Dimensionen ausgebildet und so regelmässig verwachsen sind, dass ihre beiderseitigen Flächen ($\infty P \infty$) rechts und links in eine Ebene fallen, und keine einspringenden Winkel vorkommen. Beide Enden des Zwillings sind verschieden gebildet, indem einerseits eine vierflächige, durch die Flächen von P gebildete Zuspitzung, anderseits eine durch die Flächen 0P gebildete Zuschärfung vorherrschend ist. Sehr selten treten beide Individuen so weit aus einander, dass einspringende Kanten zum Vorscheine kommen, wie in Fig. 750. Jedenfalls lassen sich daher diese Zwillinge am anschaulichsten nach Haüy's Weise construiren, indem man sich ein Individuum nach seinem orthodiagonalen Hauptschnitte halbirt, und die eine Hälfte gegen die andere um die, auf der Schnittebene normale Umdrehungsaxe durch 180° verdreht denkt.

§. 660.

Zwillinge des Wolframs.

Am Wolfram sind bis jetzt folgende zwei Gesetze der Zwillingsbildung beobachtet worden:

1) Zwillingsaxe die Hauptaxe, Zusammensetzungsfläche der orthodiagonale Hauptschnitt.
2) Zwillingsaxe eine Normale, Zusammensetzungsfläche eine Fläche des Prismas ($\frac{3}{2}P\infty$).

Die Messungen führen ungefähr auf das Verhältniss:

$$a : b : c = 0{,}851 : 1 : 0{,}823$$

und auf das sehr merkwürdige Resultat, dass der Winkel *C* ein rechter Winkel ist, welches auch die nach beiden, zumal aber die nach dem ersten Gesetze gebildeten Zwillinge vollkommen bestätigen.

Eine der gewöhnlichsten Combinationen des Wolframs von Zinnwald ist:

$\infty P . \infty P \infty . \frac{1}{2}P\infty . -\frac{1}{2}P\infty . (P\infty)$. Fig. 753, in welcher der Winkel von $\infty P = r : r = 101° \;\; 5'$

Digitized by Google

der Winkel von (P∞) $= u : u =$ 99° 12′
- - - - $\frac{1}{2}$P∞ $= t : M =$ 62° 40′

Fig. 754 stellt einen nach dem ersten Gesetze gebildeten Zwilling dar, welche überhaupt häufiger sind als die andern; die beiderseitigen Flächen $\frac{1}{2}$P∞ bilden ein- und ausspringende Winkel von 125° 20′; die beiderseitigen Flächen (P∞) aber fallen, wenn sie ausgebildet sind, je zwei genau in eine Ebene, zum vollständigen Beweise, dass dieses scheinbare Klinoprisma wirklich ein horizontales Prisma, und daher der Winkel *C* wirklich ein rechter ist.*)

Ein nach dem zweiten Gesetze gebildeter Zwilling ist in Fig. 755 abgebildet; der Neigungswinkel der beiden Hauptaxen beträgt 120° 52′, der einspringende Winkel der Flächen *u* und *u′* 139° 56′, während die beiderseitigen Flächen ∞P∞, so weit die Beschaffenheit der Krystalle die Beobachtung gestattet, in eine Ebene fallen. Die sehr starke verticale Streifung dieser Flächen lässt die Demarcation beider Individuen sehr deutlich hervortreten.

§. 661.

Zwillinge des Orthoklases.

Der Orthoklas oder gemeine Feldspath, eine der wichtigsten und interessantesten Species des Mineralreiches, wird auch durch die mancherlei Zwillingsgesetze merkwürdig, welche an ihm verwirklicht sind.

Die neuesten Messungen von Kupffer führen auf das Verhältniss der Dimensionen

$$a : b : c = 0{,}8438 : 1 : 1{,}5185$$
$$C = 63° \, 53'$$

Da aber diese Dimensionen, wie schon G. Rose bemerkt, mit der unläugbaren Rechtwinkligkeit des Klinoprismas (2P∞) nicht übereinstimmen, auch der

*) Der Wolfram ist daher qualitativ monoklinoëdrisch, quantitativ rhombisch.

Digitized by Google

Orthoklas sich wohl jedenfalls in einer weit höheren Temperatur gebildet hat, als diejenige ist, bei welcher gegenwärtig die Messungen angestellt werden, so dürfte ein anderes, mit der Rechtwinkligkeit des Prismas (2P∞) übereinstimmendes Verhältniss statt des erwähnten anzunehmen seyn. Sehr zu beachten ist es aber, dass durch Kupffer's Messungen die frühere Deutung der Krystallreihe des Orthoklases als einer orthometrischen sehr unwahrscheinlich gemacht worden, weil sie die vorausgesetzte Gleichheit der Neigungswinkel von 0P und P∞ gegen die Axe widerlegen.

Eines der gewöhnlichsten Gesetze der Zwillingsbildung ist folgendes:

Zwillingsaxe die Hauptaxe.

Die Individuen sind entweder nur durch Juxtaposition in einer der Flächen von (∞P∞) oder durch gänzliche oder theilweise Penetration verbunden. Mit Ausnahme des Falles einer gänzlichen Durchdringung ist dann immer der Unterschied zu berücksichtigen, ob die Individuen mit ihren linken oder rechten Seiten verwachsen, oder auch in einander geschoben sind; ein Unterschied, welcher für diese Species um so wichtiger wird, weil die linke Fläche des Prismas ∞P durch eine deutlichere Spaltbarkeit bezeichnet ist als die rechte Fläche. Diese Verschiedenheit der Spaltbarkeit giebt dem Links und Rechts eine absolute Bedeutung, und verbietet es auch, das Stellungsgesetz der Zwillinge durch die Formel: Zwillingsaxe die Normale von ∞P∞ auszusprechen, weil in den Zwillingen die vollkommneren prismatischen Spaltungsflächen beider Individuen einander parallel sind, und daher nur die Hauptaxe als Zwillingsaxe gelten kann.

Fig. 759 zeigt einen einfachen Krystall der Combination

∞P.(∞P∞).0P.2P∞

von welcher in Fig. 760 ein nach diesem Gesetze gebildeter Zwilling dargestellt ist; die nach Mohs hinzugefügten Figg. 761 und 762 dienen dazu, den Unterschied der Zwillinge mit rechts und links verwachsenen Individuen zu veranschaulichen. Denkt man sich in dem Bilde des rechts verwachsenen Zwillings das rechts liegende Individuum nach links, und das links liegende Individuum nach rechts gedrängt, so werden beide durch den Zustand einer vollkommenen Durchkreuzung hindurchgehen, dann in die entgegengesetzte Lage rücken, und einen Zwilling mit links verwachsenen Individuen bilden.

§. 662.

Fortsetzung.

Ein zweites Zwillingsgesetz ist:

Zwillingsaxe eine Normale, Zusammensetzungsfläche eine Fläche von (2P∞).

Nach diesem Gesetze sind unter andern die bekannten Zwillingskrystalle von Baveno zusammengesetzt. Da das Klinoprisma (2P∞) rechtwinklig, und folglich die Zusammensetzungsfläche gegen 0P und (∞P∞) gleich geneigt ist, so folgt, dass in den Zwillingen die Flächen 0P des einen Individuums den Flächen (∞P∞) des andern parallel sind, und *vice versa*, so wie, dass die beiderseitigen 0P und auch die beiderseitigen (∞P∞) auf einander rechtwinklig sind. In der Regel sind beide Individuen so gleichmässig ausgebildet, dass jedes die Hälfte eines einzigen Individuums darstellt, welches parallel einer Fläche von (2P∞) halbirt worden, daher auch gewöhnlich nur die Rechtwinkligkeit von 0P und 0P, von (∞P∞) und (∞P∞) zu beobachten ist.

In den Krystallen von Baveno liegt diesen Zwillingen eine rechwinklig säulenförmige Combination mit vorherrschenden 0P und (∞P∞), wie z. B. die in

Digitized by Google

Fig. 763 abgebildete Combination 0P.(∞P∞).∞P.2P∞.(2P∞).P zu Grunde, in welcher jedoch die Flächen von (2P∞) nicht zu erscheinen pflegen, die nur deshalb mit gezeichnet worden sind, um die Lage der Zusammensetzungsfläche anzudeuten. Denkt man sich einen solchen Krystall durch einen Schnitt halbirt, welcher einer (z. B. der oberen vorderen) Fläche *n* parallel geht, und hierauf die eine Hälfte gegen die andere um eine auf der Schnittfläche rechtwinklige Linie durch 180° verdreht, so erhält man eine ziemlich richtige Vorstellung dieser Zwillinge, dergleichen einer der Combination 0P.(∞P∞).∞P.2P∞.P∞.P in Fig. 764 (zu deren Erläuterung die in Fig. 765 gegebene orthographische Projection auf eine Normalfläche der Klinodiagonale dienen kann), so wie ein anderer der Combination 0P.(∞P∞).2P.∞P.P.P∞.2P∞ in aufrechter Stellung nach der Klinodiagonale in Fig. 769 dargestellt ist.

Der Adular kommt gleichfalls sehr schön nach demselben Gesetze verwachsen vor, und liefert dann bei einer gewissen Beschaffenheit seiner Combinationen den evidenten Beweis für die Richtigkeit des angegebenen Zwillingsgesetzes. So finden sich z. B. zu Rodi am Gotthardt sehr schöne und grosse Adularzwillinge (ähnlich wie Fig. 764, nur weniger verlängert nach der Klinodiagonale), welche nicht nur durch die symmetrische Lage der vollkommneren und unvollkommneren Spaltungsflächen des Prismas ∞P (der Flächen *T* und *l*) die Annahme, dass die Zwillingsaxe eine Normale von (2P∞) ist *), sondern auch die Rechtwinkligkeit dieses Klinoprismas bestätigen, indem gewöhnlich Theile der Fläche (∞P∞) des einen Individuums am Rande der Fläche 0P des andern Individuums zu

---

*) Denn vom blos krystallographischen Gesichtspuncte aus liesse sich auch eine andere Linie als Zwillingsaxe annehmen.

Digitized by Google

beobachten sind, welche so vollkommen mit 0P coincidiren, dass beide nur eine einzige spiegelnde Fläche bilden.

Nicht selten wiederholt sich die Zusammensetzung, in welchem Falle Drillings- und Vierlingskrystalle von sehr merkwürdiger Beschaffenheit entstehen. Legt sich z. B. an das hintere Individuum in Fig. 769 ein drittes nach vorn an, so resultirt ein Drilling, wie Fig. 770, in welchem die Individuen I und III eine solche Stellung zu einander haben, dass man für sie das besondere Gesetz: Zwillingsaxe die Klinodiagonale, Zusammensetzungsfläche die Basis, geltend machen könnte *).

Bildete sich endlich zwischen dem ersten und dritten Individuo noch ein viertes Individuum, so entsteht ein sehr symmetrischer Vierlingskrystall, dergleichen bisweilen am Adular vorkommen, theils so, wie es die Fig. 771 zeigt, theils sehr verkürzt, wenn die Individuen nur die Combination ∞P.0P.P∞ darstellen, in welchem Falle man sich das Bild des Vierlings construiren kann, wenn man sich zwei Zwillinge wie Fig. 767 erst in paralleler Stellung in einander geschachtelt, und darauf den einen gegen den andern um die Linie *aa'* durch 90° verdreht denkt.

§. 663.

Fortsetzung.

Ein drittes Gesetz der Zwillingsbildung des Orthoklases, welches besonders an solchen Krystallen vorzukommen pflegt, in denen 0P und (∞P∞) als vorherrschende Gestalten ein rechtwinklig vierseitiges Prisma bilden, ist:

*) Nicht aber das geometrisch gleich geltende Gesetz: Zwillingsaxe die Normale von 0P, welches eine ganz andere Lage der beiderseitigen rechten und linken Flächen von ∞P fordert.

Digitized by Google

Zwillingsaxe die Normale, Zusammensetzungsfläche eine Fläche von 0P.

Die Individuen sind gewöhnlich durch Juxtaposition verbunden, wie in Fig. 768, welche einen solchen Zwilling der Combination 0P.(∞P∞).∞P.P∞.(∞P3) in der aufrechten Stellung nach der Klinodiagonale darstellt; doch kommen auch Exemplare vor, an welchen die Individuen mehr oder weniger in einander geschoben sind, bis zur fast vollkommenen Durchkreuzung. Auch der Adular bildet zuweilen in seiner gewöhnlichen Combination ∞P.0P.P∞ Zwillinge dieser Art, wie Fig. 767. Doch ist es keinesweges ganz ausgemacht, ob das Gesetz nicht so ausgesprochen werden muss:

Zwillingsaxe die Klinodiagonale, Zusammensezzungsfläche die Basis;

indem es von einer genauen Untersuchung der Lage der beiderseitigen vollkommneren Spaltungsflächen von ∞P abhängt, ob die eine oder die andere Formel gültig ist; liegen die Flächen *T* des einen Individuums an den Flächen *T* des andern, so gilt die erste Formel; liegen dagegen die Flächen *T* des einen an den Flächen *l* des andern, so gilt die zweite Formel.

Endlich will ich noch erwähnen, dass ich einen Zwilling des Orthoklases aus dem Granit des Fichtelgebirges besitze, welcher, soweit die Beschaffenheit der Oberfläche die Beobachtung unterstützt, nach dem Gesetze:

Zwillingsaxe eine Normale, Zusammensetzungsfläche eine Fläche von ∞P3; Fig. 766,

gebildet ist.

Die Fläche (∞P∞) oder *M* des einen Individuums scheint der Fläche ∞P rechts, also *T*, des andern parallel zu seyn, und *vice versa* *). Die beiderseitigen

*) In der Figur 479 meines Lehrbuches der Mineralogie ist

Flächen 0P bilden ein- und ausspringende Winkel von 155° 2′, die beiderseitigen Flächen 2P∞ Winkel von 133° 0′.

§. 664.

Zwillinge des Ryakolithes.

Der Ryakolith oder glasige Feldspath (Nose's Sanidin), dessen Krystalle so häufig in den Trachyten und andern vulcanischen Gesteinen auftreten, und den erst kürzlich Gustav Rose als eigenthümliche Species fixirte, zeigt ganz ähnliche Zwillingskrystalle wie der Orthoklas. Rose's Messungen führen auf die Dimensionen

$$C = 63° \; 54'$$

$$a : b : c = 0{,}8468 : 1 : 1{,}535$$

Die Krystalle sind theils tafelartig durch Vorherrschen von (∞P∞), theils rechtwinklig säulenartig, durch gleichzeitiges Vorherrschen von (∞P∞) und 0P, zeigen aber sonst viel Aehnlichkeit mit denen des Orthoklases. Die gewöhnlichsten Zwillinge sind nach dem Gesetze:

Zwillingsaxe die Hauptaxe, Zusammensetzungsfläche eine Fläche von (∞P∞)

gebildet, und daher gleichfalls als Zwillinge mit rechts und mit links verwachsenen Individuen zu unterscheiden, wie die ähnlichen des Orthoklases. Die Figur 772 stellt einen dergleichen Zwilling der tafelartigen Combination (∞P∞).∞P.0P.P vor; beide Individuen stellen die Hälften eines einzigen, nach seinem klinodiagonalen Hauptschnitte halbirten Individuums dar, und das Vorspringen der Flächen *o* über die Flächen *P* zeigt augenscheinlich, dass die Polkante der Hemipyramide P und die Klinodiago-

---

die nach vorn gekehrte Fläche ∞P des hinteren Individuums mit *l* statt mit *T* zu bezeichnen.

Digitized by Google

nale eine verschiedene Neigung gegen die Hauptaxe haben.

Ausser diesen kommen noch andere Zwillinge vor, deren Zwillingsaxe eine Normale, Zusammensetzungsfläche eine Fläche des Klinoprismas (2P∞) ist, und die also den Bavenoer Orthoklaszwillingen in Fig. 764 und 765 ganz analog gebildet sind. Da aber dieses Prisma nicht wie im Orthoklas rechtwinklig ist, sondern an der Polkante 90° 32′ misst, so sind auch die Flächen 0P oder (∞P∞) der beiden Individuen nicht rechtwinklig auf einander, sondern bilden einen Winkel von 89° ½, wovon sich Rose durch Messungen überzeugt hat.

§. 665.

Zwillinge des Titanites.

Der Titanit ist gleichfalls eine durch ihre häufige Zwillingsbildung sehr ausgezeichnete Species; das Gesetz seiner Zwillinge ist:

Zwillingsaxe die Normale von 0P, oder
Zwillingsaxe die Klinodiagonale.

Rose's Messungen führen, wenn wir in den Figg. 773, 777 und 778 $P = 0P$, $l = \infty P$, und $y = P\infty$ setzen, auf die Dimensionen

$$C = 85°\ 6'$$
$$a : b : c = 1{,}537 : 1 : 2{,}342$$

und auf folgende Zeichen der erwähnten Combinationen:

1) ∞P.⅘P∞.0P.P∞, tafelartig, Fig. 773;
2) dieselbe Combination mit (∞P∞), säulenartig, Fig. 777;
3) ∞P.(∞P3).⅘P∞.P∞.0P.(4P4).—(2P2).(⅔P2). Fig. 778.

Die grünen, tafelförmigen oder kurz säulenförmigen, meist mit Chlorit imprägnirten Krystalle finden sich zuweilen durch Juxtaposition in der Fläche 0P

verbunden wie in Fig. 774 und 776. Die Flächen *l* beider Individuen bilden ein- und ausspringende Zwillingskanten von 170° 44′, die beiderseitigen Hemiprismen $\frac{1}{9}$P∞ = *x* eine ausspringende horizontale Zwillingskante von 85° 6′; sind, wie gewöhnlich, auch die beiderseitigen Hemiprismen P∞ = *y* vorhanden, so bilden selbige an der Seite der ausspringenden Winkel von *l* eine einspringende horizontale Zwillingskante von 120° 54′.

Häufiger finden sich jedoch die Individuen durch Penetration zu vollkommenen Durchkreuzungszwillingen verbunden, in welchen die einspringenden Zwillingskanten der Flächen *l* fehlen, weil die vordere Seite eines solchen Zwillings dasselbe Ansehen hat wie die hintere Seite eines Zwillings wie Fig. 774 oder 776, daher man vorn und hinten die Flächen *l* mit ausspringenden Winkeln von 170° 44′, die Flächen *y* mit einspringenden Winkeln von 120° 54′ beobachtet. Die beiderseitigen Flächen 0P bilden aber keine ununterbrochene Fläche, sondern erscheinen längs der Orthodiagonale durch eine von den Flächen *x* gebildete einspringende Zwillingskante von 94° 54′ in zwei Felder abgetheilt; Fig. 775 und 779.

Sind also beide Individuen gleichmässig ausgebildet, so erscheinen die Zwillinge der sehr niedrigen tafelartigen Krystalle mit vorherrschenden P∞ als längliche sechsseitige Tafeln, an welchen zwei gegenüberliegende längere Randflächen einspringend unter 120° 54′, die übrigen vier Randflächen ausspringend unter 170° 44′ zugeschärft, die Seitenflächen aber längs der Makrodiagonale mit einem furchenartigen Einschnitte von 94° 54′ versehen sind; Fig. 775. Dagegen erscheinen die Zwillinge der dick tafelförmigen oder kurz säulenförmigen Krystalle mit untergeordneten P∞ wie dicke rhombische Tafeln, an welchen die Randflächen unter 170° 44′ zugeschärft, die

Seitenflächen aber mit einem ähnlichen Einschnitte versehen, und ausser dem die stumpfen Randkanten durch die Flächen *y* eingekerbt sind; Fig. 779.

§. 666.

Fortsetzung.

Nächst den im vorhergehenden §. beschriebenen Zwillingen sind noch besonders diejenigen Durchkreuzungszwillinge des Titanites zu berücksichtigen, deren Individuen durch die vorherrschende Hemipyramide (4P4) = *s* und das Hemiprisma P∞ = *y* als breite, kurze, sechsseitige, an den Enden durch die Flächen 0P = *P* und $\frac{1}{2}$P∞ = *x* begränzte Säulen, oder auch längliche rectanguläre Tafeln erscheinen. Diese Krystalle zeigen fast immer das Eigenthümliche, dass sie in der Mitte grün, an den Enden aber braun bis hyacinthroth gefärbt sind. Durchkreuzen sich zwei derselben nach dem angegebenen Gesetze, so bilden sie Zwillinge wie Fig. 780, in welchen die Flächen *s* nach aussen vier einspringende Winkel von 148° 24′, aber auch nach innen, an den Enden der durch die Flächen *x* gebildeten tiefen Einfurchung der Basis jederseits einspringende Winkel von 55° 24′ hervorbringen.

Dies ist jedoch nur eine der einfachsten Formen der Individuen; häufig finden sich auch die Flächen des Prismas ∞P und andere untergeordnete Gestalten in der Combination, zumal wenn die Krystalle nach den Flächen *s* etwas länger säulenförmig gebildet sind; Fig. 781. Dagegen kommen auch andere, nach der Orthodiagonale sehr langgestreckte, dünntafelartige Krystalle vor, in welchen man fast nur die vorherrschenden Flächen *y* so wie die Flächen *P* und *x* erkennt, indem sie nach der Richtung der Flächen *s* hin sehr unvollkommen ausgebildet zu seyn pflegen.

Digitized by Google

Siebentes Capitel.

Zwillinge des triklinoëdrischen Systemes.

§. 667.

Andeutungen zur Theorie dieser Zwillinge.

Die allgemeine Theorie der Zwillinge dieses Systemes erfordert, wegen der drei schiefen Neigungswinkel, einige weitläufige Rechnungen, welche sich jedoch sehr vereinfachen, sobald man nur auf die bis jetzt in der Natur beobachteten Gesetze Rücksicht nimmt. Wir wollen uns daher auch damit begnügen, den Gang der Rechnung anzudeuten, und die ersten Vorbereitungen zu ihrer Ausführung mitzutheilen.

Man führt zuvörderst, statt des gegebenen schiefwinkligen Axensystemes, ein subsidiarisches orthometrisches Axensystem ein, und verfährt dabei wie folgt.

Es sey die Hauptaxe die Axe der x, die Makrodiagonale die Axe der y, die Brachydiagonale die Axe der z, und

der Neigungswinkel der x zu $y = \gamma$

- - - - - x zu $z = \beta$

- - - - der Ebene (xy) zur Ebene $(xz) = A$

Statt dieses triklinometrischen Axensystemes sollen nun drei rechtwinklige Axen der x_1, y_1 und z_1 eingeführt werden. Zu dem Ende wählt man die Axe der x zur Axe der x_1, nimmt in der Ebene (xz) oder $\infty\breve{P}\infty$ eine auf der Hauptaxe rechtwinklige Axe der z_1, und endlich eine auf derselben Ebene rechtwinklige Axe der y_1. Bezeichnet man die Neigungswinkel der neuen orthometrischen gegen die alten klinometrischen Axen mit (X_1X), (X_1Y), (X_1Z), u. s. w, so bestimmen sich folgende Cosinus dieser Winkel:

$$cos(X_1X) = 1,\ cos(X_1Y) = cos\gamma,\ cos(X_1Z) = cos\beta$$
$$cos(Y_1X) = 0,\ cos(Y_1Y) = sinA sin\gamma,\ cos(Y_1Z) = 0$$
$$cos(Z_1X) = 0,\ cos(Z_1Y) = cosA sin\gamma,\ cos(Z_1Z) = sin\beta$$

Digitized by Google

Die rechtwinkligen Coordinaten, als Functionen der schiefwinkligen Coordinaten, werden daher:

$$x_1 = x + y\cos\gamma + z\cos\beta$$
$$y_1 = y\sin A\sin\gamma$$
$$z_1 = y\cos A\sin\gamma + z\sin\beta$$

und die schiefwinkligen Coordinaten, als Functionen der rechtwinkligen:

$$\text{wenn}\quad \frac{\sin\beta\cos\gamma - \cos A\cos\beta\sin\gamma}{\sin A\sin\gamma} = \cot C$$

$$x = x_1 - \frac{y_1\cot C}{\sin\beta} - \frac{z_1\cos\beta}{\sin\beta}$$

$$y = \frac{y_1}{\sin A\sin\gamma}$$

$$z = \frac{z_1}{\sin\beta} - \frac{y_1\cos A}{\sin A\sin\beta}$$

Es ist aber C der Neigungswinkel der Ebene (xz) gegen die Ebene (yz), oder des Hauptschnittes $\infty P\infty$ gegen den Hauptschnitt $0P$.

Man bestimmt nun die klinometrischen Gleichungen der Zwillingsaxe N, wie solche das gegebene Zwillingsgesetz fordert, macht diese Gleichungen orthometrisch, und berechnet die Cosinus der Neigungswinkel der N gegen die Axen der x, y und z des Individuums I. Bezeichnet man die schiefwinkligen Axen des Individuums II als die Axen der x', y' und z', so finden sich die orthometrischen Gleichungen derselben aus den Bedingungen ihrer Lage,

1) dass jede Axe des Individuums II in die Ebene durch N und die gleichnamige klinometrische Axe des Individuums I fällt, und
2) dass jede Axe des Individuums II mit der N denselben Winkel bildet wie die gleichnamige Axe des Individuums I.

Mittels der gefundenen Gleichungen bestimmen sich nun leicht die Cosinus der Neigungswinkel der Axen der x', y' und z' gegen die Axen der x_1, y_1 und z_1,

und mittels dieser wiederum die Substituenden der Coordinaten x_1, y_1 und z_1, um irgend eine Linie oder Fläche des Individuums I auf das schiefwinklige Axensystem des Individuums II beziehen zu können.

Die Beziehung gegebener Begränzungselemente des einen Individuums auf das andere fordert daher nur noch, dass man die, aus dem krystallographischen Zeichen abzuleitenden klinometrischen Gleichungen derselben orthometrisch ausdrückt, und in den gefundenen Ausdrücken für die Coordinaten x_1, y_1 und z_1 deren Werthe als Functionen von x', y' und z' substituirt.

Die wichtigsten der bis jetzt beobachteten Gesetze sind nun folgende:

1) Zwillingsaxe die Normale von $\infty\breve{P}\infty$;
2) Zwillingsaxe die Makrodiagonale, oder die Axe der y;
3) Zwillingsaxe die Hauptaxe, oder die Axe der x.

Dies sind nämlich die drei Gesetze, welche sich an den verschiedenen triklinoëdrischen Feldspathen, dem Periklin, Tetartin, Labrador und Anorthit, als den wichtigsten Species aus dem Gebiete dieses Krystallsystemes, verwirklicht finden.

Ein für alle Mal bestimmen sich die orthometrischen Gleichungen der krystallographischen Axen des Individuums I wie folgt:

Gleichungen der Hauptaxe:

$$y_1 = 0, \quad z_1 = 0$$

Gleichungen der Makrodiagonale:

$$\frac{x_1}{\cos\gamma} - \frac{y_1}{\sin A \sin\gamma} = 0, \quad \frac{y_1}{\sin A} - \frac{z_1}{\cos A} = 0$$

Gleichungen der Brachydiagonale:

$$y_1 = 0, \quad \frac{x_1}{\cos\beta} - \frac{z_1}{\sin\beta} = 0$$

Findet nun das erste Gesetz Statt, so ist die Zwil-

Digitized by Google

lingsaxe identisch mit der Axe der y_1; ihre orthometrischen Gleichungen werden also

$$x_1 = 0,\ z_1 = 0$$

Für das zweite Gesetz sind die klinometrischen Gleichungen der Zwillingsaxe

$$x = 0,\ z = 0$$

und folglich ihre orthometrischen Gleichungen:

$$\frac{x_1}{\cos\gamma} - \frac{y_1}{\sin A \sin\gamma} = 0$$

$$\frac{z_1}{\cos A} - \frac{y_1}{\sin A} = 0$$

Für das dritte Gesetz endlich sind die Gleichungen der Zwillingsaxe

$$y_1 = 0,\ z_1 = 0$$

Der weitere Verfolg der Rechnung hat nun keine Schwierigkeiten, da man sie nach denselben einfachen Regeln zu führen hat, wie im rhombischen Systeme.

§. 668.

Zwillinge des Tetartines.

Am Tetartin oder Albit, für welchen nach G. Rose's Messungen

$$A = \infty\bar{P}\infty : \infty\breve{P}\infty = 88^\circ\ 39'$$
$$B = 0P : \infty\bar{P}\infty = 63^\circ\ 34'$$
$$C = 0P : \infty\breve{P}\infty = 86^\circ\ 24'$$
$$a:b:c = 0{,}887:1{,}627:1$$
$$\alpha = b:c = 86^\circ\ 45'$$
$$\beta = a:c = 63^\circ\ 25'$$
$$\gamma = a:b = 85^\circ\ 20'$$

finden sich das erste und dritte der im vorigen §. angegebenen Gesetze verwirklicht.

Eine der gewöhnlichsten Combinationen ist

$$\infty P'.\infty'P.\infty\breve{P}\infty.0P.'\bar{P}'\infty.P'.\quad \text{Fig. 782.}$$

Denkt man sich zwei Individuen von dieser Form nach dem Gesetze: Zwillingsaxe die Normale, Zu-

sammensetzungsfläche eine Fläche von $\infty\breve{P}\infty$, verbunden, so bilden sie einen Zwilling, wie ihn Fig. 783 in schiefer, Fig. 784 in horizontaler Projection darstellt. Die beiderseitigen Flächen 0P (*P*) bilden ein- und ausspringende Winkel von 172° 48′, an welchen man nicht nur die Zwillinge, sondern auch die Species selbst sehr leicht erkennt, welche wegen ihrer grossen Aehnlichkeit mit Orthoklas früher mit diesem verwechselt worden.

Gewöhnlich findet diese Zwillingsbildung mit Wiederholung Statt, indem viele Individuen an einander gewachsen sind, von denen zumal die inneren in der Richtung der Zwillingsaxe sehr verkürzt zu seyn pflegen, daher die ganze Gruppe oft nur ein schichtenartiges Aggregat lamellarer Individuen, oder auch wohl einen scheinbar einfachen Krystall darstellt, welcher von mehren dünnen Lamellen durchsetzt wird.

Zuweilen treten die mittleren Individuen über das sie einschliessende Individuum hervor, seltner zeigen sie sogar verschiedene Formen; so habe ich kleine, von Prehnit begleitete Krystalle aus Tyrol gesehen, wie Fig. 785, in welchen dünn tafelartige Individuen der Combination Fig. 782 von einem Individuum der Combination in Fig. 767 dergestalt umschlossen werden, dass die ersteren nach allen Seiten aus dem letzteren hervorspringen; in den meisten Krystallen bestand jedoch das äussere Individuum aus mehren, in paralleler Stellung verwachsenen Rudimenten, daher die Zusammensetzung, von oben betrachtet, wie die Horizontalprojection in Fig. 786 erschien.

Ausser diesem herrschenden Gesetze findet sich am Tetartin auch das Gesetz: Zwillingsaxe die Hauptaxe, in ähnlicher Weise verwirklicht wie am Orthoklas; indess sind die nach diesem Gesetze verwachsenen Krystalle in der Regel schon nach dem ersten

Digitized by Google

Gesetze zusammengesetzt, so dass ein Zwilling wie Fig. 783 mit einem zweiten Zwillinge der Art verbunden ist.

§. 669.

Zwillinge des Periklines.

Am Periklin (bekanntlich eine von Breithaupt fixirte Species der Feldspathfamilie) kommen Zwillinge nach dem ersten und zweiten der in §. 667 erwähnten Gesetze vor.

Die gewöhnlichsten Krystalle sind der in Fig. 782 abgebildeten Combination des Tetartines sehr ähnlich; denkt man sich dazu noch das Prisma $\infty P'3$ (*z*), so erscheinen die nach dem ersten Gesetze: Zwillingsaxe die Normale von $\infty\breve{P}\infty$, gebildeten Zwillinge wie Fig. 787; die Flächen *P* und *P*′ bilden aus- und einspringende Winkel von 173° 22′.

Die nach dem zweiten Gesetze: Zwillingsaxe die Makrodiagonale, Zusammensetzungsfläche die Basis, gebildeten Zwillinge, Fig. 788, sind sehr ausgezeichnet; beide Individuen erscheinen nämlich mit ihren oberen Flächen *P* verwachsen, während die hinteren Flächen *T* und *l* des einen Individuums mit den vorderen Flächen *l* und *T* des anderen zusammenstossen, die brachydiagonalen Flächen *M* aber auf der einen Seite einen einspringenden, auf der andern Seite einen ausspringenden Winkel von 173° 22′ hervorbringen, wodurch diese Zwillinge ganz besonders auffallend werden.

Am Labrador finden sich dieselben beiden Gesetze verwirklicht; seine derben blätterigen Massen sind gewöhnlich aus lauter dünnen, lamellaren Individuen zusammengesetzt, deren Flächen 0P oder $\infty\breve{P}\infty$ aus- und einspringende Winkel von 171° hervorbringen.

Dritter Abschnitt.

Von der Messung der Krystallwinkel.

Erstes Capitel.

Carangeaus Goniometer.

§. 670.

Verschiedene Arten der Goniometer.

Aus den, im ersten Abschnitte der angewandten Krystallographie dargestellten Unregelmässigkeiten in der Ausbildung der Krystalle, und aus der in §. 559 hervorgehobenen Thatsache, dass die Kanten- und Flächenwinkel die einzigen in der Erscheinung constanten Begränzungselemente sind, ergiebt sich von selbst die Regel, dass nur in diesen Winkeln die Beobachtungselemente gesucht werden dürfen, auf welche die Berechnung der Krystallformen zu gründen ist. Weil aber die Messung der ebenen Winkel, theils wegen der Kleinheit der Flächen, theils wegen der oft sehr unvollkommenen Ausbildung der Kantenlinien, theils auch wegen der schwierigen Application eines dazu geeigneten Instrumentes, nur sehr unzuverlässige Resultate liefern würde, so bilden die Kantenwinkel den eigentlichen Gegenstand unsrer Messungen. Die Methoden, nach welchen, und die goniometrischen Instrumente, mittels welcher diese Messungen auszuführen, sind jedoch verschieden, je nachdem eine grössere oder geringere Genauigkeit gefordert wird, und die Beschaffenheit des Krystalls mehr oder weniger vollkommen ist. Sind nämlich die Krystalle klein und ihre Flächen eben und stark glänzend, so bedient man sich der Reflexionsgoniometer; im Gegentheile der Contactgoniometer; wiewohl auch im letzteren Falle die ersten Goniometer anwendbar wer-

Digitized by Google

den, wenn nur die Krystalle nicht gar zu gross und die Flächen wenigstens stellenweis eben sind, weil man dem Mangel des spiegelnden Glanzes dadurch abhelfen kann, dass man kleine Lamellen aus Spiegelglas mit etwas Terpentin auf den Krystallflächen befestigt. Da man sowohl für die Contact- als Reflexionsgoniometer verschiedene Constructionen in Vorschlag und Ausführung gebracht hat, so werden wir nur die beiden gebräuchlichsten und den Bedürfnissen der Mineralogie angemessensten Instrumente der Art, nämlich das Carangeau'sche Contactgoniometer und das Wollastonsche Reflexionsgoniometer in Betrachtung ziehen *).

§. 671.

Carangeau's Goniometer.

Denken wir uns zwei Lineale um eine auf ihren beiderseitigen Ebenen rechtwinklige Axe so verbunden, dass sie sich um diese Axe drehen können, so werden wir mittels dieses einfachen Apparates den Neigungswinkel je zweier hinlänglich ebener und ausgedehnter Krystallflächen abnehmen können, indem wir das eine Lineal mit seiner hohen Kante oder Randfläche auf eine der Krystallflächen dergestalt aufsetzen, dass sich beide Flächen möglichst genau decken, während seine Seitenfläche rechtwinklig auf der Kantenlinie ist; und hierauf bei unveränderter

*) Ueber Adelmans Contactgoniometer, über Baumgartners Goniometer, welches halb ein Reflexions-, halb ein Contactgoniometer ist, über Studers, Breithaupts, Munkes, Rudbergs u. a. Goniometer vergl. man Gilberts und Poggendorffs Annalen, so wie Schweiggers Jahrbücher. Ganz neulich hat v. Riese ein Goniometer vorgeschlagen, welches wegen seiner höchst zusammengesetzten Construction wohl nur zu solchen Messungen zu empfehlen seyn dürfte, die für sehr feine physikalische Untersuchungen dienen sollen.

Digitized by Google

Stellung des ersten Lineales das zweite Lineal um seine Axe drehen, bis sich seine hohe Kante und die andere Krystallfläche gleichfalls decken. Die einander zugewendeten Seitenflächen der Lineale repräsentiren nämlich bei dieser Lage die Normalebene der Kante (§. 33) und die hohen Kanten oder Randflächen der Lineale die Durchschnittslinien dieser Ebene mit den Krystallflächen, folglich der Neigungswinkel beider Lineale den Neigungswinkel der Kante selbst. Entfernt man daher beide Lineale, ohne ihre Neigung zu ändern, und legt sie auf ein Papier, so kann man den abgenommenen Winkel unmittelbar auf dieses Papier transportiren, und dann mittels eines getheilten Halbkreises messen.

§. 672.

Fortsetzung.

Es lässt sich jedoch, zur grösseren Bequemlichkeit und zur Abkürzung der Operation, der zur Messung des transportirten Winkels dienende Halbkreis mit den Linealen selbst in eine unmittelbare und bleibende Verbindung bringen; eine Verbindung, welche in dem Contactgoniometer von Carangeau verwirklicht ist. Man denke sich nämlich mit dem einen Lineale *AB* Fig. 789 einen getheilten Halbkreis *ABD* unverrückbar verbunden, dessen Mittelpunct in *C* und dessen Durchmesser eine mit den Kanten des Lineales parallele Linie *aCb*, so dass die Puncte 0° und 180° in diese Linie fallen; hierauf das zweite Lineal *EF* (die bewegliche Alhidade) in demjenigen Theile, welcher auf dem Limbus des Kreises aufliegt, nach einer durch den Punct *C* seinen Kanten parallel gezogenen Linie ausgeschnitten, und zu einem dünnern Rande zugeschärft; so wird dieser Rand den jedesmaligen Neigungswinkel beider Lineale auf dem Limbus des Halbkreises unmittelbar abschneiden. Dies

Digitized by Google

ist die wesentliche Einrichtung des Carangeau'schen Goniometers.

§. 673.

Fortsetzung.

Weil jedoch die zu messenden Krystalle oft klein und aufgewachsen sind, in diesem Falle aber die zur Anlegung auf die Krystallflächen dienenden Schenkel *CA* und *CF* beider Lineale bei unveränderter Länge die Abnahme des Winkels unmöglich machen würden, so ist es nöthig, diese Schenkel beliebig verkürzen zu können. Zu diesem Zwecke ist der Halbkreis zunächst nur mit einer bis etwas über den Mittelpunct reichenden Metallplatte *MC*, Fig. 790, (dem Alhidadenträger) verbunden, welche in *C* die Drehungsaxe und in *M* einen dieser Axe vollkommen gleichen, und genau in der Linie 0° — 180° stehenden Zapfen, ausserdem auch noch die Spreize *CN* trägt, welche zur Unterstützung des frei auslaufenden Halbkreises dient. Die eine Alhidade ist nun in demjenigen Schenkel, welcher mit der Krystallfläche in Contact gebracht wird, die andere Alhidade in beiden Schenkeln ihrer Mittellinie parallel ausgeschnitten, so dass sie sich an dem Zapfen der Drehungsaxe mit Widerstand hin und her schieben lassen. Die eine Alhidade wird nur durch den Zapfen in *C* fixirt; sie lässt sich daher drehen und zugleich in ihrem einen Schenkel bis auf *FG* verkürzen; die andere Alhidade wird durch beide Zapfen in *C* und *M* fixirt; sie ist daher nur in der Richtung der Linie 0° — 180° verschiebbar, kann aber durch diese Verschiebung in ihrem einen Schenkel bis auf *AH* verkürzt werden.

Wenn der zu messende Krystall auf einer Druse aufgewachsen ist, so verhindert oft das frei vorstehende Ende des Halbkreises die Annäherung der Alhidaden; um diesem Uebelstande abzuhelfen, ist die

Spreize *CN* gleichfalls um die Axe beweglich, so dass sie von dem Halbkreise losgeschraubt und auf die Seite geschlagen werden kann; der Halbkreis selbst aber im Theilpuncte 90° zerschnitten, und der zweite Quadrant an den ersten mittels eines Charniers befestigt, so dass auch er zurückgelegt werden kann. Durch diese Einrichtung wird die Anlegung der beiden Messungsschenkel in vielen Fällen möglich, in welchen sie ohne selbige nicht Statt finden könnte.

§. 674.

Regeln bei dem Gebrauche des Carangeau'schen Goniometers.

Bei dem Gebrauche des Carangeau'schen Goniometers müssen folgende Bedingungen erfüllt seyn, wenn die Resultate einigen Werth haben sollen:

1) Die Krystallflächen müssen eben im Grossen (wenn auch nicht glatt) und von einiger Ausdehnung seyn; das Letztere ist um so nöthiger, wenn beide Flächen nicht unmittelbar zusammentreffen, sondern durch zwischenliegende Flächen getrennt sind, wie solches häufig in Combinationen Statt findet.

2) Die Ebene des Instrumentes muss genau rechtwinklig auf der Kantenlinie oder auf beiden Kantenflächen stehen; daher ist es sehr gut, wenn die Kantenlinie wirklich ausgebildet ist, weil nach ihr die Lage des Instrumentes am sichersten beurtheilt werden kann.

3) Die Alhidaden müssen mit ihren Randflächen genau auf den Krystallflächen anliegen, und dieselben in möglichst vielen Puncten berühren. Dies erreicht man am besten, indem man das Instrument und den Krystall gegen das Licht hält, und es dahin bringt, dass gar kein oder möglichst wenig Licht zwischen den Alhidaden und den Krystallflächen durchgeht.

Digitized by Google

Weil übrigens der Genauigkeit der Operation und der Richtigkeit des Instrumentes ungeachtet die mittels desselben erhaltenen Resultate nur auf $\pm \frac{1}{4}$ Grad zuverlässig sind, so dürfte eine weitere Eintheilung des Halbkreises als in halbe Grade kaum einigen Nutzen gewähren, indem man dann $\frac{1}{8}$ oder $\frac{1}{10}$ eines Grades ziemlich sicher schätzen, und sich durch öftere Wiederholung der Messung ein der Wahrheit genähertes Mittel verschaffen kann.

Zweites Capitel.

Wollastons Goniometer.

§. 675.

Bedürfniss eines genaueren Instrumentes.

Weit vorzüglicher als die Contactgoniometer sind die Reflexionsgoniometer wegen der grösseren Genauigkeit ihrer Resultate sowohl als auch wegen ihrer allgemeineren Brauchbarkeit. Für sehr kleine Krystalle, welche doch nach §. 559 die regelmässigsten und daher zu den Messungen geeignetsten sind, so wie für solche Kanten, deren Flächen klein und durch mehre zwischenliegende Flächen abgesondert sind, verliert nämlich das Carangeau'sche Goniometer seine Brauchbarkeit, weil in beiden Fällen durch die Unsicherheit seiner Manipulation sehr fehlerhafte Resultate herbeigeführt werden können. Ueberhaupt aber lässt sich mit ihm selbst bei günstiger Beschaffenheit des Krystalls kaum eine grössere Genauigkeit als bis auf $\frac{1}{4}$ Grad erreichen, so dass man auf die mit selbigem erhaltenen Resultate die Berechnung der Grunddimensionen einer Krystallreihe nicht wohl gründen kann. Die Herstellung eines andern, zu genaueren Messungen geeigneten Instrumentes war daher in

Digitized by Google

mehrfacher Hinsicht ein grosses Bedürfniss der Wissenschaft, und diesem Bedürfnisse ist durch Wollastons Reflexionsgoniometer vollkommen abgeholfen worden.

§. 676.

Grundlage der Messungen mittels Reflexion des Lichtes.

Um den Gebrauch dieses vortrefflichen Instrumentes in seiner ganzen Einfachheit aufzufassen, wollen wir sogleich die vollkommene Erfüllung derjenigen Bedingungen voraussetzen, auf welche es dabei ankommt, und welche freilich *in praxi* zum Theil nur näherungsweise zu erfüllen sind, aber auch nur näherungsweise erfüllt zu seyn brauchen.

Es sey *MNR*, Fig. 791, die Ebene, und *C* der Mittelpunct eines in zweimal 180° eingetheilten, mit einem Nonius versehenen, und um seine Axe drehbaren Kreises. Die zu messende Kante werde von zwei ebenen und gut spiegelnden Flächen gebildet, und der Krystall selbst sey dergestalt entweder auf dem Kreise unmittelbar, oder auf einem an dessen verlängerter Axe angebrachten Krystallträger befestigt, dass die Kantenlinie mit der geometrischen Axe des Kreises zusammenfällt. Diese letztere Bedingung lässt sich in die zwei auflösen, dass die Kantenlinie

1) normal auf der Ebene des Kreises, oder justirt, und
2) centrisch in Bezug auf die Peripherie des Kreises, oder centrirt

sey. Sind beide Bedingungen erfüllt, so werden die Projectionen beider Flächen auf die Ebene des Kreises durch zwei Linien wie *CD* und *CE* dargestellt.

Von irgend einem in der verlängerten Ebene des Kreises befindlichen, aber sehr entfernten Objecte *A* sollen Lichtstrahlen auf die Krystallfläche *CD* fallen; der auf das äusserste Element dieser Fläche in *C*

auffallende Strahl wird nach bekannten Gesetzen reflectirt, und verschafft dem in *O* befindlichen Auge die Wahrnehmung des Spiegelbildes von *A* nach der Richtung *CB*. Man lasse nun das Auge in der Richtung des reflectirten Strahles, und drehe den Kreis nach der Richtung *MN*, bis die zweite Krystallfläche *CE* genau in dieselbe Lage kommt, welche die erste Fläche *CD* vorher hatte. Sobald sie in diese Lage gekommen, wird die Reflexion des Strahles *AC* von ihrem äussersten Elemente in *C* offenbar eben so erfolgen, wie vorher von dem äussersten Elemente der ersten Fläche; d. h. das in *O* befindliche Auge wird wiederum das Spiegelbild von *A* in der Richtung *CB* erblicken; und umgekehrt, sobald das in der Richtung des ersten reflectirten Strahles verharrende Auge auf dem, zunächst an der Kantenlinie anliegenden, Elemente der zweiten Fläche das Bild des Objectes *A* erblickt, wird diese zweite Fläche genau in die vorherige Lage der ersten Fläche gelangt seyn. Der hierzu erforderliche Drehungswinkel aber wird nothwendig das Supplement des Neigungswinkels beider Flächen seyn müssen.

Hat man also vor dem Anfange der Operation einen der beiden Nullpuncte des Kreises auf den Nullpunct des Nonius eingestellt, und sind die Grade in derselben Richtung numerirt, nach welcher die Drehung Statt fand, so wird nach erfolgter Drehung der Nonius auf dem Limbus unmittelbar den Neigungswinkel beider Flächen anzeigen.

§. 677.

Fortsetzung.

Die im vorigen §. erörterte Messungsmethode beruht vorzüglich auf folgenden Bedingungen:

1) dass die Kantenlinie justirt ist;

2) dass sie centrirt ist;

Digitized by Google

3) dass der reflectirte Strahl bei beiden Beobachtungen genau dieselbe Lage hat;
4) dass das Object und der Krystall in einer und derselben Parallelebene des Kreises liegen;
5) dass die Reflexion beide Male dicht an der Kantenlinie Statt findet.

Die erste Bedingung ist jedenfalls unerlässlich, und durch einen einfachen Stellungsapparat mit hinreichender Genauigkeit zu erfüllen.

Die zweite Bedingung muss um so genauer erfüllt werden, je geringer die Entfernung des Objectes ist, während bei sehr grosser Entfernung desselben eine ziemliche Excentricität der Kantenlinie keinen erheblichen Fehler zur Folge hat. Dies ist ein sehr vortheilhafter Umstand, weil eine ganz genaue Centrirung der Kantenlinie nur durch zusammengesetzte Apparate erreicht werden kann, und in manchen Fällen fast unmöglich ist.

Die dritte Bedingung kann auf zwei verschiedene Arten erfüllt werden:

a) indem man das reflectirte Bild durch ein Fernrohr beobachtet, dessen Axe der Ebene des Kreises parallel ist;
b) indem man ein jenseits des Krystalles in der Richtung des ersten reflectirten Strahles befindliches fernes Object *B* fixirt, so dass bei beiden Beobachtungen das reflectirte Bild des Objectes *A* mit dem direct gesehenen Objecte *B* coincidirt.

Die vierte und fünfte Bedingung brauchen nicht alle Mal erfüllt zu seyn, indem die Lage und Entfernung der Objecte *A* und *B* in Bezug auf die Ebene des Kreises und den Krystall so gewählt werden können, dass sich die eine dieser Bedingungen modificiren, und die andere gänzlich aufheben lässt.

Die Reflexionsgoniometer von Malus und Wollas-

Digitized by Google

ton sind wesentlich nur dadurch unterschieden, dass die Lage des reflectirten Strahles in ersterem durch ein Fernrohr, in letzterem durch die Coincidenz des gespiegelten Bildes mit einem direct gesehenen Objecte fixirt wird. Da aber die allgemeine Theorie beider Instrumente dieselbe ist, so wollen wir bei ihrer Entwicklung zunächst auf das Wollastonsche Goniometer Rücksicht nehmen, und dabei den von Kupffer in seiner gekrönten Preisschrift eingeschlagenen Weg verfolgen.

§. 678.

Entwurf der Theorie des Reflexionsgoniometers.

Man setze, die Drehungsaxe des Instrumentes sey die Axe der z, und die Ebene des Kreises die Coordinatebene (xy).

Es seyen ferner

x, y und z die Coordinaten des reflectirenden Punctes P auf der ersten Krystallfläche;

x', y' und z' die Coordinaten des durch Reflexion gesehenen Objectes P′;

x'', y'' und z'' die Coordinaten des direct gesehenen Objectes P″.

Da der einfallende Lichtstrahl durch die Puncte P und P′, der reflectirte Strahl durch die Puncte P″ und P geht, so erhält man leicht die sie bestimmenden Gleichungen.

Da ferner die erste Krystallfläche in ihrer ersten Lage nicht nur rechtwinklig auf der Ebene beider Strahlen PP′ und PP″, sondern auch gegen beide gleich geneigt ist, oder, mit andern Worten, da die erste Krystallfläche diejenige Ebene durch den Punct P ist, in welcher alle durch denselben Punct gehende Linien von gleicher Neigung gegen PP′ und PP″ lie-

Digitized by Google

gen, so erhält man auch für die erste Krystallfläche in ihrer ersten Lage eine Gleichung

$$AX + BY + CZ = D$$

Diese Fläche kommt durch die Drehung des Kreises durch den Winkel W in ihre zweite Lage, für welche sich eine Gleichung

$$A'X + B'Y + C'Z = D'$$

bestimmt.

Was die zweite Fläche betrifft, so wird ihre Gleichung, unter Voraussetzung einer so bedeutenden Entfernung der Objecte, dass die Dimensionen und die Excentricität des Krystalles dagegen sehr klein sind, identisch mit der Gleichung der ersten Krystallfläche in der ersten Lage, also wieder

$$AX + BY + CZ = D$$

Man findet nun leicht den Cosinus des Neigungswinkels V beider Krystallflächen, und endlich aus der Gleichung

$$\cos V = \cos W$$

die Bedingungen, welche erfüllt seyn müssen, damit der Drehungswinkel des Instrumentes dem wirklichen Winkel der Krystallflächen gleich sey.

Dies ist der allgemeine Weg, welchen Kupffer bei der Entwicklung der Theorie des Wollastonschen Reflexionsgoniometers verfolgt hat.

§. 679.

Ausführung der Theorie.

Wir wollen nun den im vorigen §. angegebenen Gang der Theorie specieller verfolgen.

Da der Lichtstrahl PP′ durch die Puncte P und P′ geht, so werden seine Gleichungen:

$$-\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = \frac{M}{ab}$$

$$\frac{Z}{c} - \frac{X}{a} = \frac{N}{ac}$$

wenn $M = xy' - x'y$, $N = xz' - x'z$
und $a = x - x'$, $b = y - y'$, $c = z - z'$

Da der Lichtstrahl PP″ durch die Puncte P und P″ geht, so werden seine Gleichungen

$$-\frac{X}{a'} + \frac{Y}{b'} = \frac{M'}{a'b'}$$

$$\frac{Z}{c'} - \frac{X}{a'} = \frac{N'}{a'c'}$$

wenn $M' = xy'' - x''y$, $N' = xz'' - x''z$
und $a' = x - x''$, $b' = y - y''$, $c' = z - z''$

Man setze nun, irgend eine durch den Punct P gehende Linie, welche zugleich gegen beide Lichtstrahlen gleich geneigt ist, habe die Gleichungen:

$$\frac{X}{\alpha} + \frac{Y}{\beta} = 1, \text{ und } \frac{Z}{\gamma} + \frac{X}{\delta} = 1$$

so wird, weil sie durch *P* geht,

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{Y-y}{X-x}, \quad \frac{\gamma}{\delta} = -\frac{Z-z}{X-x}$$

Sind nun *K* und *K'* ihre Neigungswinkel gegen PP′ und PP″, so wird, wenn

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = D$$

$$\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2} = D'$$

$$\text{und} \quad \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\delta^2}} = \varDelta \quad \text{ist,}$$

$$\cos K = \frac{a - \frac{\beta}{\alpha}b - \frac{\gamma}{\delta}c}{\varDelta D}$$

$$\cos K' = \frac{a' - \frac{\beta}{\alpha}b' - \frac{\gamma}{\delta}c'}{\varDelta D'}$$

Für jede solche Linie wird aber gefordert, dass:

$$\cos K = \cos K'$$

Substituirt man also für $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\gamma}{\delta}$ ihre vorher gefundenen Werthe, so erhält man für alle mögliche

Linien der Art, oder, was dasselbe ist, für die erste Krystallfläche in ihrer ersten Lage, als diejenige Ebene, in welcher alle jene Linien enthalten sind, folgende Gleichung:

$$AX + BY + CZ = Ax + By + Cz$$

wenn nämlich

$$A = Da' - D'a$$
$$B = Db' - D'b$$
$$C = Dc' - D'c$$

wobei zu bemerken, dass, nach §. 14, D die Entfernung des reflectirten, und D' die Entfernung des direct gesehenen Objectes von der Axe des Kreises ist.

§. 680.

Fortsetzung.

Wären nun A, B, C, x, y und z absolut constante Grössen, so würde die Lage der Krystallfläche durch die Bedingungen der Reflexion vollständig bestimmt seyn, weil dann die gefundene Gleichung nur eine Ebene im Raume fixiren könnte. Allein streng genommen, lässt sich jener constante Charakter von A, B und C, x, y und z nicht allgemein aussagen, da die Ausdehnung der reflectirenden Krystallfläche die Reflexion in verschiedenen ihrer Puncte gestattet, und folglich die Coordinaten x, y und z, mithin auch die Grössen A, B und C, als Functionen dieser Coordinaten, veränderliche Grössen sind. Indess wird ihre Veränderlichkeit in sehr enge Gränzen eingeschränkt, sobald der Krystall und also auch die Krystallfläche, als der Spielraum der Reflexion, sehr klein in Verhältniss zu den Entfernungen der Objecte sind; weshalb sich auch aus diesem Grunde kleine Krystalle vorzugsweise zu den Messungen eignen.

Ist also die Krystallfläche im Verhältnisse zu den

Digitized by Google

übrigen die Reflexion bedingenden Elementen so klein, dass die durch Verrückung des Auges herbeigeführten Variationen der Coordinaten x, y und z ohne Fehler vernachlässigt werden können, so wird die Gleichung der ersten Krystallfläche in ihrer ersten Lage

$$(Da'-D'a)X+(Db'-D'b)Y+(Dc'-D'c)Z=Const.$$

oder auch

$$AX+BY+CZ=Const.$$

§. 681.

Fortsetzung.

Wir haben nun die Gleichung der ersten Krystallfläche in ihrer zweiten Lage, also nach der Drehung des Kreises zu bestimmen. Es sey der am Limbus abgelesene Drehungswinkel $= W$, so wird die Gleichung der Intersection der ersten Krystallfläche mit der Coordinatebene (xy), welche vor der Drehung

$$AX+BY=Const.$$

war, nach der Drehung

$$(A\cos W-B\sin W)X+(A\sin W+B\cos W)Y=Const.$$

und daher, wenn wir

$$A\cos W-B\sin W=A'$$
$$A\sin W+B\cos W=B'$$

setzen

$$A'X+B'Y+CZ=Const.$$

die Gleichung der ersten Krystallfläche in ihrer zweiten Lage.

Die Gleichung der zweiten Krystallfläche ist unter den Voraussetzungen,

1) dass die Coordinaten x_1, y_1 und z_1 ihres reflectirenden Punctes durch die Verrückung des Auges nur sehr kleine und ohne Fehler zu vernachlässigende Veränderungen erleiden;
2) dass dieselben Coordinaten mit den Coordinaten x, y und z ohne Fehler vertauscht werden kön-

nen, oder dass die Excentricität der gemessenen Kante eine sehr kleine und gegen die Entfernungen D und D' zu vernachlässigende Grösse ist, identisch mit der Gleichung der ersten Krystallfläche in ihrer ersten Lage, also

$$AX + BY + CZ = Const.$$

Da nun allgemein der Cosinus des Neigungswinkels V zweier durch die Gleichungen

$$AX + BY + CZ = 0$$
$$A'X + B'Y + CZ = 0$$

gegebener Flächen nach bekannten Regeln (indem man in der Formel des §. 22 A, B und C statt $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{c}$ setzt) den Werth

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + C^2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C^2}}$$

hat, so erhalten wir, wenn wir für A' und B' ihre Werthe als Functionen von A und B substituiren,

$$\cos V = \frac{(A^2 + B^2)\cos W + C^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Es ist aber W der am Limbus des Kreises abgelesene Drehungswinkel, V der wahre Neigungswinkel beider Krystallflächen; soll also die Messung den wahren Winkel angeben, so wird, ausser den schon gemachten Voraussetzungen der geringen Excentricität der Kante, der geringen Ausdehnung der Krystallflächen, und der grossen Entfernung der Objecte, noch die Bedingung

$$C = 0$$

erfüllt werden müssen, weil nur dann

$$V = W$$

seyn kann.

§. 682.

Bedingungen für die Richtigkeit der Messung.

Wir lassen es noch dahingestellt, wie $C = 0$ wer-

Digitized by Google

den kann, und begnügen uns einstweilen mit dem Resultate, dass es $= 0$ werden muss. Aus den Gleichungen der Krystallflächen verschwindet durch diese Forderung das mit Z behaftete Glied; sie werden also von der Axe der z unabhängig, und die ihnen entsprechenden Krystallflächen selbst der Drehungsaxe des Instrumentes parallel oder rechtwinklig auf der Ebene des Kreises. Welche Folgerungen sich also noch aus der Bedingung $C = 0$ für die gegenseitige Lage der Objecte und des Krystalles ergeben mögen, so wird doch jedenfalls für die zu messende Kante gefordert, dass selbige genau justirt sey; §. 676.

Was aber die Lage der Objecte betrifft, so werden wir die für sie gültigen Bestimmungen gleichfalls aus der Bedingung $C = 0$ ableiten können, wenn wir statt C seinen Werth setzen, wodurch dieselbe Bedingung die Form

$$D(z - z'') - D'(z - z') = 0$$

gewinnt. Diese Gleichung wird realisirt:

1) wenn $z = z' = z''$; d. h. wenn der Krystall und die beiden Objecte in einer Parallelebene des Kreises liegen, weil die Ebene desselben als die Coordinatebene (xy) angenommen wurde; §. 678;
2) wenn $D = D'$, und zugleich $z' = z''$; d. h. wenn beide Objecte nicht nur vom Krystall, sondern auch von der Ebene des Kreises gleich weit entfernt sind; denn z' und z'' sind ihre Abstände von der Ebene des Kreises, D und D' ihre Entfernungen von dem Mittelpuncte desselben, wofür man den Ort des Krystalles setzen kann.

Die Bedingung $z = z' = z''$ wird nicht immer zu erfüllen seyn, da sie zum Theil von Localverhältnissen abhängig ist; für das Malus'sche Goniometer findet sie jedenfalls Statt.

Die Bedingungen $D = D'$ und $z' = z''$ dagegen

Digitized by Google

sind durch ein einfaches Hülfsmittel jedenfalls mit hinreichender Genauigkeit zu erfüllen, und man wird sich daher um so mehr an sie zu halten haben, weil durch die Gleichheit der Entfernungen D und D' zugleich ein anderer sehr wichtiger Vortheil gewonnen wird. Wir werden nämlich weiter unten sehen, dass der aus dem Spielraume der Reflexion entspringende Fehler (§. 680) verschwindet, wenn beide Objecte gleich weit entfernt sind. Man kann also, sobald diese Bedingung erfüllt ist, grosse Krystalle eben so wohl als kleine Krystalle der Messung unterwerfen, vorausgesetzt, dass die Excentricität der Kante so klein gemacht wird, wie es die übrigen Bedingungen fordern.

Das einfache Mittel zur Realisirung der Bedingungen $D = D'$ und $z' = z''$ besteht, wie Kupffer gezeigt hat, in der Anwendung eines kleinen horizontalen Planspiegels, in welchem man zugleich das reflectirte Bild des Objectes P′ beobachtet, während man dasselbe Object durch Reflexion von der Krystallfläche wahrnimmt. Dieses in dem Spiegel reflectirte Bild des ersten Objectes vertritt also die Stelle des zweiten Objectes, und beide Objecte sind nun vom Krystalle gleich entfernt zu achten, wenn nur das erste Object an und für sich sehr entfernt, und der Spiegel möglichst nahe am Krystalle ist.

§. 683.

Fortsetzung.

Fassen wir die in den vorhergehenden §§. gefundenen Resultate nochmals zusammen, so erhalten wir folgende Regeln für den Gebrauch des Wollastonschen Goniometers;

1) Die Kantenlinie der zu messenden Kante muss genau justirt, oder der Axe des Instrumentes parallel gemacht werden.

Digitized by Google

2) Die Kantenlinie darf nicht zu excentrisch seyn, und muss daher wenigstens approximativ, und zwar um so genauer centrirt werden, je geringer die Entfernung der Objecte ist. Sind beide Objecte, oder ist auch nur eines sehr nahe, so kann schon eine geringe Excentricität bedeutende Fehler zur Folge haben *).

3) Die Objecte müssen vom Krystalle ziemlich weit, und, wo möglich, beide gleich weit entfernt seyn; denn durch grosse Entfernung wird der aus der Excentricität der Kantenlinie, durch gleiche Entfernung der aus dem Spielraume der Reflexion entstehende Fehler vernichtet.

4) Die Objecte müssen entweder mit dem Krystalle in einer und derselben Parallelebene des Kreises liegen, oder sie müssen beide von der Ebene des Kreises gleich weit abstehen.

5) Lässt sich die Gleichheit der Entfernungen beider Objecte vom Krystalle nicht realisiren, so muss der Krystall klein seyn, und die Reflexion nahe an der Kantenlinie Statt finden.

§. 684.

Beschreibung des Wollastonschen Goniometers.

Das Wollaston'sche Reflexionsgoniometer besteht

---

*) Es scheint hiernach unvortheilhaft, wie oft geschieht, zu dem direct gesehenen Objecte eine auf dem Tische oder auf der Fussplatte des Goniometers gezogene Linie zu wählen, weil dann nicht nur eine höchst genaue Centrirung gefordert wird, was immer schwierig ist, sondern auch die Reflexion dicht an der Kantenlinie erfolgen muss, was in vielen Fällen ganz unmöglich, jedenfalls aber wegen der Beugung des Lichtes nachtheilig seyn wird, wenn die vom zweiten Objecte kommenden Lichtstrahlen dicht über der Kante beobachtet werden.

Digitized by Google

wesentlich aus zwei verschiedenen Theilen, dem eingetheilten Kreise, und dem Krystallträger.

Der Kreis *mm* ist, zur bequemeren Ablesung, nicht auf seiner Fläche, sondern auf seiner hohen Kante getheilt, wie dies Fig. 792 zeigt; die Theilung geht gewöhnlich bis auf halbe Grade, indem ein Nonius die einzelen Minuten bestimmt. Die Axe des Kreises ruht auf dem Rücken eines messingenen Bockes, dessen Füsse in eine hölzerne oder messingene Fussplatte dergestalt eingelassen sind, dass die Axe selbst der Ebene der Fussplatte genau parallel wird. Diese Fussplatte ruht auf drei Stellschrauben, und trägt eine Libelle, mittels welcher sie selbst horizontal, und folglich der Kreis vertical gestellt werden kann. Auf der Rückseite des Kreises endet die Axe in eine zur leichteren Drehung dienende Scheibe *tt*.

An den einen Fuss des Bockes ist der Nonius *hh*, an den andern eine Feder angeschraubt, deren umgebogenes Ende *k* sich an den ersten Fuss anlegt, und den Kreis bei seiner Drehung nach der einen Richtung arretirt, sobald die Puncte 0° oder 180° der Theilung mit dem Nullpuncte des Nonius zusammenfallen; während es dagegen nachgiebt und überspringt, wenn der Kreis nach der andern Richtung gedreht wird, und jene Puncte den Nullpunct des Nonius passiren. Das beim Ueberspringen der Feder erregte Geräusch zeigt in letzterem Falle dem Beobachter den Uebergang aus einem Halbkreise in den andern an.

§. 685.

Fortsetzung.

Die Axe des Kreises ist ihrer Länge nach durchbohrt, um die Axe *aa* des Krystallträgers aufzunehmen, welche sich in ihr mit Widerstand drehen lässt, so dass bei ihrer Drehung der Kreis unverrückt bleibt, während sie dagegen allen Drehungen des Kreises

Digitized by Google

mit unterworfen ist. Sie trägt an ihrem einen Ende die zur leichteren Drehung dienende Scheibe *ss*, am andern Ende den Bogen *bc*, welcher an seinem Ende so durchbohrt ist, dass die Axe des Bohrloches auf der Axe des Krystallträgers rechtwinklig ist. Die Durchbohrung dient zur Aufnahme der Axe *d* eines zweiten Bogens *de*, welcher an seinem anderen Ende die cylindrische Hülse *e* trägt, deren Axe gleichfalls rechtwinklig auf der Axe *dc* und zugleich so gestellt ist, dass sie mit der Axe des Kreises ungefähr zusammenfällt, wenn der Bogen *de* in die Ebene des Bogens *bc* gestellt wird. Diese Hülse endlich nimmt den Stift *fg* auf, der sich mit Widerstand in ihr drehen, auch hin und her schieben lässt, und an seinem Ende in *g* gespalten ist, um eine kleine Platte von Messingblech einklemmen zu können.

Dies ist die sinnreiche Einrichtung des Reflexionsgoniometers, wie solche von dem genialen Erfinder dieses Instrumentes angegeben wurde. Mau hat mancherlei Veränderungen in der Einrichtung des Krystallträgers vorgeschlagen, welche besonders die Centrirung der Kante zum Zwecke haben, aber das an sich so einfache Instrument mehr oder weniger zusammengesetzt machen, ohne doch für seinen gewöhnlichen Gebrauch besondere Vortheile zu gewähren, weil bei gehöriger Entfernung der Objecte eine geringe Excentricität keine Fehler zur Folge hat, und eine ungefähre Centrirung immer aus freier Hand ohne besondere Apparate zu erreichen ist.

§. 686.

Gebrauch des Wollastonschen Goniometers.

Will man eine Messung mit Wollastons Goniometer vornehmen, so stellt man selbiges auf einen festen Tisch, einem Fenster gegenüber, durch welches man entfernte Gegenstände (z. B. eine Thurmspitze, einen

Digitized by Google

Schornstein oder den Giebel eines Hauses) beobachten kann, und bringt den Kreis in eine solche Lage, dass er möglichst genau vertical und ungefähr rechtwinklig auf der Ebene des Fensters ist. Auf die Platte *g* des Krystallträgers klebt man den Krystall mit etwas Wachs fest, so dass die Kantenlinie der zu messenden Kante der Axe *fg* ungefähr parallel wird, und dreht hierauf die Axe des Krystallträgers so lange, bis das nahe an den Krystall gehaltene Auge auf der einen Fläche das reflectirte Bild des Fensters erblickt. Durch zweckmässige Bewegungen des Metallstiftes *fg* und des Bogens *ed* sucht man es nun dahin zu bringen, dass die verticalen Leisten des Fensterkreuzes im Bilde gleichfalls vertical, oder die horizontalen Leisten horizontal erscheinen, wovon man überzeugt ist, wenn man die reflectirten Bilder mit den direct gesehenen Leisten zur Coincidenz bringen kann. Findet diese Coincidenz Statt, so ist die erste Krystallfläche justirt. Man sucht nun auch die zweite Krystallfläche nach derselben Methode zu justiren, was freilich oft einige Biegungen des Krystalles auf seiner Wachsunterlage erfordert, wodurch die Lage der ersten Fläche gewöhnlich gestört, und eine abermalige Bestimmung derselben nöthig gemacht wird. Sind endlich nach einigen Versuchen beide Flächen justirt worden, so ist ihre Kantenlinie der Axe des Instrumentes parallel und die wichtigste Bedingung der Messung in Erfüllung gebracht.

§. 687.

Fortsetzung.

Man öffnet nun das Fenster, um die von dem entfernten Objecte kommenden Lichtstrahlen ungehindert auf die Krystallfläche fallen zu lassen, bringt vor dem Goniometer einen künstlichen Horizont so an, dass in selbigem das Bild des Objectes von dem

Digitized by Google

dicht hinter dem Krystall befindlichen Auge gesehen werden kann, stellt den Kreis auf 0° ein (was die in §. 684 erwähnte Arretirung sehr leicht macht), und dreht nun die Axe des Krystallträgers so lange, bis das von der ersten Krystallfläche reflectirte Bild des Objectes mit seinem von dem Spiegel reflectirten Bilde zusammenfällt. Hierauf dreht man die Axe des Kreises (und mit ihr zugleich jene des Krystallträgers) bis dieselbe Coincidenz der Bilder bei der Reflexion von der zweiten Krystallfläche Statt findet. Der Winkel, welchen der Nonius auf dem Limbus des Kreises anzeigt, ist der gesuchte Neigungswinkel beider Krystallflächen.

Ist die Localität des Zimmers von der Art, dass man ein Gebäude mit mehren Fensterreihen zum *vis à vis* hat, so kann man das Bild der Kante eines Fenstersimses aus dem oberen Stockwerke mit der direct gesehenen Kante des Simses eines Parterrefensters, oder das Bild irgend einer oberen horizontalen Linie mit einer unteren horizontalen Linie des Gebäudes zur Coincidenz bringen, und dann den Spiegel entbehren, weil eine hinreichende Gleichheit der Entfernungen beider Objecte Statt findet.

Ist endlich die Kante ziemlich genau centrirt, so kann man auch, wenn das Goniometer in 20 und mehr Fuss Entfernung vom Fenster steht, das Bild einer oberen horizontalen Fensterleiste mit einer tieferen horizontalen Linie, z. B. mit dem Streifen der Lamperie an der Fensterbrüstung, in Contact bringen.

§. 688.

Messungen mit Repetition.

Weil durch das in den vorhergehenden §§. angegebene Verfahren alle in §. 683 aufgezählten Bedingungen erfüllt werden, so muss auch die Messung sehr nahe ein richtiges Resultat geben, vorausgesetzt,

Digitized by Google

dass das Instrument genau gearbeitet, die Operationen der Messung sorgfältig vollzogen worden, und die Krystallflächen gut spiegelnd sind. Weil jedoch, theils aus den Unvollkommenheiten des Instrumentes hinsichtlich der Theilung, Centrirung u. s. w., theils aus der Unvollkommenheit der Sinnesorgane, der mehr oder weniger günstigen Stimmung des Beobachters u s. w., eine Menge kleiner Fehler entspringen, deren Gewicht nur durch öftere Vervielfältigung der Beobachtung vermindert werden kann; so ist es gut, die Messung zu repetiren, und statt des Resultates einer Beobachtung das Mittel aus einer ganzen Reihe von Beobachtungen zu wählen *).

Zu einer solchen Repetition der Messungen ist nun das Goniometer von der oben angegebenen Einrichtung sehr wohl geeignet. Nachdem nämlich der erste Winkel W_{I} abgelesen und aufgezeichnet worden, dreht man die Axe des Krystallträgers (ohne jene des Kreises zu bewegen) rückwärts, bis die Coincidenz der Bilder wieder für die erste Krystallfläche Statt findet; dann dreht man den Kreis selbst in derselben Richtung wie das erste Mal, bis dieselbe Coincidenz auch für die zweite Fläche eintritt, und liest einen zweiten Winkel W_{II} ab. Dasselbe Verfahren wiederholt man, so oft man will, und erhält dadurch eine Reihe abgelesener Winkel W_{I}, W_{II}, W_{III} ..... etc. Jeden Winkel in dieser Reihe, vor dessen Ablesung das Ueberspringen der den Kreis arretirenden Feder erfolgt, unterstreicht man, weil seine Ablesung in einen neuen Halbkreis fällt, was bei der Summirung der Winkel berücksichtigt werden muss.

*) Wie man auf dergleichen Reihen von Beobachtungen die Methode der kleinsten Quadrate und andere Kunstgriffe des Probabilitätscalculs anwenden kann, zeigte Gilbert in seinen Annalen 1823, IX, und Kupffer in seiner gekrönten Preisschrift.

Digitized by Google

Gesetzt, der beobachtete Winkel sey nahe $= 130°$, man habe folgende Reihe von Winkeln abgelesen,

$$\begin{matrix} W_{I} & W_{IV} & W_{VII} \\ W_{II} & W_{V} & W_{VIII} \\ W_{III} & W_{VI} & W_{IX} \end{matrix}$$

und wolle sich mit diesen neun Beobachtungen begnügen, so bildet man zunächst folgende Winkel:

$$\begin{aligned} 180° - W_{I} &= V_{I} \\ W_{I} - W_{II} &= V_{II} \\ W_{II} - W_{III} &= V_{III} \\ W_{III} + 180° - W_{IV} &= V_{IV} \\ W_{IV} - W_{V} &= V_{V} \\ &\vdots \\ W_{VIII} - W_{IX} &= V_{IX} \end{aligned}$$

um sich durch die nahe Uebereinstimmung der Werthe V_{I}, V_{II} u. s. w. davon zu überzeugen, dass kein grober Beobachtungsfehler, eine falsche Ablesung, oder wohl gar eine Verrückung der unrechten Axe Statt gefunden habe. Die einfache Regel zur Bestimmung der Winkel V_{I}, V_{II} u. s. w. ist, dass für je zwei Ablesungen, zwischen welchen der Uebergang aus einem Halbkreise in den andern Statt findet, der Winkel der ersten Ablesung zu dem Supplemente der zweiten Ablesung addirt werden muss, während für alle in einen und denselben Halbkreis fallende Ablesungen die Differenzen je zweier auf einander folgender Winkel zu nehmen sind.

Um nun endlich das gewünschte Mittelresultat V zu erhalten, würde man eigentlich die Winkel V_{I}, V_{II} .... zu addiren, und ihre Summe durch ihre Anzahl zu dividiren haben; allein man sieht leicht, dass, gleich wie in unserm besonderen Falle

$$V_{I} + V_{II} + \ldots\ldots V_{IX} = 3 . 180° - W_{IX}$$

so auch allgemein

$$V_{I} + V_{II} + \ldots\ldots V_{N} = m . 180° - W_{N}$$

Digitized by Google

wird, wenn N die Anzahl der Beobachtungen, W_N die letzte der Ablesungen, und m die Anzahl der Uebergänge aus dem einen Halbkreise in den andern ist. Es wird daher auch das Mittel aus den Winkeln V_I, V_{II} u. s. w. allgemein:

$$V = \frac{m \,.\, 180^\circ - W_N}{N}$$

oder, mit Worten ausgedrückt: das Mittelresultat ist der ganze bei den successiven Drehungen des Kreises durchlaufene Bogen, dividirt durch die Zahl der Beobachtungen. Nun ist V das Supplement der gemessenen Kante, also diese selbst:

$$W = 180^\circ - V$$

§. 689.

Apparat zur Justirung der Kante.

Da auf die Justirung der Kante Alles ankommt, der gewöhnliche Wollastonsche Stellungsapparat des Krystalles aber ein Hin- und Herprobiren nöthig macht, so scheint mir ein Apparat sehr wünschenswerth, welcher die Justirung der Kante durch drei successive, nach bestimmten Regeln vorzunehmende Bewegungen des Krystalles leicht und sicher erreichen lässt, und die Operation von allem Probiren unabhängig macht; was dann um so nöthiger wird, wenn die Kantenlinie, welche gewöhnlich beim Aufkleben des Krystalles zur Richtschnur dient, gar nicht vorhanden ist, und beide Flächen durch mehre zwischenliegende Flächen getrennt sind. Ein solcher Apparat erfordert nur die Hinzufügung eines einzigen kleinen Maschinentheiles zu dem Wollastonschen Stellungsapparate.

Statt des langen, in einer Hülse dreh- und verschiebbaren Stiftes *fg* nämlich lasse man in der Durchbohrung *e* des Bogens *de* Fig. 793 eine nicht verschieb-, sondern nur drehbare Axe gehen, welche in

Digitized by Google

ihrem Verlaufe zweimal knieförmig gebogen, und in *g* so durchbohrt ist, dass, wenn der Bogen *og* in die Ebene des Bogens *ed* eingestellt wird, das Bohrloch *g* in die Verlängerung des Bohrloches *c* fällt. Das Bohrloch *g* nimmt eine kleine Axe *pq* auf, welche unten mit einer kleinen Drehscheibe, oben mit einer zum Tragen des Krystalls bestimmten Scheibe, oder besser mit einer kleinen Zange versehen ist.

Nachdem nun das Instrument wie in §. 686 gestellt worden, befestigt man den Krystall auf der kleinen Scheibe *q* mit etwas Wachs (oder klemmt ihn in die kleine Zange), so dass die zu messende Kante nach oben zu liegen kommt, und macht darauf die Axe *fo* der Drehungsaxe des Kreises parallel. Hierauf dreht man die kleine Axe *pq* so lange, bis die erste Krystallfläche das Bild einer verticalen Fensterleiste vertical (oder einer horizontalen horizontal) erscheinen lässt; eine Bedingung, die jedenfalls zu erfüllen ist, und die Fläche der Axe des Kreises parallel macht. Dann dreht man den Bogen *ed* um einen etwas grossen Winkel, etwa von 60° oder 90°, und darauf die Axe *fo* so lange, bis dieselbe Krystallfläche das Bild derselben Fensterleiste wiederum vertical (oder horizontal) erscheinen lässt. Dadurch wird diese erste Fläche nicht nur parallel mit der Axe des Kreises, sondern auch rechtwinklig auf der Axe *dc*, weshalb sie bei allen ferneren Drehungen des Bogens *ed* um diese seine Axe ihre Lage unverändert beibehält. Man dreht nun diesen Bogen (und zugleich die Axe des Krystallträgers) so lange, bis die zweite Krystallfläche das Bild der Fensterleiste gleichfalls vertical (oder horizontal) erscheinen lässt; dann ist auch diese Fläche der Axe des Kreises parallel gemacht, ohne dass die erste Fläche ihre Lage veränderte. Die Kantenlinie wird also durch drei suc-

cessive, nach bestimmten Regeln vorzunehmende Bewegungen leicht und sicher justirt seyn.

§. 690.

Ueber den Fehler der Excentricität.

Da die Betrachtungen des §. 679 die Kante so wenig excentrisch voraussetzten, dass die Coordinaten x und y des reflectirenden Elementes der Krystallfläche für beide Reflexionen gleich angenommen werden konnten, so belehrten sie uns auch nicht über die Grösse des Fehlers, welcher durch die Excentricität der Kante herbeigeführt wird; weshalb wir noch hierüber eine Untersuchung anzustellen haben.

Es sey der Punct M, Fig. 794, die Projection der mathematischen Axe des Kreises, E die Projection der zu messenden Kante, EF die Projection der ersten Krystallfläche vor, $E'F'$ die der zweiten Krystallfläche nach der Drehung des Kreises. Die Objecte A und B sollen mit dem Krystalle in einer und derselben Parallelebene des Kreises liegen, und die Reflexionen dicht an der Kantenlinie Statt finden. Da, wegen der verschiedenen Excentricität, die zweite Krystallfläche, wenn auf ihr die Coincidenz des Bildes von A mit B beobachtet wird, nicht genau dieselbe Lage haben kann, wie die erste Krystallfläche, als die Coincidenz auf ihr beobachtet wurde, so werden sich die Projectionen EF und $E'F'$ beider Krystallflächen gehörig verlängert in einem Puncte K schneiden. Es sey nun

die Entfernung des Objectes A, $MA = a$,

\- - - - - - - B, $MB = b$,

die Excentricität, oder der Radius der Kantenlinie, $ME = e$,

der Winkel, welchen die Radien beider Objecte bilden, oder $AMB = \varrho$,

der Winkel, welchen die Projectionen der ersten und zweiten Krystallfläche bilden, oder $E'KE = \delta$,

die Winkel, welchen die Krystallflächen mit dem Radius der Kantenlinie bilden, φ und φ', nämlich:

$$\text{Winkel } FEM = \varphi$$
$$\text{Winkel } F'E'M = \varphi'$$

die Winkel der von A ausgehenden und auf beiden Krystallflächen dicht an E reflectirten Strahlen, λ und λ', nämlich:

$$\text{Winkel } AEK = \lambda$$
$$\text{Winkel } AE'K = \lambda'$$

die Winkel der beiden einfallenden und der beiden reflectirten Strahlen gegen einander, α und β, nämlich:

$$\text{Winkel } EAE' = \alpha$$
$$\text{Winkel } EBE' = \beta$$

endlich der Drehungswinkel des Kreises, oder der von dem Radius der Kantenlinie beschriebene Winkel

$$EME' = W$$

§. 691.

Beweis, dass der Fehler der Excentricität $= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ist.

Der aus der Excentricität der Kantenlinie entspringende Fehler ist gleich dem Winkel δ, wie sich leicht beweisen lässt.

Der wahre Winkel V beider Krystallflächen ist nämlich:

$$V = \varphi + \varphi'$$

der abgelesene Winkel dagegen $= W$. Man verlängere die Projection EF, bis solche den Radius ME' der Kantenlinie in der zweiten Stellung, in R schneidet; nun ist

$$MRE = ME'K + E'KR$$
$$= \varphi' + \delta$$

Digitized by Google

MRE, φ und W aber sind die inneren Winkel des Dreieckes *MRE*, also ist

$$W + \varphi + \varphi' + \delta = 180°$$

und folglich

$$W + \delta = 180° - V \quad .$$

Da nun, wofern die Messung richtig, oder die Excentricität $= 0$ wäre, der Winkel W genau das Supplement von V seyn müsste, so ist offenbar der Fehler der Excentrität $= \delta$.

Es ist aber der Winkel δ gleich der halben Differenz der Winkel α und β.

Um dies zu beweisen, nenne man S den Durchschnittspunct des von A auf die erste Fläche einfallenden Strahles AE mit der verlängerten Projection KE' der zweiten Fläche, und T den Durchschnittspunct des von B auf die zweite Fläche fallenden Strahles BE' mit der verlängerten Projection KE der ersten Fläche. Nun ist

$$\begin{aligned} E'SE &= AEK + E'KE = \lambda + \delta \\ &= AE'S + SAE' = \lambda' + \alpha \end{aligned}$$

und folglich

$$\lambda + \delta = \lambda' + \alpha$$

Eben so ist

$$\begin{aligned} E'TR &= KE'T + E'KE = \lambda' + \delta \\ &= KEB - EBT = \lambda - \beta \end{aligned}$$

und daher auch

$$\lambda' + \delta = \lambda - \beta$$

Addirt man beide Gleichungen, so folgt

$$2\delta = \alpha - \beta$$

was zu beweisen war.

§. 692.

Bestimmung des Fehlers δ als einer Function von a, b und c.

In den Dreiecken *AEM* und *BEM* bestimmen sich nach bekannten Regeln:

$$\sin EAM = \frac{e\sin(\varphi-\lambda)}{a},\ \sin EBM = \frac{e\sin(\varphi+\lambda)}{b}$$

$$\sin E'AM = \frac{e\sin(\varphi'+\lambda')}{a},\ \sin E'BM = \frac{e\sin(\varphi'-\lambda')}{b}$$

Nun ist eigentlich

$$\sin\alpha = \sin(E'AM - EAM)$$
$$\sin\beta = \sin(EBM - E'BM)$$

Weil aber alle Messungen mit dem Reflexionsgoniometer eine bedeutende Entfernung der Gegenstände, und eine geringe Excentricität der Kantenlinie voraussetzen, so werden die Winkel *EAM*, *EBM*, *E'AM* und *E'BM* jedenfalls so klein, dass wir ohne Fehler statt der Sinus ihrer Differenzen die Differenzen ihrer resp. Sinus einführen können *); es wird daher

$$\sin\alpha = \frac{e}{a}[\sin(\varphi'+\lambda') - \sin(\varphi-\lambda)]$$

$$\sin\beta = \frac{e}{b}[\sin(\varphi+\lambda) - \sin(\varphi'-\lambda')]$$

Nun war $2\delta = \alpha - \beta$; folglich, weil auch α und β sehr klein, und daher ihre Cosinus ohne Fehler $= 1$ zu setzen sind:

$$\sin\delta = \tfrac{1}{2}(\sin\alpha - \sin\beta)$$

Bedenkt man nun ferner, dass die Winkel λ und λ' von einander sehr wenig verschieden, und dem Winkel $\frac{1}{2}\varrho$ sehr nahe gleich sind, so erhält man durch Entwickelung der Werthe von $\sin(\varphi+\lambda)$, $\sin(\varphi-\lambda)$ u. s. w., indem man zugleich $\lambda = \lambda' = \frac{1}{2}\varrho$ setzt,

$$\sin\delta = \frac{e}{2ab}[(a+b)(\sin\varphi' - \sin\varphi)\cos\tfrac{1}{2}\varrho - (a-b)(\cos\varphi' + \cos\varphi)\sin\tfrac{1}{2}\varrho]$$

von welchem Ausdrucke zu bemerken ist, dass er zwar ein bedeutendes Verhältniss der Entfernungen a und b zu der Excentricität e voraussetzt, jedoch schon Gül-

---

*) Die Entfernung der Objecte darf nur etwa 100 mal so gross seyn als die Excentricität, um diese Annahme zu gestatten.

tigkeit hat, wenn jene Entfernungen etwa 100 mal so gross sind als *e*. Nimmt man $a = b$, so wird

$$\sin\delta = \frac{e}{a}(\sin\varphi' - \sin\varphi)\cos\tfrac{1}{2}\varrho$$

§. 693.

Folgerungen aus dem Werthe von $\sin\delta$.

Aus dem, unter Voraussetzung gleicher Entfernungen beider Objecte, folgenden Werthe

$$\sin\delta = \frac{e}{a}(\sin\varphi' - \sin\varphi)\cos\tfrac{1}{2}\varrho$$

ergeben sich nachstehende Resultate:

1) Der Fehler δ wird positiv oder negativ (additiv oder subtractiv), je nachdem $\varphi <$ oder $> \varphi'$; er wird $= 0$, wenn $\varphi = \varphi'$. Das Verhältniss der Winkel φ und φ' bestimmt sich aber nach dem Abstande beider Krystallflächen von der mathematischen Axe des Instrumentes, oder nach der Excentricität jeder einzelen Krystallfläche; nennen wir diese Excentricitäten der ersten und zweiten Fläche ε und ε', so ist

   $$\varphi >=< \varphi', \text{ wenn } \varepsilon >=< \varepsilon'$$

   Der Fehler der Excentricität der Kante verschwindet also, wenn beide Flächen gleich excentrisch sind; leider scheint sich aber die Erfüllung dieser Bedingung *in praxi* nicht wohl erreichen zu lassen.

2) Wenn $\frac{1}{2}\varrho = 90°$, so wird $\delta = 0$; wiewohl nun die Erfüllung dieser Bedingung nicht möglich ist, so lehrt sie uns doch, dass δ um so kleiner wird, je mehr sich $\frac{1}{2}\varrho$ einem rechten Winkel nähert; woraus sich die Regel ergiebt, dass die Gegenstände nicht zu nahe am Horizonte gewählt werden dürfen.

3) Da der Factor $(\sin\varphi' - \sin\varphi)\cos\frac{1}{2}\varrho$, selbst im

Digitized by Google

ungünstigsten Falle, immer noch < 1 ist, so lässt sich der aus der Excentricität entspringende Fehler jedenfalls beliebig verringern, indem man a sehr gross gegen e nimmt. Beobachtet man z. B. das Sonnenbild, so kann man den Krystall auf den Limbus des Kreises setzen, ohne den geringsten Fehler zu befürchten. Da sich aber die Excentricität aus freier Hand wohl immer bis auf 2 Linien vermindern lässt, so reicht eine Entfernung der Gegenstände von 60—80 Fuss hin, um den Fehler des Resultates auch im ungünstigsten Falle bis unter eine Minute zu bringen.

4) Geht die eine Krystallfläche durch die mathematische Axe des Instrumentes, so wird einer der Winkel φ oder $\varphi' = 0$, und der andere $= V$, folglich

$$\sin\delta = \frac{e}{a}\cos\tfrac{1}{2}\varrho\sin V,$$

wofür man auch

$$\sin\delta = \frac{e}{a}\cos\tfrac{1}{2}\varrho\sin W$$

setzen kann. Der Fehler erreicht dann zwar sein Maximum, ist aber leicht zu berechnen, wenn e, a und ϱ bekannt sind.

§. 694.

Ueber den Fehler wegen des Spielraumes der Reflexion.

Der aus der Grösse der Krystallflächen und der dadurch herbeigeführten Veränderlichkeit des reflectirenden Elementes, oder, der aus dem Spielraume der Reflexion entspringende Fehler lässt sich unter der Voraussetzung, dass der Fehler der Excentricität beseitigt und folglich die Kantenlinie als centrisch zu betrachten ist, in folgender Weise bestimmen.

Es sey M, Fig. 795, die Projection der centrischen

Kantenlinie, also auch der geometrischen Axe des Instrumentes, *MF* die Projection der ersten Krystallfläche in der ersten, *MF'* die der zweiten Krystallfläche in der zweiten Lage, *A* das eine, und *B* das andere, mit dem Krystalle in derselben Parallelebene des Kreises befindliche Object. Die Reflexion müsste nun eigentlich beide Male dicht an *M* beobachtet werden, so dass *AM* und *BM* die normalen Lichtstrahlen seyn würden. Statt dessen wollen wir aber annehmen, sie geschehe auf der ersten Fläche in *R*, auf der zweiten Fläche in *R'*, so dass *RO* und *R'O'* die reflectirten Strahlen sind, in welchen sich das Auge des Beobachters befinden muss.

Es seyen nun ferner:

r und r' die Abstände der reflectirenden Flächenelemente *R* und *R'* von der Kantenlinie *M*;

a und b die Entfernungen der Objecte *A* und *B* von *M*;

λ der Neigungswinkel des Strahles *AR* gegen die erste, λ' der Neigungswinkel des Strahles *AR'* gegen die zweite Fläche;

α und α' die Neigungswinkel der Strahlen *AR* und *AR'* gegen den Normalstrahl *AM*, β und β' die Neigungswinkel der Strahlen *BR* und *BR'* gegen den Normalstrahl *BM*;

ϱ der Neigungswinkel *AMB* beider Normalstrahlen, und endlich

ϑ der Winkel *HMH'*, um welchen die zweite Krystallfläche bei der zweiten Beobachtung von der Lage der ersten Krystallfläche bei der ersten Beobachtung abweicht;

so ist ϑ der durch den Spielraum der Reflexion herbeigeführte Fehler.

§. 695.

Fortsetzung.

Es kommt nun zuvörderst darauf an, den Winkel

Digitized by Google

ϑ als eine Function anderer Grössen auszudrücken; es ist aber

$$\begin{aligned} AH'R' &= H'MA + MAR' \\ &= HMA + \vartheta + \alpha' \\ &= \alpha + \alpha' + \vartheta + \lambda \end{aligned}$$

und eben so

$$\begin{aligned} BH'R' &= H'MB + MBR' \\ &= HMB - \vartheta + \beta' \\ &= \beta + \beta' - \vartheta + \lambda \end{aligned}$$

Da nun auch

$$AH'R' = BH'R'$$

so folgt

$$2\vartheta = \beta + \beta' - (\alpha + \alpha')$$

Es ist aber

$$sin\,\beta = \frac{r\,sin\,\lambda}{b}, \quad sin\,\alpha = \frac{r\,sin\,\lambda}{a}$$

$$sin\,\beta' = \frac{r'\,sin\,\lambda'}{b}, \quad sin\,\alpha' = \frac{r'\,sin\,\lambda'}{a}$$

Weil nun jedenfalls a und b so gross, r und r' so klein vorauszusetzen sind, dass jene diese wenigstens 100 Mal übertreffen, so kann man ohne Fehler

$$sin(\alpha + \alpha') = sin\,\alpha + sin\,\alpha'$$
$$sin(\beta + \beta') = sin\,\beta + sin\,\beta'$$

und folglich auch

$$sin\,\vartheta = \tfrac{1}{2}(sin\,\beta + sin\,\beta' - sin\,\alpha - sin\,\alpha')$$

annehmen; aus demselben Grunde sind aber die Winkel λ und λ' nicht nur einander, sondern auch dem Winkel $\frac{1}{2}\varrho$ sehr nahe gleich; es wird daher

$$sin\,\vartheta = \frac{(a-b)(r+r')\,sin\,\frac{1}{2}\varrho}{2ab}$$

Dieser Werth wird null, wenn $a = b$; ausserdem aber um so kleiner, je näher sich die Werthe von a und b kommen, und je grösser beide überhaupt und besonders im Vergleich zu r und r' sind.

Man sieht also hieraus, wie sehr vortheilhaft es ist, beide Objecte gleich, oder doch beinahe

Digitized by Google

gleich entfernt zu wählen, weil dadurch nicht nur der aus dem Spielraume der Reflexion entspringende Fehler gänzlich vernichtet, sondern auch der aus der Excentricität der Kante entspringende Fehler durch einen sehr einfachen Ausdruck dargestellt wird *).

§. 696.

Erfüllung der Bedingung $a = b$.

Ein kleiner Planspiegel von geschwärztem Glase, der an einer, der Axe des Kreises parallelen, Axe auf der Fussplatte des Goniometers befestigt wäre, würde einestheils die Bedingung der gleichen Entfernungen beider Objecte bequem und hinreichend erfüllen, anderntheils auch den Vortheil gewähren, dass man den Winkel $\frac{1}{2}\varrho$ immer etwas gross wählen kann; während ein künstlicher Horizont, bei der geringen Elevation der meisten Objecte, diesen Winkel gewöhnlich sehr spitz bestimmen würde.

Die gehörige Justirung der Kantenlinie ist, zumal mittels des in §. 689 beschriebenen Apparates, jedenfalls zu erreichen; die Excentricität derselben und der Spielraum der Reflexion bleiben also diejenigen objectiven Fehlerquellen, welche vorzüglich berücksichtigt werden müssen. Wenn nun beide Fehler durch das einfache Mittel einer zweckmässigen Wahl der Objecte vernichtet werden können, so scheint es für den gewöhnlichen Gebrauch des Goniometers weit vortheilhafter, jenes Mittel in Anwendung zu bringen,

*) Die Gleichheit der Entfernungen gewährt auch noch den Vortheil, dass die Coincidenz scharf beobachtet werden kann, weil das Auge beide Bilder gleich weit erblickt; sind dagegen die Entfernungen sehr ungleich, so muss das Bild eines entfernten mit dem Bilde eines nahen Gegenstandes verglichen werden, was nie mit gehöriger Schärfe möglich ist, weil jedenfalls, während das eine Bild vom Auge fixirt wird, das andere undeutlich gesehen wird, und umgekehrt.

als das Instrument durch zusammengesetzte und in vielen Fällen doch nicht ausreichende Centrirungsapparate zu vertheuern, und weniger bequem zu machen. Denn die Einfachheit seiner Construction und die Bequemlichkeit seines Gebrauches sind es gerade, was nächst der Genauigkeit seiner Resultate dem Wollastonschen Goniometer einen so entschiedenen Vorzug ertheilt, dass es, wenigstens für den mineralogischen Gebrauch, nicht so leicht durch andere verdrängt werden wird.

§. 697.

Malus's Goniometer.

Das Reflexionsgoniometer von Malus besteht aus einem horizontalen Kreise, in dessen Mittelpuncte der Krystall so befestigt wird, dass die zu messende Kante vertical steht. Die von einem entfernten verticalen Objecte, z. B. der Kante eines Hauses, der Spitze eines Blitzableiters, kommenden und von den Krystallflächen reflectirten Strahlen werden durch ein Fernrohr aufgefangen, dessen Axe der Ebene des Kreises parallel, und genau auf den Mittelpunct desselben gerichtet ist, und dessen verticaler Faden mit dem Bilde des Objectes zur Coincidenz gebracht wird. Der Winkel, durch welchen die den Krystall tragende Alhidade gedreht werden muss, damit die Coincidenz auch bei der Reflexion von der zweiten Krystallfläche Statt findet, ist das Supplement des gesuchten Winkels.

Dieses Goniometer hat die Vortheile,

1) dass das Object sehr weit gewählt werden kann, was bei dem Gebrauche des Wollastonschen Goniometers für Beobachter von kurzsichtigem Auge nicht wohl angeht.
2) Dass die Lage des reflectirten Strahles durch das Fernrohr sicherer fixirt wird als durch die

Coincidenz des reflectirten Bildes mit einem direct gesehenen Objecte.

Dagegen ist die Anwendung des Malus'schen Goniometers wegen des horizontalen Kreises, in dessen Ebene sich der Gegenstand befinden muss, von der günstigen Beschaffenheit der Localitäten noch abhängiger als jene des Wollastonschen. Dem ist jedoch abzuhelfen, weil sich nach Kupffers Vorschlag der wesentliche Vortheil des Malus'schen mit dem Gebrauche des Wollastonschen Goniometers vereinigen lässt, indem man vor selbiges ein, nach Art eines Passageinstrumentes, in der Verticalebene auf und ab bewegliches Fernrohr so stellt, dass seine Axe, der Krystall und das Object in eine Parallelebene des Kreises fallen; worauf denn die Reflexion durch das Fernrohr statt mit freiem Auge beobachtet wird.

Vierter Abschnitt.

Von der Zeichnung der Krystallformen.

Erstes Capitel.

Allgemeine Bestimmungen.

§. 698.

Nutzen der Krystallbilder.

Weil die krystallisirten Varietäten als die eigentlichen Repräsentanten einer jeden Mineralspecies betrachtet werden müssen, durch deren Kenntniss sie erst ein Gegenstand für die Physiologie des Mineralreiches wird, und weil demnach die Gestalten der mineralogischen Individuen für die wissenschaftliche Mineralogie eben so wohl ein Merkmal des ersten

Digitized by Google

Ranges bilden, als die Gestalten der Thiere und Pflanzen für die Zoologie und Botanik; so wird die bildliche Darstellung dieser Gestalten eines der wichtigsten Hülfsmittel der Wissenschaft, und folglich die Lehre von der richtigen Entwerfung der Krystallbilder eine der wesentlichsten Aufgaben der angewandten Krystallographie. Man ist daher auch immer darauf bedacht gewesen, dieses Hülfsmittel auf eine mehr oder weniger angemessene Art in Anwendung zu bringen, und die so wichtigen morphologischen Merkmale der Mineralspecies durch die, den Beschreibungen beigefügten Zeichnungen zu veranschaulichen; wozu man sich um so mehr aufgefordert fühlen musste, seitdem man zu der Ueberzeugung gelangt war, dass die Krystallformen, der scheinbaren Unbeständigkeit ihres Habitus ungeachtet, doch nach sehr bestimmten und einfachen stereometrischen Gesetzen gebildet sind. Diese Bestimmtheit und Einfachheit der plastischen Gesetze sind es auch, kraft welcher sich die Mineralogie im Vergleiche zur Zoologie und Botanik des ganz besondern Vorzuges zu erfreuen hat, dass jeder mit den Regeln der Projectionslehre vertraute Zeichner nach dem kurzen krystallographischen Zeichen einer Krystallform das Bild derselben mit grosser Genauigkeit darzustellen vermag, während selbst die ausführlichste Beschreibung einer Thier- oder Pflanzenform noch nicht hinreichend ist, um danach das Bild derselben richtig zu entwerfen.

§. 699.

Eigenschaften, welche die Krystallbilder besitzen müssen.

Sollen die Krystallbilder ihrem Zwecke hinreichend entsprechen, so müssen sie besonders folgende drei Eigenschaften besitzen:

1) Mathematische Richtigkeit,

Digitized by Google

2) Krystallographische Wahrheit, und
3) Aesthetische Deutlichkeit.

Was die erste, mathematische Forderung betrifft, so wird solche jedenfalls durch Anwendung der Regeln der Perspective zu erfüllen seyn; allein bekanntlich modificiren sich diese Regeln besonders nach der Beschaffenheit der Projectionsfläche, und nach der Entfernung des Auges; wir haben daher diese beiden Elemente nicht nur auf eine den übrigen Anforderungen möglichst angemessene, sondern auch auf eine die Darstellung der Bilder möglichst erleichternde Art zu wählen. Deshalb bestimmen wir zuvörderst die Projectionsfläche jedenfalls als eine ebene Fläche.

Die zweite Forderung nach krystallographischer Wahrheit setzt voraus, dass die verschiedenen, zumal aber die durch den Parallelismus der Kanten bestimmten Verhältnisse der Gestalten im Bilde hervortreten. Ihr wird dadurch Genüge geleistet, dass man das Auge in unendlicher Entfernung vom Krystalle denkt, weil dann alle Gesichtsstrahlen einander parallel werden, und der an der Krystallform in der Wirklichkeit Statt findende Parallelismus der Kanten auch auf ihr Bild übergehen muss. Hiermit wird also der Gebrauch der eigentlich so genannten Perspective ausgeschlossen, und nur die Projectionslehre der descriptiven Geometrie für die krystallographische Zeichenkunst in Anspruch genommen.

Was endlich die dritte, ästhetische Forderung betrifft, so bieten sich zu ihrer Erfüllung vorzüglich folgende Mittel dar:

a) Vortheilhafte Wahl der gegenseitigen Lage des Auges, der Krystallform und der Projectionsfläche.
b) Darstellung der hinteren, von dem Beobachter abgewendeten Seite der Krystallform zugleich mit der vorderen Seite; transparente Zeich-

Digitized by Google

nung; oder auch Schattirung der Krystallform unter Voraussetzung einer günstigen Beleuchtung; schattirte Zeichnung*).

c) Gleichzeitige Darstellung derselben Krystallform von verschiedenen Seiten und bei verschiedener Lage der Projectionsfläche zum Krystalle.

§. 700.

Verschiedene Arten der Projection.

Da wir das Auge in unendlicher Entfernung vom Krystalle, oder da wir einen durchgängigen Parallelismus der Gesichtsstrahlen voraussetzen, so ist es auch ganz gleichgültig, in welcher Entfernung vom Krystalle die Projectionsfläche angenommen wird; denn die Erscheinungsweise des Bildes ist nur noch von folgenden zwei Elementen abhängig:

1) Von der Stellung des Auges gegen den Krystall und die Projectionsfläche, oder von der Richtung des Normalgesichtsstrahles gegen diese Fläche;
2) Von der Lage der Projectionsfläche gegen den Krystall.

Wir nennen nämlich die von dem Auge nach dem Mittelpuncte des Krystalles gehende Linie den Normalgesichtsstrahl, weil ihr alle Gesichtsstrahlen, oder, mit andern Worten, weil ihr die sämmtlichen projicirenden Linien und Ebenen parallel sind. Nach der verschiedenen Richtung des Normalgesichtsstrah-

*) Für die sehr regelmässigen Formen des tesseralen, tetragonalen und hexagonalen Systemes ist die Anwendung des *sub b* erwähnten Mittels nicht unumgänglich nothwendig, wenn es nur auf die Erläuterung gewisser Combinationserscheinungen u. dgl. ankommt; daher ich mir auch zur Erleichterung der mühsamen und zeitraubenden Arbeit erlaubt habe, die meisten auf die Combinationslehre bezüglichen Figuren nur mit ihren vorderen Kanten darzustellen.

Digitized by Google

les gegen die Projectionsfläche unterscheidet man nun zuvörderst die orthographische und klinographische Projection; bei der ersteren sind die Gesichtsstrahlen rechtwinklig, bei der anderen schiefwinklig auf der Projectionsfläche.

Wir denken ferner die Projectionsfläche jedenfalls durch den Mittelpunct des Krystalles, und unterscheiden nach ihrer Lage gegen die Hauptaxe die horizontale, verticale und schiefe Projection. Bei der ersteren ist die Projectionsfläche horizontal, oder rechtwinklig auf der Hauptaxe, bei der zweiten geht sie durch die Hauptaxe, und bei der dritten schneidet sie dieselbe unter einem schiefen Winkel.

Die Horizontalprojectionen, deren man sich bedient, sind jedenfalls orthographisch; die Vertical- und schiefen Projectionen theils orthographisch, theils klinographisch. Obgleich nun die verticale Projectionsfläche unendlich viele Stellungen gegen das Axensystem haben kann, so sind doch besonders folgende zwei Stellungen zu unterscheiden:

a) wenn die Projectionsfläche ein Hauptschnitt ist; die, gewöhnlich orthographische Projection wird dann nach demjenigen Hauptschnitte benannt, mit welchem die Projectionsfläche zusammenfällt. Hierher gehören besonders die im monoklinoëdrischen Systeme sehr nützlichen Klinodiagonalprojectionen, bei welchen die Ebene des klinodiagonalen Hauptschnittes als Projectionsfläche dient, während die Gesichtsstrahlen der Orthodiagonale parallel sind,

b) wenn die Projectionsfläche kein Hauptschnitt ist, und folglich eine intermediäre Lage zwischen zweien Hauptschnitten hat; dies ist die gewöhnliche Stellung, welche wir in den Krystallbildern voraussetzen, indem wir zugleich eine klinographische Projection geltend machen.

Digitized by Google

Zu den schiefen Projectionen gehören die meisten und besten der bis jetzt bekannt gewordenen Zeichnungen, indem sie eine schiefe Lage der Projectionsfläche gegen die Hauptaxe und eine orthographische Projection voraussetzen. Es scheint jedoch vortheilhafter, die Projectionsfläche vertical, und die Gesichtsstrahlen auf selbiger schief zu denken, weil dann bei aufrechter Stellung des Papieres die abgebildete Gestalt gleichfalls aufrecht erscheint, und weder ihre Hauptaxe noch ihre verticalen Kanten einer Verkürzung im Bilde unterworfen sind. Nur darf der Neigungswinkel der Gesichtsstrahlen gegen die Projectionsfläche nicht mehr als etwa 10 — 12° von 90° abweichen, weil sonst die Bilder unverhältnissmässig verlängert werden.

§. 701.

Eigentliche Aufgabe der krystallographischen Zeichenkunst.

Das Kantennetz der Krystallform ist in der transparenten Zeichnung der eigentliche Gegenstand der Darstellung; auch bildet es die Grundlage der schattirten Zeichnungen, in welchen die Illusion des körperlichen Hervortretens durch Schattirung der Flächen, statt durch Einzeichnung der hinteren Kanten, erreicht wird, und dergleichen zumal in älteren Werken vorkommen, wie sie denn auch namentlich für solche Darstellungen wenigstens der einfachen Gestalten zu empfehlen sind, welche in sehr grossem Maassstabe ausgeführt werden, um zu Demonstrationen bei Vorträgen zu dienen *). Da also das Kantennetz je-

---

*) Beudant soll sich in seinen Vorlesungen bei Erläuterung der Combinationsgesetze grosser colorirter Zeichnungen bedienen, in welchen alle zu einer und derselben Gestalt gehörige Flächen eine und dieselbe Farbe tragen, was allerdings für Demonstrationer vom Katheder herab sehr zweckmässig, und auch schon frü-

Digitized by Google

denfalls die wesentliche Grundlage aller Zeichnungen bildet, eine jede Kante aber wiederum durch die beiden sie begränzenden Eckpuncte bestimmt wird, so sieht man, dass die eigentliche Aufgabe der krystallographischen Zeichenkunst darin besteht, das System der Eckpuncte einer Gestalt oder Combination für eine gegebene Stellung des Auges, des Krystalles und der Projectionsfläche zu projiciren.

§. 702.

Gang der Zeichnung.

Soll irgend eine Krystallform nach einer verlangten Projectionsart dargestellt werden, so fängt man damit an, das Axensystem der entsprechenden Grundgestalt zu projiciren, weil man in ihm gleichsam das Gerüste erhält, an welchem die sämmtlichen Flächen der Krystallreihe leicht und sicher angelegt werden können.

Nachdem das Axensystem der Grundgestalt entworfen worden, lässt sich jede einzele Gestalt der Krystallreihe theils durch unmittelbare Ausführung der Ableitungsconstruction, theils auch durch Benuzzung der Coëfficienten der Zwischenaxen oder anderer, aus der Berechnung der Gestalten folgender Elemente erhalten; daher es auch vortheilhaft ist, in denjenigen Systemen, wo die Zwischenaxen einige Bedeutung haben, dieselben gleich mit in das Bild der Grundgestalt einzutragen.

Bei der Darstellung von Combinationen ist besonders auf die in der reinen Krystallographie mitgetheilten Resultate der Combinationslehre zu achten, welche im Allgemeinen die Erscheinungsweise je zweier Gestalten bestimmen. Ist die Combination bi-

---

her zur Veranschaulichung der Uebergänge tesseraler und anderer Combinationen von Jassoy versucht worden ist.

Digitized by Google

när und regelmässig, d. h. bilden die Flächen der einen Gestalt Abstumpfungen oder Zuschärfungen gewisser Kanten der andern Gestalt, oder sind die Combinationskanten gewissen Kanten der einen Gestalt parallel, so ist die Ausführung der Zeichnung ohne Schwierigkeiten, wie denn auch überhaupt die in den mehrzähligen Combinationen so gewöhnliche Erscheinung, dass die Flächen der untergeordneten Gestalten mit parallelen Combinationskanten zwischen den Flächen der vorherrschenden Gestalten erscheinen, eine grosse Erleichterung bei den Darstellungen der Krystallbilder gewährt.

§. 703.

Einzeichnung der Combinationskanten.

Findet k e i n Parallelismus der Combinationskanten mit andern schon projicirten Kanten Statt, so muss die richtige Lage derselben ausgemittelt werden. Dies geschieht am einfachsten durch ein allgemeines graphisches Verfahren in folgender Weise. Man construirt die beiden Flächen, deren Combinationskante gesucht wird, um das Axensystem in einer solchen Lage, wie es die Grösse und Richtung ihrer Parameter fordert, und erhält dadurch die Intersectionen beider Flächen in den drei Coordinatebenen. Kommen nun z w e i P a a r ihrer g l e i c h n a m i g e n Intersectionen schon unmittelbar durch diese Construction zum Durchschnitte, so braucht man nur die beiden Durchschnittspuncte durch eine gerade Linie zu verbinden, welche die gesuchte Combinationskante ist; schneiden sich aber die Intersectionen beider Flächen nicht unmittelbar, so verlängert man zwei gleichnamige Paare so weit, bis sie die Durchschnitte hervorbringen, und erhält so die beiden Puncte, welche die Lage der Combinationskante bestimmen.

Dieses Verfahren empfiehlt sich zwar wegen sei-

Digitized by Google

ner Allgemeinheit und Einfachheit, hat jedoch in manchen Fällen das Unbequeme, dass die Intersectionen sehr weit über den Raum des eigentlichen Bildes hinaus verlängert werden müssen, um die nöthigen Durchschnitte zu geben, und dass diese Durchschnittspuncte selbst nicht mit der gehörigen Genauigkeit erhalten werden, wenn sich die beiden gleichnamigen Intersectionen im Bilde unter sehr spitzen Winkeln schneiden. Wir werden daher für die einzelen Krystallsysteme noch eine andere Methode angeben, durch welche die Einzeichnung der Combinationskanten unmittelbar von den Verhältnissen der Kantensegmente der einen Gestalt abhängig gemacht wird, und welche schon deshalb eine nähere Untersuchung verdient, weil sie, wenn auch nicht für die Zeichnung, so doch für die Modellirung der Combinationen unentbehrlich ist.

§. 704.

Ausführung der Zeichnung.

Was endlich die technischen Regeln bei der Ausführung der Krystallbilder betrifft, so entwirft man vorläufig die ganze, zur Auffindung der nöthigen Eckpuncte erforderliche Construction auf einem etwas starken und glatten Zeichenpapiere, indem man alle Linien nur mit der Cirkelspitze zieht, um die Durchschnitte möglichst genau zu erhalten. Ist auf diese Weise der ganze Inbegriff von Puncten aufgefunden, welcher das Kantennetz der verlangten Gestalt oder Combination bestimmt, so trägt man dieselben durch feine Nadelstiche auf das zur Darstellung der Zeichnung bestimmte Papier über, und verbindet hierauf die durchstochenen Puncte zuvörderst aus freier Hand durch schwache Bleistiftlinien, so wie es der Verlauf des Kantennetzes erfordert, um nicht bei der nachherigen Ausziehung mit der Reissfeder irriger

Digitized by Google

Weise Puncte zusammenzuziehen, welche keine Kante zwischen sich haben.

Da bei den gewöhnlichen transparenten Zeichnungen nur die vorderen Kanten durch ausgezogene, die hinteren Kanten dagegen durch punctirte Linien dargestellt werden, so ist es, wenigstens bei verwickelteren Combinationen, rathsam, erst die vorderen Kanten mit der Reissfeder zu vollenden, bevor man die hinteren Kanten zieht, und demgemäss auch die Bleistiftlinien für beide besonders einzutragen, nicht nur, um das sehr leicht eintretende Versehen zu vermeiden, dass man eine Linie auszieht, die nur punctirt werden sollte, sondern auch, weil man gewöhnlich die Reissfeder für die punctirten Linien enger spannen muss als für die ausgezogenen Linien, welche letztere überhaupt, besonders aber im Vergleiche zu den ersteren etwas stark gehalten werden müssen, wenn sich das Bild gut ausnehmen und die Illusion des körperlichen Hervortretens recht gesteigert werden soll.

Nächst den ausgezogenen und punctirten Linien, welche immer Kanten vorstellen, bedient man sich auch in den krystallographischen Zeichnungen, nach Haüys Vorgange, der gestrichelten Linien zur Andeutung solcher Linien, welche in Krystallflächen liegen, ohne doch Kantenlinien zu seyn, und der gestrichelt-punctirten Linien zur Andeutung solcher Linien, welche, wie z. B. die Axen, innerhalb der Krystallform enthalten sind.

Digitized by Google

Zweites Capitel.

Von der Zeichnung der tesseralen Gestalten.

A. Axen und einfache Gestalten.

§. 705.

Projection der Axen.

Die tesseralen Gestalten werden im Allgemeinen am vortheilhaftesten durch eine klinographische Verticalprojection mit intermediärer Lage der Projectionsfläche dargestellt. Horizontalprojectionen kommen selten, häufiger noch eine andere Art der orthographischen Projection in Anwendung, bei welcher die Gesichtsstrahlen einer der trigonalen Zwischenaxen parallel laufen. Die ausgezeichnete Symmetrie der tesseralen Gestalten macht gewöhnlich jede andere als die zuerst erwähnte Projection überflüssig, und nur die verwickelteren Combinationen möchten bisweilen, zur leichteren Auffassung ihrer Verhältnisse, der Hinzufügung einer andern Projection bedürfen.

Bevor wir zur Darstellung der verschiedenen einfachen Gestalten übergehen, haben wir die Construction des Axensystemes aufzusuchen, wie solches in dem Oktaëder als der Grundgestalt erscheint. Was nun zuvörderst die Hauptaxen betrifft, so besteht die Aufgabe ihrer Projection darin, das Bild dreier, auf einander rechtwinkliger, gleich grosser Linien, für eine gegebene Stellung des Auges und der Projectionsfläche zu einander und zu den Linien selbst, zu entwerfen.

Man stelle das Axensystem nach einer seiner Hauptaxen aufrecht, und lege durch diese verticale Axe und das in unendlicher Ferne befindliche Auge eine Ebene als Gesichtsebene. Eine zweite, gleichfalls durch die verticale Axe gehende und auf der Gesichtsebene rechtwinklige Ebene soll uns zur

Digitized by Google

Projectionsfläche dienen; die Ebene durch die beiden horizontalen Hauptaxen endlich heisse die Horizontalebene schlechthin, und eben so ihr Durchschnitt mit der Projectionsfläche die Horizontallinie.

§. 706.

Fortsetzung.

Zuvörderst gebe man nun dem um seine verticale Axe beweglichen Axensysteme eine solche Lage, dass eine der horizontalen Hauptaxen in die Gesichtsebene fällt, und versetze das in derselben Ebene auf- und abwärts bewegliche Auge in die Horizontalebene. Dann sind es folgende zwei, willkürlich bestimmbare Elemente, von welchen die mehr oder weniger vortheilhafte Darstellung des Bildes abhängen wird.

1) Die Grösse des Drehungswinkels, oder die Declination δ des Axensystemes aus der Normalstellung.

2) Die Grösse des Erhebungswinkels, oder die Elevation ε des Auges über die Horizontalebene.

Beide Winkel müssen jedoch der Bequemlichkeit und Genauigkeit wegen so gewählt werden, dass die durch sie bedingte Projection keiner unmittelbaren Winkelconstructionen bedarf; und dazu bietet sich folgende Methode dar.

1) Man lasse das Auge in der Horizontalebene, und drehe das Axensystem so lange von der Rechten nach der Linken, bis die Projection der vorderen horizontalen Halbaxe gleich einem willkürlichen aliquoten Theile $= \frac{1}{r}$ der Projection der seitlichen horizontalen Halbaxe erscheint, und setze den dadurch bestimmten Declinationswinkel $= \delta$. Aus der Bedingung

$$\cos\delta = r \sin\delta$$

folgt sogleich

$$\cot\delta = r$$

2) Hierauf erhebe man das, beständig in der Gesichtsebene verharrende Auge über die Horizontalebene; sogleich werden die, bis jetzt in der Horizontallinie gelegenen Endpuncte der horizontalen Axen im Bilde eine Abweichung unter oder über dieselbe erfahren. Die Grössen dieser Abweichung müssen, für jede Erhebung des Auges, den wirklichen Abständen derselben Endpuncte von der Projectionsfläche proportional seyn; ihre absoluten Werthe sind daher als Functionen des noch unbestimmten Winkels ε ausgedrückt:

für die vordere Halbaxe $= \cos\delta \tan\varepsilon$

für die seitliche Halbaxe $= \sin\delta \tan\varepsilon$

In dem Momente nun, da die Abweichung des Endpunctes der vorderen Halbaxe genau gleich einem willkürlichen aliquoten Theile, $= \frac{1}{s}$ ihrer eigenen ersten Projection, fixire man das Auge; aus der Bedingung:

$$\cos\delta \tan\varepsilon = \frac{1}{s} \sin\delta$$

folgt sogleich

$$\cot\varepsilon = rs$$

für den entsprechenden Elevationswinkel des Auges.

§. 707.

Fortsetzung.

Auf die geschickte Wahl von r und s kommt nun Alles an; wie aber auch die Werthe derselben gewählt werden mögen, immer bleibt, sobald nur r eine ganze Zahl ist, die allgemeine Regel zur Ausführung der Projection folgende:

Aufgabe. Das tesserale Axensystem für die gegebene Breite $2b$ des Bildes, und für gegebene Werthe von r und s zu construiren.

Digitized by Google

Auflösung. Ziehe zwei sich rechtwinklig schneidende Linien, und trage in die eine als Horizontallinie beiderseits vom Durchschnittspuncte M die Länge $b = MH = MZ$, Fig. 796, theile hierauf die HZ in $2r$ gleiche Theile, lege durch ihre End- und beiden mittelsten Theilpuncte Hülfsverticalen und trage in die äusserste Verticale linker Hand abwärts von H die Länge $\frac{1}{s}b$, wodurch sich ein Punct R bestimmt. Ziehe nun die RM und verlängere sie jenseits M, so ist ihr zwischen den beiden mittleren Verticalen enthaltener Theil BB' die Projection der einen (vorderen) horizontalen Axe. — Ziehe hierauf durch B die Horizontale BS, und dann die SM, so bestimmt sich der Punct T in der einen Verticale; durch ihn ziehe wieder die Horizontale TC, aus C die CM, und verlängere solche jenseits M, so ist ihr zwischen den beiden äussersten Verticalen enthaltener Theil CC' die Projection der andern (seitlichen) horizontalen Hauptaxe. — Endlich trage man in die äusserste Verticale rechter Hand von Z aus ab- oder aufwärts einen der sechs Theile, in welche die HZ getheilt worden, verbinde den dadurch bestimmten Punct Q mit M, nimmt $MA = MA' = MQ$, so ist AA' die richtige Länge der verticalen Hauptaxe.

Die auf Taf. III u. s. w. abgebildeten Gestalten und Combinationen sind unter der Voraussetzung gezeichnet, dass $r = s = 3$, oder dass

$$\delta = 18^\circ\ 26',\quad \varepsilon = 6^\circ\ 20'$$

Für r scheint der Werth 3 jedenfalls sehr vortheilhaft; für s möchte jedoch im Allgemeinen der Werth 2 vorzuziehen seyn, weil die horizontale Fläche dann weniger verkürzt erscheint, indem $\varepsilon = 9^\circ\ 28'$ wird *). Dagegen dürften alle Werthe von s, die

*) Will man diese klinographische Projection ohne viele Mühe

Digitized by Google

$< \frac{1}{2}$ sind, aus dem zu Ende des §. 700 angegebenen Grunde zu vermeiden seyn.

§. 708.

Zeichnung des Oktaëders und der Zwischenaxen.

Hat man nach der Regel des vorhergehenden §. für gegebene Werthe von b, r und s die drei Hauptaxen des Oktaëders entworfen, so ist nichts leichter als das Oktaëder selbst darzustellen, indem man nur die sechs Pole A, A', B, B', C und C' der Hauptaxen durch gerade Linien zu verbinden braucht, wie es das Kantennetz der Gestalt vorschreibt; Fig. 797.

Eben so leicht ist aber auch die Einzeichnung der beiderlei Zwischenaxen in das Oktaëder. Die rhombischen Zwischenaxen verbinden nämlich die Mittelpuncte je zweier Gegen**kanten** des Oktaëders; man sucht also diese Mittelpuncte R in sechs der vorderen Kanten des Bildes, verbindet sie mit dem Mittelpuncte M der Gestalt durch gerade Linien, und verlängert diese Linien jenseits M bis zu ihren Durchschnittspuncten R' mit den Gegenkanten, so sind die sechs rhombischen Zwischenaxen des Oktaëders construirt; RR' in Fig. 797.

Die trigonalen Zwischenaxen verbinden die Mittelpuncte je zweier Gegen**flächen** des Oktaëders; man sucht also die Mittelpuncte T der vier vorderen Flä-

---

in eine orthographische verwandeln, so darf man nur einen etwas andern Elevationswinkel ε' voraussetzen, für welchen $\sin\varepsilon' = \frac{1}{rs}$ und dann die jetzt gefundene verticale Hauptaxe nach dem Coëfficienten $\cos\varepsilon'$ verkleinern. So würde z. B. für $r = s = 3$, $\varepsilon' = 6° 23'$, und die scheinbare Länge der verticalen Hauptaxe nur $= 0{,}9938 \times AA'$; für $r = 3$ und $s = 2$, $\varepsilon' = 9° 36'$ und die Länge der verticalen Axe $= 0{,}986 \times AA'$. Der Winkel ε' ist zugleich der Neigungswinkel der Projectionsfläche gegen die verticale Axe, und das Bild kann also bei verticaler Lage des Papiers eigentlich nicht mehr aufrecht erscheinen.

Digitized by Google

chen des Bildes (wobei man sich der bereits gefundenen Mittelpuncte ihrer Kanten bedient), verbindet sie mit dem Mittelpuncte *M* der Gestalt durch gerade Linien, verlängert diese letzteren, und macht ihre Verlängerungen ihnen selbst gleich, so sind die vier trigonalen Zwischenaxen des Oktaëders construirt; *TT'* in Fig. 797.

§. 709.

Zeichnung des Hexakisoktaëders *mOn*.

Die dreierlei Eckpuncte des Hexakisoktaëders *mOn* liegen in den dreierlei Axen des Oktaëders, und zwar die achtflächigen Eckpuncte in den Polen der Hauptaxen, daher sie bereits in der Construction dieser letzteren enthalten sind.

Die sechsflächigen Eckpuncte begränzen die trigonalen Zwischenaxen; allein, während im Oktaëder die Endpuncte dieser Zwischenaxen in der Centraldistanz $\sqrt{\frac{1}{3}}$ liegen, so fallen sie im Hexakisoktaëder *mOn* in die Entfernung

$$\frac{3mn}{mn+m+n} \times \sqrt{\tfrac{1}{3}}; \text{ (§. 114)}$$

Man setze also jede der trigonalen Halbaxen *MT*, wie solche im Bilde des Oktaëders erscheint $= 1$, verlängere sie über *T*, und mache ihre Verlängerung

$$= \frac{2mn-(m+n)}{mn+(m+n)}$$

von ihr selbst, so bestimmt sich in ihr ein neuer Endpunct, welches der gesuchte sechsflächige Eckpunct von *mOn* ist.

Die vierflächigen oder rhombischen Eckpuncte begränzen die rhombischen Zwischenaxen; allein, während im Oktaëder die Endpuncte dieser Zwischenaxen in der Centraldistanz $\sqrt{\frac{1}{2}}$ liegen, so fallen sie im Hexakisoktaëder *mOn* in die Entfernung

Digitized by Google

$$\frac{2n}{n+1} \times \sqrt{\tfrac{1}{2}};\ (\text{§. } 114)$$

Man setze also jede der rhombischen Halbaxen *MR*, wie solche im Bilde des Oktaëders erscheint, = 1, verlängere sie, und mache ihre Verlängerung

$$= \frac{n-1}{n+1}$$

von ihr selbst, so bestimmt sich in ihr ein neuer Endpunct, welcher der gesuchte rhombische Eckpunct von *m*O*n* ist.

Nachdem auf diese Art die 26 Eckpuncte des Hexakisoktaëders projicirt sind, darf man nur diese Puncte nach demselben Gesetze durch gerade Linien verbinden, nach welchem die ihnen entsprechenden Ecke in der Wirklichkeit durch die Kanten verbunden sind, um die Projection der Gestalt selbst zu vollenden.

§. 710.

Zeichnung der übrigen holoëdrischen Gestalten.

Der vorhergehende §. enthält die allgemeine Regel für die Projection aller möglicher holoëdrischer Gestalten des Tesseralsystemes, weil man ja nur für *m* und *n* die ihnen entsprechenden numerischen Werthe substituiren darf, um diese Regel für irgend einen besonderen Fall in Anwendung zu bringen. Während es daher ganz überflüssig seyn würde, diese Anwendung durch Beispiele zu erläutern, so glaube ich doch für diejenigen, welche sich mit dieser Anwendung beschäftigen wollen, auf folgende Erleichterung aufmerksam machen zu müssen.

Weil alle Formen einer und derselben Krystallreihe auf eine gewisse Einheit der Dimensionen reducirt werden müssen, wenn sie mit einander vergleichbar seyn sollen, so scheint es vortheilhaft, alle Gestalten des Tesseralsystemes von gleicher Länge

Digitized by Google

der Hauptaxen darzustellen, sobald ihrer mehre zugleich abgebildet werden sollen. Unter dieser Voraussetzung kann man sich ein für alle Mal die den gewöhnlichsten Gestalten entsprechenden Eckpuncte auf eine Platte von Messingblech auftragen, selbige genau durchbohren lassen, und dann durch feine Nadelstiche auf das zur Darstellung des Bildes bestimmte Papier übertragen. Man wählt den Maassstab von einer für die gewöhnlichen Bilder passenden Grösse, etwa 2 Zoll für die Breite des Bildes, entwirft das System der 13 Axen im Oktaëder, und trägt darauf in jede der trigonalen und rhombischen Zwischenaxen beiderseits die den gewöhnlichsten Gestalten entsprechenden Verlängerungen ein. Diese Gestalten und die ihnen entsprechenden Verlängerungscoëfficienten sind etwa folgende:

Gestalt	Verlängerungscoëfficient der trigonalen Z. A.	Verlängerungscoëfficient der rhombischen Z. A.
2O	$\frac{1}{5}$	0
∞O	$\frac{1}{2}$	0
$3O\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$
4O2	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{4}$
$5O\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\infty O\frac{3}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
∞O2	1	$\frac{1}{3}$
∞O3	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$
2O2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
3O3	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$
∞O∞	2	1

Für die rhombischen Zwischenaxen dieser gewöhnlichen Gestalten kommen daher nur die Verlängerungen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$, für die trigonalen Zwischenaxen die Verlängerungen $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{4}$, 1 und 2 in An-

Digitized by Google

wendung, welche Zahlen man neben die durchbohrten Puncte schreibt, um jeder Verwechselung bei ihrer Uebertragung vorzubeugen; Fig. 798.

Endlich ist noch zu erwähnen, dass bei der Zeichnung von mO, ∞O und ∞On die rhombischen Zwischenaxen ganz ausser Acht gelassen werden, weil die Pole derselben keinen Eckpuncten dieser Gestalten entsprechen.

§. 711.

Zeichnung des Hexakistetraëders $\frac{mOn}{2}$.

In den geneigtflächig-semitesseralen Gestalten, welche allgemein durch das Hexakistetraëder $\frac{mOn}{2}$ repräsentirt werden, sind die Pole der rhombischen Zwischenaxen durch keine Eckpuncte bezeichnet, weshalb diese Axen gänzlich vernachlässigt werden können. Dagegen zerfällt jede trigonale Zwischenaxe in zwei ungleichwerthige Hälften, die holoëdrische und hemiëdrische Halbaxe (§. 130), von welchen die erstere in dem stumpferen, die andere in dem spitzeren sechsflächigen Eckpuncte endigt. Ausser diesen beiderlei sechsflächigen Eckpuncten giebt es nur noch sechs rhombische, den Polen der Hauptaxen entsprechende Eckpuncte. Die einfache Regel zur Construction eines Hexakistetraëders wird hiernach folgende.

Man entwerfe die drei Hauptaxen, so wie die vier trigonalen Zwischenaxen des Oktaëders, verlängere diese letzteren nach beiden Seiten, und nehme in jeder die der holoëdrischen Halbaxe entsprechende Verlängerung

$$\frac{2mn - (m+n)}{mn + (m+n)}$$

und die der hemiëdrischen Halbaxe entsprechende Verlängerung

$$\frac{2mn - (m - n)}{mn + (m - n)}$$

so sind alle Puncte gefunden, welche zur Construction der beiden Hexakistetraëder $\frac{mOn}{2}$ und $-\frac{mOn}{2}$ gefordert werden. Denn die Pole der Hauptaxen sind die sechs rhombischen Eckpuncte, die über den abwechselnden Oktaëderflächen gelegenen Endpuncte der holoëdrischen trigonalen Halbaxen die stumpferen, und die über den vier übrigen Oktaëderflächen gelegenen Eckpuncte der hemiëdrischen trigonalen Halbaxen die spitzeren sechsflächigen Eckpuncte der verlangten Gestalt. Je nachdem man dieselbe in der einen oder in der andern Stellung construiren will, wählt man die Endpuncte der beiderlei trigonalen Halbaxen über dem einen oder andern vierzähligen Flächeninbegriffe des Oktaëders.

§. 712.

Zeichnung der übrigen geneigtflächig-semitesseralen Gestalten.

Der vorhergehende §. enthält die Regel für die Projection sämmtlicher geneigtflächig-semitesseraler Gestalten, weil man nur für m und n die ihnen in irgend einer Gestalt zukommenden numerischen Werthe zu substituiren braucht, um dieselbe Regel für diese Gestalt in Anwendung zu bringen, weshalb auch jede Erläuterung derselben durch Beispiele überflüssig zu seyn scheint.

Dagegen kann man sich, wie für die Construction der holoëdrischen, so auch für jene der geneigtflächig-semitesseralen Gestalten ein Schema auf Messingblech entwerfen, in welchem die den gewöhnlichen Gestalten entsprechenden Eckpuncte ein für alle Mal eingetragen und durchbohrt sind, und nur durch feine Nadelstiche auf das Papier übertragen werden. Die gewöhnlichen Gestalten, und die ihnen entspre-

Digitized by Google

chenden Verlängerungscoëfficienten der trigonalen Halbaxen sind etwa folgende (§. 139):

Gestalt	Verlängerungscoëfficient der holoëdr. H. A.	der hemiëdr. H A.
$\frac{O}{2}$	0	2
$\frac{2O2}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
$\frac{3O3}{2}$	$\frac{4}{5}$	2
$\frac{\frac{3}{2}O}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{2O}{2}$	$\frac{1}{3}$	1
$\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{4O2}{2}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{5}$
$\frac{5O\frac{5}{3}}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{7}$

Es bedarf übrigens kaum einer Erwähnung, dass es für $\frac{O}{2}$ und alle $\frac{mOm}{2}$ unnöthig ist, die Pole der Hauptaxen mit überzutragen.

§. 713.

Zeichnung des Dyakisdodekaëders $\left[\frac{mOn}{2}\right]$.

In den Dyakisdodekaëdern $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ kommen ausser den sechs rhombischen Eckpuncten noch acht trigonale und zwölf unregelmässige Eckpuncte vor. Die ersteren sind die Pole der Hauptaxen, die anderen die Pole der trigonalen Zwischenaxen der resp. holoëdrischen Muttergestalt, und daher bereits nach §.

Digitized by Google

709 bestimmt. Was aber die unregelmässigen Eckpuncte betrifft, so fallen sie zwar in die Ebenen der Hauptschnitte, aber nicht in die rhombischen Zwischenaxen, weshalb sie in §. 141 durch ihre Coordinaten besonders bestimmt werden mussten; diese Coordinaten waren

$$\text{die kleinere} = \frac{m(n-1)}{mn-1}$$

$$\text{die grössere} = \frac{n(m-1)}{mn-1}$$

Die Regel für die Zeichnung dieser Gestalten wird daher folgende.

Man entwerfe die drei Hauptaxen *AA* und vier trigonalen Zwischenaxen *BB* Fig. 799 des Oktaëders nach der Regel in §. 708, bestimme auch die Verlängerung der letzteren nach dem Coëfficienten

$$\frac{2mn-(m+n)}{mn+(m+n)}$$

wie in §. 709. Hierauf nehme man in jeder Hauptaxe beiderseits vom Mittelpuncte aus die Längen

$$\frac{m(n-1)}{mn-1} \text{ und } \frac{n(m-1)}{mn-1}$$

indem man eine jede halbe Hauptaxe, so wie sie im Bilde erscheint, in ihrer Art = 1 setzt; dadurch bestimmen sich in jeder Hauptaxe zwei Puncte *a* und zwei Puncte *b*. Durch jeden dieser Puncte in einer jeden Hauptaxe lege man zwei, mit den beiden andern Hauptaxen parallele Linien, so bestimmen sich in der Ebene jedes Hauptschnittes acht Puncte *c*, welche die gesuchten unregelmässigen Eckpuncte sind.

Nun sind alle zur Construction des verlangten Dyakisdodekaëders in beiden Stellungen erforderlichen Puncte gefunden. Für den einen Gegenkörper nämlich wählt man die zwölf Puncte *c*, für den andern die zwölf Puncte *c'*, verbindet sie mit den sechs

Digitized by Google

Polen der Hauptaxen und den acht Polen der trigonalen Zwischenaxen, wie es der Verlauf des Kantennetzes vorschreibt, so ist die verlangte Gestalt in der einen oder andern Stellung als $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ oder $-\left[\frac{mOn}{2}\right]$ construirt.

§. 714.

Zeichnung der Pentagondodekaëder.

Für die Pentagondodekaëder fallen die Puncte *b* der vorhergehenden Construction in die Pole der Hauptaxen; die Construction vereinfacht sich also dahin, dass man, nachdem die trigonalen Eckpuncte gefunden sind, durch die Pole einer jeden Hauptaxe zwei, mit den andern beiden Hauptaxen parallele Linien legt, hierauf in jeder Hauptaxe vom Mittelpuncte aus nach beiden Seiten die Grösse

$$\frac{n-1}{n}$$

nimmt, indem man jede halbe Hauptaxe, wie solche im Bilde erscheint, in ihrer Art $= 1$ setzt, und durch die so bestimmten Puncte *a* Parallelen mit den Axen legt. Diese letzteren Parallelen kommen mit den ersteren in den Puncten *c* zum Durchschnitte, welche die gesuchten unregelmässigen Eckpuncte sind; Fig. 800.

Je nachdem man nun das Pentagondodekaëder in der einen oder in der andern Stellung, als $\frac{\infty On}{2}$ oder als $-\frac{\infty On}{2}$ zeichnen will, legt man entweder die mit *c* oder die mit *c'* bezeichneten Puncte der Zeichnung zu Grunde.

Man kann sich übrigens auch für die gewöhnlichsten parallelflächig-semitesseralen Gestalten ein Schema entwerfen, in welchem die zu ihrer Projection er-

Digitized by Google

forderlichen Puncte ein für alle Mal enthalten sind. Diese gewöhnlichsten Gestalten und die ihnen entsprechenden Verlängerungen der trigonalen Zwischenaxen und Coordinaten der unregelmässigen Eckpuncte sind etwa folgende (§. 149).

Gestalt	Verlängerungs-coëfficient der trig. Z. A.	Coordinaten der unregelm. Eckpuncte	
$\frac{\infty O\frac{3}{2}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{3}$	1
$\frac{\infty O2}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{\infty O3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{3}$	1
$\left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\left[\frac{4O2}{2}\right]$	$\frac{5}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{8}{7}$
$\left[\frac{5O\frac{5}{3}}{2}\right]$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{10}{11}$

B. Combinationen.

§. 715.

Binäre Combinationen.

Wenn eine binäre tesserale Combination gezeichnet werden soll, so hat man vor allen Dingen nach den in der reinen Krystallographie gegebenen Regeln der Combinationslehre, mit Zuziehung der Combinationsgleichung zu untersuchen, welche Modificationen die eine Gestalt durch die Flächen der andern erfährt. Diese Untersuchung wird im Allgemeinen lehren, ob die eine Gestalt an der andern eine Abstumpfung, eine Zuschärfung oder eine Zuspitzung gewisser Ecken oder Kanten hervorbringt, und ob die Lage der CK. durch gewisse Kanten oder andere singuläre Linien

in den Flächen der einen Gestalt bestimmt wird, oder nicht. Ergiebt sich für die CK. eine bestimmte regelmässige Lage zu gewissen Kanten oder Linien der einen Gestalt, so ist die Zeichnung der Combination ohne Weiteres mit grosser Leichtigkeit zu bewerkstelligen.

Dabei werden besonders folgende Regeln zu berücksichtigen seyn.

1) Wenn alle oder viele Kanten der einen Gestalt durch die Flächen der andern Gestalt regelmässig zugeschärft oder abgestumpft werden, so ist es besser, die zuschärfende oder abstumpfende Gestalt zuerst zu zeichnen, weil dann die Einzeichnung der andern Gestalt sehr leicht ist, und die kleinen Kanten, in welchen je drei oder mehre Zuschärfungs- oder Abstumpfungsflächen zusammenstossen, im Bilde sehr genau ausfallen. — Soll man z. B. die Combination $\infty O.2O2$ zeichnen, so construirt man zuerst das Ikositetraëder $2O2$, und trägt dann die Flächen des Rhombendodekaëders ein; aus demselben Grunde wird man bei der Comb. $\frac{O}{2}.\infty O\infty$ nicht mit dem Tetraëder, sondern mit dem Hexaëder, bei der Comb. $\infty O2.4O4$ nicht mit dem Tetrakishexaëder, sondern mit dem Ikositetraëder, bei der Comb. $\infty O.3O\frac{3}{2}$ nicht mit dem Rhombendodekaëder, sondern mit dem Hexakisoktaëder den Anfang machen. Dagegen wird in der Comb. $\frac{\infty O2}{2}.\infty O\infty$ erst das Pentagondodekaëder, in der Comb. $\left[\frac{4O2}{2}\right].\frac{\infty O2}{2}$ erst das Dyakisdodekaëder zu zeichnen seyn.
2) Wenn die vorherrschende Gestalt eine Zuschärfung oder Zuspitzung gewisser Ecke zeigt, und

zugleich die CK. gewissen ihrer Kanten oder singulären Linien parallel sind, dann fängt man gewöhnlich mit der vorherrschenden Gestalt an. So zeichnet man z. B. in der Comb. $\frac{2O2}{2}.\infty O$ erst das Trigondodekaëder, in der Comb. $O.\frac{\infty O2}{2}$ erst das Oktaëder, in der Comb. $\infty O2.2O2$ erst das Tetrakishexaëder; indess kann diese Regel eine Ausnahme erleiden, wenn die Zuspitzung sehr vielflächig, z. B. sechs- oder achtflächig, und die vorherrschende Gestalt sehr wenigflächig, z. B. O, $\infty O\infty$ oder auch ∞O ist, weil es dann oft bequemer ist, mit derjenigen Gestalt anzufangen, welche die Zuspitzung hervorbringt.

3) Ist die Zuspitzung von der Art, dass zwar die CK keiner Kante oder singulären Linie der vorherrschenden Gestalt parallel laufen, allein die Zuspitzungsflächen als Rhomben erscheinen, so ist es gewöhnlich vortheilhaft, die untergeordnete Gestalt zuerst zu zeichnen.

§. 716.

Fortsetzung.

Um die richtige Einzeichnung der Kanten der zweiten Gestalt in vorstehenden Fällen vollziehen zu können, dazu dient die Bestimmung der Lage der dreierlei Kanten *A*, *B* und *C* in den holoëdrischen, der Kanten *A'*, *B'* und *C'* in den geneigtflächig hemiëdrischen, und der Kanten *A''*, *B''* und *C''* in den parallelflächig hemiëdrischen Gestalten, wie solche durch die Coëfficienten der Zwischenaxen, so wie durch die Coordinaten der unregelmässigen Eckpuncte in der reinen Krystallographie gefunden wurde. Dass man übrigens nicht alle erforderlichen Puncte mittels dieser Coëfficienten zu bestimmen braucht, ist einleuch-

Digitized by Google

tend. Fallen z. B. die Ecke einer Zuspitzung in die Hauptaxen, und hat man die CK. eingetragen, so sucht man mittels der bekannten Coëfficienten der Zwischenaxen die Lage einer der Zuspitzungskanten an einem der Ecke, und erhält in dem Durchschnittspuncte dieser Kante mit der Hauptaxe das gesuchte Zuspitzungseck; legt man durch diesen Punct Parallelen mit den vier Kanten des Oktaëders, welche in derselben Hauptaxe zusammenlaufen, so erhält man sogleich in den Durchschnittspuncten dieser Parallelen mit den beiden andern Hauptaxen die richtigen Projectionen von vier andern Zuspitzungsecken. — Eben so ist bei solchen Zuspitzungen, deren Ecke in die trigonalen oder rhombischen Zwischenaxen fallen, zu berücksichtigen, dass durch je zwei einander zunächst liegende trigonale Eckpuncte, so wie durch je zwei in einem und demselben Hauptschnitte einander zunächst liegende rhombische Eckpuncte eine Parallele mit einer der Hauptaxen gezogen werden kann. — Durch die Berücksichtigung dieser und anderer Verhältnisse, wie z. B. des Parallelismus je zweier Gegenkanten, der gleichen Grösse beider Hälften einer und derselben Axe, u. s. w., kann man sich die Auffindung vieler Puncte sehr erleichtern, und zugleich eine grössere Genauigkeit des Bildes erreichen.

§. 717.

Bestimmung der CK. durch das Verhältniss der Kantensegmente.

Wenn aber die CK. nicht durch ihren Parallelismus mit gewissen Kanten oder singulären Linien der einen Gestalt bestimmt ist, so muss man untersuchen, in welchem Verhältnisse die Kanten der einen Gestalt durch die Flächen der andern geschnitten werden, oder wie sich die Lage der Combinationskante bestimmt, weil gerade davon die richtige Darstellung des Bildes abhängig ist. Nun liesse sich zwar jeden-

Digitized by Google

falls diese Bestimmung mittels der graphischen Methode des §. 703 erreichen; allein, wie einfach und sicher auch diese Methode in ihrem Wesen, so unbequem und ungenau ist sie oft in ihrer Anwendung, wenn die Ableitungscoëfficienten etwas gross werden, und die beiderlei Intersectionen, auf deren Durchschnittspunct es ankommt, sich unter sehr spitzen Winkeln schneiden. Könnte man also nach irgend einer andern Methode, ohne Hülfsconstructionen und unmittelbar zur richtigen Einzeichnung der Combinationskante gelangen, so wäre dies allerdings ein grosser Vortheil. Eine solche Methode nun gründet sich auf den Satz, dass die Kanten einer jeden Gestalt von den Flächen jeder andern Gestalt derselben Krystallreihe jedenfalls in rationalen Verhältnissen geschnitten werden; ein Satz, welcher sich leicht in der grössten Allgemeinheit erweisen lässt, und welchen wir in seiner Anwendung für die verschiedenen Krystallsysteme im Laufe dieses Abschnittes besonders kennen lernen werden. Die hierher schlagenden Untersuchungen sind allerdings für die holoëdrischen und hemiëdrischen Combinationen besonders vorzunehmen, weil die geschnittenen Kanten sowohl als die schneidenden Flächen in den beiderlei Gestalten nach Lage und Ausdehnung verschieden sind. Um jedoch den Umfang des gegenwärtigen Abschnittes nicht zu sehr zu vergrössern, können wir diese Untersuchungen nur auf die wichtigsten, und daher, mit Ausnahme der rhomboëdrischen, nur auf die holoëdrischen Combinationen der verschiedenen Krystallsysteme ausdehnen, weshalb wir denn auch für das Tesseralsystem insbesondere unsre Aufgabe dahin einschränken, die Verhältnisse der Kantensegmente in der Combination zweier holoëdrischer tesseraler Gestalten zu bestimmen.

Digitized by Google

§. 718.

Kantensegmente in der Combination $mOn.m'On'$.

Aus der Combination der Gleichung

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+z=1$$

mit den in §. 120 stehenden Gleichungen der Flächen F', F'' und F''' erhält man die Gleichungen der drei Kantenlinien A, B und C der Fläche F in mOn wie folgt:

Gleichungen der Kante A

$$x-y=0,\quad \frac{(m+n)y}{mn}+z=1$$

Gleichungen der Kante B

$$x=0,\quad \frac{y}{n}+z=1$$

Gleichungen der Kante C

$$y-z=0,\quad \frac{x}{m}+\frac{(n+1)y}{n}=1$$

Die Gleichung der mit F analog liegenden Fläche F_1 in der zweiten Gestalt $m'On'$ ist

$$\frac{x}{m'}+\frac{y}{n'}+z=k$$

indem wir rechter Hand vom Gleichheitszeichen irgend eine andere Constante statt der Einheit einführen müssen, weil die Möglichkeit einer Combination im Allgemeinen mit der Annahme gleicher Hauptaxen unverträglich ist.

Combinirt man die Gleichung von F_1 mit den Gleichungen von A, B und C, so erhält man die Coordinaten ihrer resp. Durchschnittspuncte, welche ich mit (a), (b) und (c) bezeichnen will, nämlich:

für den Durchschnittspunct (a) in A

$$x=\frac{mnm'n'(k-1)}{mn(m'+n')-m'n'(m+n)}$$

$$y=x$$

$$z-1=\frac{m+n}{mn}x$$

Digitized by Google

für den Durchschnittspunct (b) in B

$$x = 0$$

$$y = \frac{nn'(k-1)}{n-n'}$$

$$z - 1 = -\frac{1}{n}y$$

für den Durchschnittspunct (c) in C

$$x = \frac{mm'[n(n'+1) - n'(n+1)k]}{m'(n'+1)n - m(n+1)n'}$$

$$y - \frac{n}{n+1} = -\frac{n}{m(n+1)}x$$

$$z - \frac{n}{n+1} = -\frac{n}{m(n+1)}x$$

§. 719.

Fortsetzung.

Mittels der gefundenen Coordinaten der Puncte (a), (b) und (c) und mittels der aus §. 116 bekannten Coordinaten der drei Eckpuncte der Fläche F lassen sich nun die Segmente der Kanten A, B und C leicht berechnen, wie folgt.

I. Segmente der Kante A.

Wir wollen diese Segmente mit $\Sigma(A)$ bezeichnen; das eine Segment wird begränzt von dem oktaëdrischen Eckpuncte, dessen Coordinaten

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 1$$

und von dem Durchschnittspuncte (a), dessen Coordinaten wir mit x, y und z bezeichnen wollen; es ist daher

$$\Sigma(A) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$$

$$= \frac{x\sqrt{2m^2n^2 + (m+n)^2}}{mn}$$

$$= \frac{m'n'(k-1)\sqrt{2m^2n^2 + (m+n)^2}}{mn(m'+n') - m'n'(m+n)}$$

Nun ist aber nach §. 116 die Kante

$$A = \frac{\sqrt{2m^2n^2 + (m+n)^2}}{mn + m + n}$$

folglich das am oktaëdrischen Eckpuncte gelegene Segment:

$$\Sigma(A) = \frac{m'n'(mn+m+n)(k-1)}{mn(m'+n') - m'n'(m+n)} \times A$$

und das am sechsflächigen Eckpuncte gelegene Segment:

$$\Sigma(A) = \frac{mn(m'n'+m'+n') - m'n'(mn+m+n)k}{mn(m'+n') - m'n'(m+n)} \times A$$

II. Segmente der Kante *B*.

Wir bezeichnen diese Segmente mit $\Sigma(B)$; das eine, am oktaëdrischen Eckpuncte gelegene Segment wird begränzt von diesem Puncte, dessen Coordinaten

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 1$$

und von dem Puncte (*b*), dessen Coordinaten wir mit x, y und z bezeichnen wollen; es ist also

$$\Sigma(B) = \sqrt{y^2 + (z-1)^2}$$
$$= \frac{y\sqrt{n^2+1}}{n}$$

nun ist aber nach §. 116 die Kante

$$B = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$$

folglich das am oktaëdrischen Eckpuncte gelegene Segment:

$$\Sigma(B) = \frac{n'(n+1)(k-1)}{n-n'} \times B$$

und das am rhombischen Eckpuncte gelegene Segment:

$$\Sigma(B) = \frac{n(n'+1) - n'(n+1)k}{n-n'} \times B$$

III. Segmente der Kante *C*.

Wir bezeichnen diese Segmente mit $\Sigma(C)$; das eine, am rhombischen Eckpuncte gelegene Segment

wird begränzt vom rhombischen Eckpuncte, dessen Coordinaten

$$x' = 0, \; y' = z' = \frac{n}{n+1}$$

und von dem Durchschnittspuncte (c), dessen Coordinaten wir $= x$, y und z setzen wollen; es ist also

$$\Sigma(C) = \sqrt{x^2 + 2\left(y - \frac{n}{n+1}\right)^2}$$

$$\Sigma(C) = \frac{x\sqrt{m^2(n+1) \;\; + 2n^2}}{m(n+1)}$$

Nun ist aber nach § 116 die Kante

$$C = \frac{n\sqrt{m^2(n+1)^2 + 2n^2}}{(mn+m+n)(n+1)}$$

folglich wird das am rhombischen Eckpuncte gelegene Segment

$$\Sigma(C) = \frac{m'[n(n'+1) - n'(n+1)k](mn+m+n)}{n[m'(n'+1)n - m(n+1)n']} \times C$$

und das am sechsflächigen Eckpuncte gelegene Segment

$$\Sigma(C) = \frac{(n+1)[mn(m'n'+m'+n') - m'n'(mn+m+n)k]}{n[m'(n'+1)n - m(n+1)n']} \times C$$

Da man nun k jedenfalls rational annehmen kann, so folgt,

dass die Segmente der Kantenlinien des Hexakisoktaëders mOn jedenfalls rationale Multipla oder Submultipla der Kantenlinien selbst sind.

§. 720.

Fortsetzung.

Vergleichen wir diejenigen Kantensegmente, welche von einem und demselben Eckpuncte auslaufen, mit einander, so erhalten wir folgende Resultate:

Die am Pole der Hauptaxe gelegenen Segmente der Kanten A und B verhalten sich:

Digitized by Google

$$\Sigma(A):\Sigma(B) = \frac{m'(mn+m+n)A}{mn(m'+n')-m'n'(m+n)} : \frac{(n+1)B}{n-n'}$$

Die am Pole der trigonalen Zwischenaxe gelegenen Segmente der Kanten A und C verhalten sich:

$$\Sigma(A):\Sigma(C) = \frac{nA}{mn(m'+n')-m'n'(m+n)} : \frac{(n+1)C}{m'(n'+1)n-m(n+1)n'}$$

Die am Pole der rhombischen Zwischenaxe gelegenen Segmente der Kanten B und C verhalten sich:

$$\Sigma(B):\Sigma(C) = \frac{nB}{n-n'} : \frac{m'(mn+m+n)C}{m'(n'+1)n-m(n+1)n'}$$

Mittels dieser Proportionen wird man leicht zu der richtigen Einzeichnung der Combinationskante gelangen, welche untergeordnete Gestalt auch mit dem Hexakisoktaëder mOn combinirt seyn mag.

1) Combination $mOn.m'On'$; dann ist
bei achtflächiger Zuspitzung der ditetragonalen Ecke das Verhältniss $\Sigma(A):\Sigma(B)$,
bei sechsflächiger Zuspitzung der ditrigonalen Ecke das Verhältniss $\Sigma(A):\Sigma(C)$,
bei vierflächiger Zuspitzung der rhombischen Ecke das Verhältniss $\Sigma(B):\Sigma(C)$
zu berücksichtigen.

2) Combination $mOn.m'Om'$;
bei vierflächiger Zuspitzung der ditetragonalen Ecke:

$$\Sigma(A):\Sigma(B) = \frac{(mn+m+n)A}{2mn-m'(m+n)} : \frac{(n+1)B}{n-m'}$$

bei dreifl. Zusp. der ditrig. Ecke:

$$\Sigma(A):\Sigma(C) = \frac{nA}{2mn-m'(m+n)} : \frac{(n+1)C}{(m'+1)n-m(n+1)}$$

3) Combination $mOn.m'O$;
bei dreifl. Zusp. der ditrig. Ecke:

$$\Sigma(A):\Sigma(C) = \frac{nA}{mn(m'+1)-m'(m+n)} : \frac{(n+1)C}{2m'n-m(n+1)}$$

bei Zusch. der rhombischen Ecke:

$$\Sigma(B):\Sigma(C) = \frac{nB}{n-1} : \frac{m'(mn+m+n)C}{2m'n-m(n+1)}$$

Digitized by Google

4) Combination $mOn.\infty On'$;

bei vierfl. Zusp. der ditetr. Ecke:

$$\Sigma(A):\Sigma(B) = \frac{(mn+m+n)A}{mn-n'(m+n)} : \frac{(n+1)B}{n-n'}$$

bei Zusch. der rhombischen Ecke:

$$\Sigma(B):\Sigma(C) = \frac{nB}{n-n'} : \frac{(mn+m+n)C}{(n'+1)n}$$

5) Combination $mOn.\infty O$;

$$\Sigma(B):\Sigma(C) = \frac{nB}{n-1} : \frac{(mn+m+n)C}{2n}$$

6) Combination $mOn.O$;

$$\Sigma(A):\Sigma(C) = \frac{nA}{2mn-m-n} : \frac{(n+1)C}{2n-m(n+1)}$$

7) Combination $mOn.\infty O\infty$;

$$\Sigma(A):\Sigma(B) = (mn+m+n)A : (m+n)(n+1)B$$

Man kann mittels dieser für das Hexakisoktaëder gefundenen Resultate die Combinationskante auch in alle übrigen Gestalten richtig eintragen, wenn man dieselben in ihrer bildlichen Darstellung dadurch auf ein Hexakisoktaëder zurückführen will, dass man in ihren Flächen alle diejenigen Linien zieht, welche den Kanten eines Hexakisoktaëders entsprechen. Allein abgesehen davon, dass man dadurch genöthigt wäre, eine Menge Hülfslinien zu ziehen, von denen weiter kein Gebrauch gemacht wird, ist es noch in anderer Hinsicht viel vortheilhafter, die Lage der CK. auch in den übrigen Gestalten nur von den Segmenten ihrer **wirklichen** Kantenlinien abhängig zu machen. Wir haben daher unsere Untersuchungen über die Verhältnisse der Kantensegmente für jede der übrigen Gestalten besonders geltend zu machen.

§. 721.

Kantensegmente des Ikositetraëders mOm.

In dem Ikositetraëder verschwindet die Kante A, und jede Fläche wird ausser von den Kanten B und C

noch von den beiden gleichwerthigen Kanten B' und C' begränzt, Fig. 801. Denken wir nun ein Hexakisoktaëder $m'On'$ als untergeordnete Gestalt in Combination mit mOm, so wird für den Fall einer vierfl. Zusp. der rhomb. Ecke das bereits gefundene Verhältniss von $\Sigma(B):\Sigma(C)$ zu benutzen seyn, während für die beiden Fälle einer achtfl. Zusp. der tetragonalen und einer sechsfl. Zusp. der trigonalen Ecke die Verhältnisse von $\Sigma(B):\Sigma(B')$, und $\Sigma(C):\Sigma(C')$ berechnet werden müssen, um die Lage der CK. aufzufinden.

Die Methode dieser Berechnung ist ganz dieselbe, welche bisher befolgt wurde; ihre Ausführung vereinfacht sich aber etwas wegen der Gleichheit der Coëfficienten in dem Zeichen mOm. Man sucht nämlich die Gleichungen der beiden Kanten B' und C' aus der Gleichung der Fläche F

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{m}+z=1$$

combinirt die gefundenen Gleichungen mit der Gleichung der Fläche F_1 von $m'On'$

$$\frac{x}{m'}+\frac{y}{n'}+z=k$$

und erhält so die Coordinaten der beiden Durchschnittspuncte (b') und (c'), mittels welcher sich dann leicht die Kantensegmente von B' und C' berechnen lassen. Führt man diese Rechnungen durch, so gelangt man endlich auf folgende Resultate:

1) Combination $mOm.m'On'$;

bei achtflächiger Zuspitzung der tetragonalen Ecke verhalten sich die Segmente

$$\Sigma(B):\Sigma(B')=\frac{n'B}{n'-m}:\frac{m'B'}{m'-m}$$

bei sechsflächiger Zuspitzung der trigonalen Ecke ist

$$\Sigma(C):\Sigma(C')=n'(m'+1)-m'(m+1):m'(n'+1)-n'(m+1)$$

Digitized by Google

bei vierflächiger Zuspitzung der rhombischen Ecke endlich ist

$$\Sigma(B) : \Sigma(C) = \frac{mB}{m-n'} : \frac{m'(m+2)C}{m'(n'+1)-(m+1)n'}$$

2) Combination $mOm.m'O$;

es verhalten sich die Kantensegmente

bei Zuschärfung der rhombischen Ecke:

$$\Sigma(B) : \Sigma(C) = \frac{mB}{m-1} : \frac{(m+2)C}{2m'-m-1}$$

bei dreifl. Zusp. der trigonalen Ecke:

$$\Sigma(C) : \Sigma(C) = (mm'-1)C : (m+1-2m')C$$

3) Combination $mOm.\infty On'$;

es verhalten sich die Kantensegmente

bei vierfl. Zusp. der tetr. Ecke:

$$\Sigma(B) : \Sigma(B) = n'B : (n'-m)B$$

bei Zusch. der rhomb. Ecke:

$$\Sigma(B) : \Sigma(C) = \frac{mB}{m-n'} : \frac{(m+2)C}{n'+1}$$

4) Combination $mOm.\infty O$;

$$\Sigma(B) : \Sigma(C) = \frac{mB}{m-1} : (\tfrac{1}{2}m+1)C$$

Für alle $m'Om'$ und daher auch für O und $\infty O\infty$ ist jedenfalls die CK. parallel der gleichschenkligen Diagonale der Flächen von mOm.

§. 722.

Kantensegmente des Triakisoktaëders mO.

Für das Triakisoktaëder kommt statt der Kante C, welche durch die Höhenlinie jeder Fläche repräsentirt wird, die Kante A' in Rücksicht, Fig. 802; auch ist die Kante B zu verdoppeln, weil je zwei Kanten dieser Art eine der regelmässigen Kanten von mO bilden. Man suche daher die Gleichungen der Kante A', welche

$$x - z = 0,\ \text{und}\ \frac{(m+1)x}{m} + y = 1$$

Digitized by Google

sind, und combinire sie mit der Gleichung

$$\frac{x}{m'} + \frac{y}{n'} + z = k$$

so erhält man die Coordinaten eines Durchschnittspunctes (a'), und mittels selbiger die Segmente der Kante A'. Führt man die hier nur angedeuteten Rechnungen durch, so gelangt man endlich auf folgende Resultate:

1) Combination $mO.m'On'$;

es verhalten sich die Kantensegmente

bei achtfl. Zusp. der ditetr. Ecke:

$$\Sigma(A):\Sigma(B) = m'(2m+1)(n'-1)A:[m'n'(m+1)-m(m'+n')]B$$

bei sechsfl. Zusp. der trig. Ecke:

$$\Sigma(A):\Sigma(A') = m(m'+n')-m'n'(m+1):m(m'+1)n'-m'(m+1)$$

2) Combination $mO.m'Om'$;

Es verhalten sich die Kantensegmente

bei vierfl. Zusp. der ditetr. Ecke:

$$\Sigma(A):\Sigma(B) = (2m+1)(m'-1):m'(m+1)-2m$$

bei dreifl. Zusp. der trig. Ecke:

$$\Sigma(A):\Sigma(A') = 2m-m'(m+1):mm'-1$$

3) Combination $mO.\infty On'$;

es verhalten sich die Kantensegmente:

$$\Sigma(A):\Sigma(B) = (2m+1)(n'-1):n'(m+1)-m$$

4) Combination $mO.\infty O\infty$;

$$\Sigma(A):\Sigma(B) = (2m+1)A:(m+1)B$$

Für die Combinationen mit $m'O$, ∞O und O ist jedenfalls $\Sigma(A) = \Sigma(A')$, oder die CK. der Kante B parallel.

§. 723.

Kantensegmente des Tetrakishexaëders ∞On.

Für das Tetrakishexaëder ∞On ist statt der Kante B, welche nur durch die Höhenlinien der Flächen repräsentirt wird, die Kante A' zu berücksichtigen, Fig. 803; auch ist die Kante C zu verdoppeln, da je

zwei dieser Kanten eine der regelmässigen Kanten von ∞On bilden.

Die Gleichungen der Kante A' sind:

$$x + y = 0, \text{ und } -\frac{x}{n} + z = 1$$

Durch Combination dieser Gleichungen mit der Gleichung

$$\frac{x}{m'} + \frac{y}{n'} + z = k$$

finden sich die Coordinaten des Durchschnittspunctes (a'), und mittels desselben die Segmente der Kante A'. Führt man diese Rechnungen durch, so gelangt man endlich auf folgende Resultate:

1) Combination $\infty On.m'On'$;

es verhalten sich die Kantensegmente

bei achtfl. Zusp. der tetr. Ecke:

$$\Sigma(A) : \Sigma(A') = m'n' - (m'-n')n : m'n' - (m'+n')n$$

bei sechsfl. Zusp. der ditrig. Ecke:

$$\Sigma(A) : \Sigma(C) = 2nn'A : [n(m'+n') - m'n']C$$

2) Combination $\infty On.m'Om'$;

bei vierfl. Zusp. der tetr. Ecke:

$$\Sigma(A) : \Sigma(A') = m' : m' - 2n$$

bei dreifl. Zusp. der ditrig. Ecke:

$$\Sigma(A) : \Sigma(C) = 2nA : (2n - m')C$$

3) Combination $\infty On.m'O$;

$$\Sigma(A) : \Sigma(C) = 2nA : [n(m'+1) - m']C$$

4) Combination $\infty On.O$;

$$\Sigma(A) : \Sigma(C) = 2nA : (2n-1)C$$

Für die Combinationen mit $\infty On'$, ∞O und $\infty O\infty$ ist stets $\Sigma(A) = \Sigma(A')$, oder die CK. der Kante C parallel.

§. 724.

Kantensegmente in ∞O, O und $\infty O\infty$.

Man setze in den Verhältnissen der Kantensegmente von A und A' für ∞On und mO $n = 1$ und

Digitized by Google

$m = \infty$, so folgen für die Combinationen des Rhombendodekaëders die nachstehenden Resultate:

1) Combination $\infty O.mOn$;

bei achtfl. Zusp. der tetr. Ecke:

$$\Sigma(A) : \Sigma(A') = mn - m + n : mn - m - n$$

bei sechsfl. Zusp. der trig. Ecke:

$$\Sigma(A) : \Sigma(A') = m + n - mn : mn - m + n$$

2) Combination $\infty O.mOm$;

bei vierfl. Zusp. der tetr. Ecke:

$$\Sigma(A) : \Sigma(A') = m : m - 2$$

bei dreifl. Zusp. der trig. Ecke:

$$\Sigma(A) : \Sigma(A') = 2 - m : m$$

Setzt man in den für mOm berechneten Verhältnissen der Kantensegmente $\Sigma(B)$ und $\Sigma(B')$ $m = 1$, so folgt für das Oktaëder:

1) Combination $O.mOn$,

$$\Sigma(B) : \Sigma(B') = \frac{nB}{n-1} : \frac{mB}{m-1}$$

2) Combination $O.\infty On$,

$$\Sigma(B) : \Sigma(B') = nB : (n-1)B$$

Setzt man endlich in den für mOm berechneten Verhältnissen der Kantensegmente $\Sigma(C)$ und $\Sigma(C')$ $m = \infty$, so folgt für das Hexaëder:

1) Combination $\infty O\infty.mOn$,

$$\Sigma(C) : \Sigma(C') = mC : nC$$

2) Combination $\infty O\infty.mO$,

$$\Sigma(C) : \Sigma(C') = mC : C$$

§. 725.

Mehrzählige Combinationen.

Für die drei - und mehrzähligen Combinationen hat man besonders darauf zu achten, welche Gestalt oder welche Gestalten eine vorherrschende Bestimmung auf die Verhältnisse der übrigen Gestalten ausüben, indem die letzteren leicht in das Bild eingezeichnet

Digitized by Google

werden können, sobald nur die ersteren gezeichnet sind. Soll z. B. die bekannte Combination des Bleiglanzes $O.\infty O\infty.\infty O.2O$ gezeichnet werden, so macht man nicht mit O oder $\infty O\infty$, sondern mit $2O$ den Anfang, zeichnet darauf die Flächen von $\infty O\infty$, und trägt nun mit Leichtigkeit die Flächen der vorherrschendsten Gestalt O und der untergeordneten Gestalt ∞O ein. Soll dagegen die Combination des tetraëdrischen Kupferglanzes $\frac{2O2}{2}.\infty O.\frac{O}{2}.\frac{\frac{1}{2}O}{2}$ gezeichnet werden, so fängt man mit der vorherrschenden Gestalt $\frac{2O2}{2}$ an, und zeichnet die übrigen Gestalten nach der Reihe ein, wie ihre Zeichen auf einander folgen. Wäre aber in derselben Combination das Tetraëder $\frac{O}{2}$ nicht enthalten, so wird die Zeichnung schneller und richtiger gefertigt werden, wenn man mit $\frac{\frac{1}{2}O}{2}$ den Anfang macht, weil die Flächen der übrigen Gestalten eben so leicht nachzutragen sind wie vorher, die kleinen Kanten aber, welche in den stumpferen trigonalen Ecken des Deltoiddodekaëders zusammenlaufen, dadurch am leichtesten und sichersten construirt werden, dass man diese Gestalt zuerst zeichnet. Ueberhaupt hat der Umstand, ob und welche eigenthümliche Kanten der untergeordneten Gestalten vorhanden sind, einen grossen Einfluss auf die Wahl derjenigen Gestalten, die zuerst gezeichnet werden sollen.

Digitized by Google

Drittes Capitel.

Von der Zeichnung der tetragonalen Gestalten.

A. Axen und einfache Gestalten.

§. 726.

Axensystem der Grundgestalt.

Da die Hauptaxe und die beiden Nebenaxen des Tetragonalsystemes eben so wie die drei Hauptaxen des Tesseralsystemes auf einander rechtwinklig sind, so kann man von der Projectionsmethode der Hauptaxen des Oktaëders, ja, mit Beibehaltung derselben Werthe der Winkel δ und ε, unmittelbar von der in Fig. 796 gefundenen Projection dieser Axen Gebrauch machen, um die Axen einer jeden tetragonalen Krystallreihe ihrer Lage nach richtig darzustellen. Weil aber die Hauptaxe der tetragonalen Grundgestalt P einen von den Nebenaxen verschiedenen Werth hat, während in dem Bilde der Hauptaxen des Oktaëders die drei Linien AA', BB' und CC' nur unter Voraussetzung ihrer in der Wirklichkeit Statt findenden Gleichheit richtig sind, so müssen wir, wenn BB' und CC' unverändert als die Nebenaxen der Grundgestalt P beibehalten werden sollen, die verticale Hauptaxe AA' angemessen verändern, um das für diese Grundgestalt gültige Verhältniss der Hauptaxe zur Nebenaxe $= a : 1$ herzustellen. Man sucht zu dem Ende in der Proportion

$$1 : a = MA : x$$

das vierte Glied x, trägt diese Linie von M aus beiderseits in die nöthigenfalls verlängerte Linie AA' ein, und erhält so zwei Puncte, welche die Pole der gesuchten Hauptaxe sind. Hierauf braucht man nur die Endpuncte der drei Axen durch gerade Linien zu verbinden, um die Grundgestalt P selbst darzustellen.

Digitized by Google

Da bei der Zeichnung der ditetragonalen Pyramiden und anderer Gestalten dieses Systemes die Zwischenaxen zu berücksichtigen sind, so ziehe man durch den Mittelpunct *M* zwei Parallelen mit den Mittelkanten der Grundgestalt, welche mit denselben zum Durchschnitte kommen, und in dieser ihrer Lage und Begränzung die Zwischenaxen der Grundgestalt darstellen.

§. 727.

Zeichnung der Gestalten *m*P, *m*P*n* und *m*P∞.

Soll irgend eine Pyramide *m*P der Hauptreihe gezeichnet werden, so vervielfältigt man die Hauptaxe der Grundgestalt nach dem Coëfficienten *m*, und erhält dadurch die Pole der Hauptaxe von *m*P, welche man nur noch mit den Eckpuncten der Basis zu verbinden hat, um die verlangte Gestalt selbst darzustellen.

Soll eine ditetragonale Pyramide *m*P*n* gezeichnet werden, so verlängert man die Zwischenaxen der Grundgestalt beiderseits, macht die Verlängerung jeder Halbaxe $= \frac{n-1}{n+1}$ von ihr selbst, verbindet die dadurch bestimmten Endpuncte derselben mit den Endpuncten der Nebenaxen, und erhält so die Basis aller Glieder der nach dem Coëfficienten *n* abgeleiteten Zwischenreihe. Hierauf bestimmt man die Pole der Hauptaxe *ma*, und verbindet dieselben mit den Eckpuncten der Basis, wodurch die Construction der verlangten Gestalt *m*P*n* vollendet wird.

Soll endlich eine tetragonale Pyramide *m*P∞ aus der Nebenreihe gezeichnet werden, so legt man durch die Endpuncte der Nebenaxen der Grundgestalt Parallelen mit ihnen selbst, oder macht auch die Verlängerung der halben Zwischenaxen ihnen selbst gleich (denn $\frac{\infty-1}{\infty+1} = 1$) und erhält so die Basis aller Py-

ramiden der Nebenreihe. Hierauf bestimmt man die Pole der Hauptaxe und vollendet die Construction wie vorher.

§. 728.

Zeichnung der Sphenoide und Skalenoëder.

Soll das tetragonale Sphenoid $\frac{mP}{2}$ oder mS gezeichnet werden, so bestimmt man zuvörderst in der Projection des Axensystemes die Länge der Hauptaxe AA von mP, Fig. 804, legt hierauf durch die Pole derselben Parallelen mit den Zwischenaxen der Grundgestalt, und trägt diese Zwischenaxen in ihre resp. Parallelen von den Polen der Hauptaxe aus nach beiden Richtungen einmal ein. Man erhält so in jeder der Parallelen, als den horizontalen Polkanten des zu construirenden Sphenoides, zwei Puncte C als die Eckpuncte desselben. Je nachdem man nun die vier Puncte C oder die vier Puncte C' durch gerade Linien verbindet, erhält man das verlangte Sphenoid in der einen oder andern Stellung.

Die Zeichnung der tetragonalen Skalenoëder gründet sich unmittelbar auf die der Sphenoide, indem man die secundäre Ableitung derselben zu Hülfe nimmt. Man reducirt daher jedenfalls das Zeichen $\frac{mPn}{2}$ auf das Zeichen $\frac{m}{n}S^n$, und zeichnet zuerst das eingeschriebene Sphenoid $\frac{m}{n}S$ nach der so eben angegebenen Regel, wodurch die Mittelpuncte des verlangten Skalenoëders in beiden Stellungen gefunden werden. Hierauf verlängert man die Hauptaxe des Sphenoides beiderseits nach dem Coëfficienten n, erhält so die Poleckpuncte des Skalenoëders, welche man nur mit den

Digitized by Google

gefundenen Mittelpuncten zu verbinden braucht, um die Construction zu vollenden.

§. 729.

Zeichnung tetragonaler Pyramiden der dritten Art.

Um eine tetragonale Pyramide von abnormer Flächenstellung $\frac{l}{r}\frac{mPn}{2}$ oder $\frac{r}{l}\frac{mPn}{2}$ zu zeichnen, entwirft man zuvörderst nach der in §. 727 angegebenen Regel die ditetragonale Basis der Pyramide mPn, verlängert hierauf die abwechselnden Seiten derselben bis zu ihren gegenseitigen Durchschnitten, und erhält so die tetragonale Basis der verlangten Gestalt. Endlich bestimmt man die Pole der Hauptaxe, verbindet selbige mit den Eckpuncten der Basis, und die Construction ist vollendet.

§. 730.

Zeichnung der tetragonalen Trapezoëder.

Da die Polkanten der oberen oder unteren Hälfte der tetragonalen Trapezoëder $r\frac{mPn}{2}$ oder $l\frac{mPn}{2}$ dieselbe Lage haben wie jene der gleichnamigen Hälfte der tetragonalen Pyramiden der dritten Art $\frac{r}{l}\frac{mPn}{2}$ oder $\frac{l}{r}\frac{mPn}{2}$, so beginnt man ihre Construction damit, die obere Hälfte einer von diesen Pyramiden nach der Regel des vorhergehenden §. zu entwerfen, indem man sich zugleich diejenigen Puncte B ihrer Mittelkanten notirt, in welchen dieselben von den Nebenaxen geschnitten werden, Fig. 805. Da nun der Abstand der Mittelecke des Trapezoëders $rl\frac{mPn}{2}$ von der Ebene der Basis nach §. 240

$$x = \frac{ma(n-1)}{n(n+1)}$$

Digitized by Google

so nehme man in der oberen Hälfte ma der Hauptaxe vom Mittelpuncte M aus den aliquoten Theil

$$\frac{n-1}{n(n+1)}$$

wodurch sich in ihr der Punct D bestimmt. Durch diesen Punct lege man zwei, mit den Diagonalen der tetragonalen Basis parallele Linien, welche mit den Polkanten der Pyramide zum Durchschnitte kommen, und die vier oberen Mitteleckpuncte E bestimmen. Jeden dieser Puncte E verbindet man nun durch eine gerade Linie mit dem zunächst gelegenen Puncte B, verlängert dieselbe über B, und macht die Verlängerung $BE' = BE$, so bestimmen sich die vier unteren Mitteleckpuncte E', worauf denn leicht die noch fehlenden diagonalen Mittelkanten und die Polkanten der unteren Hälfte des Trapezoëders gezeichnet werden können.

B. Combinationen.

§. 731.

Kantensegmente der Pyramide mPn in ihrer Comb. mit $m'Pn'$.

Für die Ausführung der Zeichnung binärer und mehrzähliger tetragonaler Combinationen sind die im ersten Capitel angegebenen allgemeinen Regeln zu berücksichtigen; was aber die Lage der Combinationskante betrifft, so haben wir, wenn solche nicht graphisch nach der Vorschrift des §. 703 gefunden werden soll, ihre Bestimmung von den Verhältnissen der Segmente abhängig zu machen, in welche die Kanten der einen Gestalt von den Flächen der andern geschnitten werden.

Es sey also die Combination einer ditetragonalen Pyramide mPn mit einer zweiten dergleichen Pyramide $m'Pn'$ gegeben, so wird jede Fläche F der ersteren von einer Fläche F_1 der zweiten geschnitten,

Digitized by Google

1) in den Kanten X und Y, bei achtfl. Zusp. der Polecke;
2) in den Kanten X und Z, bei vierfl. Zusp. der normalen Mittelecke;
3) in den Kanten Y und Z, bei vierfl. Zusp. der diagonalen Mittelecke.

Wir haben nun die, diesen drei Combinationserscheinungen entsprechenden Verhältnisse der Kantensegmente für mPn zu berechnen.

Wenn die Gleichung der Fläche F

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

ist, so sind die Gleichungen

$$\text{der Kante } X \begin{cases} \dfrac{x}{ma} + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{der Kante } Y \begin{cases} \dfrac{x}{ma} + \dfrac{(n+1)y}{n} = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{der Kante } Z \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y}{n} + z = 1 \end{cases}$$

Nun sey die Gleichung der mit der F analog liegenden Fläche F_1 in $m'Pn'$

$$\frac{x}{m'a} + \frac{y}{n'} + z = k$$

so werden die Coordinaten ihrer Durchschnittspuncte (x), (y) und (z) mit den drei Kanten X, Y und Z folgende:

Für den Durchschnittspunct (x):

$$x = \frac{mm'a(k-1)}{m-m'}, \text{ oder } x - ma = -maz$$

$$y = 0$$

$$z = \frac{m-m'k}{m-m'}, \text{ oder } z - 1 = -\frac{x}{ma}$$

Digitized by Google

Für den Durchschnittspunct (y):

$$x = \frac{mm'a[n'(n+1)k - n(n'+1)]}{m(n+1)n' - m'(n'+1)n}$$

oder
$$x - ma = -\frac{ma(n+1)y}{n}$$

$$y = \frac{(m-m'k)nn'}{m(n+1)n' - m'(n'+1)n} = (m-m'k)Q$$

$$z = y$$

Für den Durchschnittspunct (z):

$$x = 0$$

$$y = \frac{nn'(k-1)}{n-n'}$$

$$z - 1 = -\frac{y}{n}$$

Durch Combination der Coordinaten der Puncte (x) und (y) mit den Coordinaten

$$x' = ma, \; y' = 0, \; z' = 0$$

des Poleckpunctes finden sich die am Pole gelegenen Segmente der Kanten X und Y wie folgt:

$$\Sigma(X) = \sqrt{(x-ma)^2 + z^2}$$

$$= \frac{m-m'k}{m-m'}\sqrt{m^2a^2+1}$$

$$= \frac{m-m'k}{m-m'}X, \text{ (§ 223)}$$

$$\Sigma(Y) = \sqrt{(x-ma)^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \frac{Q}{n}\sqrt{m^2a^2(n+1)^2 + 2n^2}$$

$$= \frac{n+1}{n}QY, \text{ (§. 223)}$$

Durch Combination der Coordinaten der Puncte (x) und (z) mit den Coordinaten

$$x' = 0, \; y' = 0, \; z' = 1$$

des normalen Mitteleckpunctes der Fläche F finden sich die an diesem Mittelecke gelegenen Segmente der Kanten X und Z, wie folgt:

Digitized by Google

$$\Sigma(X) = \sqrt{x^2 + (z-1)^2}$$
$$= (k-1)\frac{m'}{m'-m}X, \text{ (§. 223)}$$
$$\Sigma(Z) = \sqrt{y^2 + (z-1)^2}$$
$$= (k-1)\frac{n'(n+1)}{n'-n}Z, \text{ (§. 223)}$$

Da nun die am diagonalen Mitteleckpuncte gelegenen Segmente von Y und Z

$$Y - \Sigma(Y)$$
$$\text{und}\quad Z - \Sigma(Z)$$

seyn müssen, so findet sich für die an diesem Mitteleckpuncte gelegenen Segmente der Kanten Y und Z

$$\Sigma(Y) = \frac{m'[n(n'+1) - n'(n+1)k]Y}{m'(n'+1)n - m(n+1)n'}$$
$$\Sigma(Z) = \frac{[n(n'+1) - n'(n+1)k]Z}{n - n'}$$

§. 732.

Kantensegmente von mPn in ihren Combinationen mit den übrigen Gestalten.

Aus den Resultaten des vorhergehenden §. lassen sich für die Combinationen einer ditetragonalen Pyramide mPn mit den verschiedenen Gestalten derselben Krystallreihe folgende Verhältnisse der Kantensegmente ableiten.

1) Combination $mPn.m'Pn'$;

bei achtfl. Zusp. der Polecke:

$\Sigma(X):\Sigma(Y) = [m(n+1)n' - m'(n'+1)n]X : (m-m')(n+1)n'Y$

bei vierfl. Zusp. der norm. Mittelecke:

$\Sigma(X):\Sigma(Z) = m'(n'-n)X : (m'-m)(n+1)n'Z$

bei vierfl. Zusp. der diag. Mittelecke:

$\Sigma(Y):\Sigma(Z) = m'(n-n')Y : [m'(n'+1)n - m(n+1)n']Z$

2) Combination $mPn.m'P$;

bei vierfl. Zusp. der Polecke:

$\Sigma(X):\Sigma(Y) = m(n+1) - 2m'n : (m-m')(n+1)$

bei Zusch. der diag. Mittelecke:

$$\Sigma(Y):\Sigma(Z)=m'(n-1):2m'n-m(n+1)$$

3) Combination $mPn.m'P\infty$;

bei vierfl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Y)=m(n+1)-m'n:(m-m')(n+1)$$

bei Zusch. der norm. Mittelecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Z)=m':(m'-m)(n+1)$$

4) Combination $mPn.\infty Pn'$;

bei Zusch. der norm. Mittelecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Z)=n'-n:(n+1)n'$$

bei Zusch. der diag. Mittelecke:

$$\Sigma(Y):\Sigma(Z)=n-n':(n'+1)n$$

5) Combination $mPn.\infty P$;

$$\Sigma(Y):\Sigma(Z)=n-1:2n$$

6) Combination $mPn.\infty P\infty$;

$$\Sigma(X):\Sigma(Z)=1:n+1$$

§. 733.

Kantensegmente in den tetragonalen Pyramiden mP und $mP\infty$.

Die Kantenlinien Y verschwinden als solche in den tetragonalen Pyramiden mP, und erscheinen nur noch als die Höhenlinien ihrer Flächen; dasselbe gilt für die Kantenlinien X in den Pyramiden $mP\infty$. Wir würden also die im vorhergehenden §. gefundenen Resultate auch für die binären Combinationen dieser Pyramiden benutzen können, indem wir für jede Comb. $mP.m'Pn'$ statt der Segmente von Y, und für jede Comb. $mP\infty.m'Pn'$ statt der Segmente von X die Segmente der resp. Höhenlinien berücksichtigten. Allein es ist jedenfalls vortheilhafter, die Lage der CK. auch für diese Gestalten unmittelbar durch die Kantensegmente zu bestimmen, weil man dadurch der Einzeichnung jener Höhenlinien, als acht ganz überflüssiger Hülfslinien, überhoben wird.

Für diejenigen Fälle jedoch, da die untergeordnete Gestalt $m'Pn'$ eine vierfl. Zusp. der Mittelecke der te-

Digitized by Google

tragonalen Pyramide bildet, dienen uns unmittelbar die für die Comb. $mPn.m'Pn'$ gefundenen Verhältnisse, indem wir nur statt Z überall $2Z$ zu schreiben haben, weil je zwei Mittelkanten von mPn eine Mittelkante von mP oder $mP\infty$ bilden. Es sind daher nur für den Fall einer achtflächigen Zusp. der Polecke die Segmente der Polkanten von mP und $mP\infty$ zu berechnen.

Es sind in mP die Gleichungen der Polkante X', Fig. 806,

$$\frac{x}{ma} + y = 1, \text{ und } z = 0$$

in $mP\infty$ die Gleichungen der Polkante Y', Fig. 807,

$$\frac{x}{ma} - y = 1, \text{ und } y + z = 0$$

Combinirt man diese Gleichungen mit der Gleichung der Fläche F_1 von $m'Pn'$

$$\frac{x}{m'a} + \frac{y}{n'} + z = k$$

so erhält man für den Durchschnittspunct (x') die Coordinaten:

$$ma - x = may$$
$$y = \frac{(m - m'k)n'}{mn' - m'}$$
$$z = 0$$

und für den Durchschnittspunct (y') die Coordinaten

$$ma - x = -may$$
$$y = \frac{(m - m'k)n'}{(m' - m)n' - m'}$$
$$z = -y$$

Da nun die Coordinaten des Poleckpunctes von mPn

$$x' = ma, \; y' = 0, \; z' = 0,$$

so wird

$$\Sigma(X') = \sqrt{(ma - x)^2 + y^2} = y\sqrt{m^2a^2 + 1}$$
$$= \frac{(m - m'k)n'}{mn' - m'} X; \text{ (§. 230)}$$

Digitized by Google

und $\Sigma(Y') = \sqrt{(ma-x)^2+2y^2} = y\sqrt{m^2a^2+2}$

$$= \frac{(m-m'k)n'}{(m'-m)n'-m'}Y; \text{ (§. 231)}$$

§. 734.

Kantensegmente von *m*P in ihren Combb. mit den übrigen Gestalten.

Aus den Resultaten des vorhergehenden §. und des §. 731 erhalten wir nun folgende Verhältnisse für die Kantensegmente der Pyramide *m*P in ihren Combb. mit den übrigen Gestalten:

1) Combination *m*P.*m'*P*n'*;

bei achtfl. Zusp. der Polecke:

$\Sigma(X):\Sigma(X') = mn'-m':(m-m')n'$

bei vierfl. Zusp. der Mittelecke:

$\Sigma(X):\Sigma(2Z) = m'(n'-1):(m'-m)n$

2) Combination *m*P.*m'*P∞;

bei vierfl. Zusp. der Polecke:

$\Sigma(X):\Sigma(X') = m:m-m'$

bei Zusch. der Mittelecke:

$\Sigma(X):\Sigma(2Z) = m':m'-m$

3) Combination *m*P.∞P*n'*;

$\Sigma(X):\Sigma(2Z) = n'-1:n'$

§. 735.

Kantensegmente von *m*P∞ in ihren Combb. mit den übrigen Gestalten.

Eben so ergeben sich aus den Resultaten der §§. 733 und 731 folgende Verhältnisse für die Kantensegmente der Pyramide *m*P∞ in ihren Combb. mit den übrigen Gestalten:

1) Combination *m*P∞.*m'*P*n'*;

bei achtfl. Zusp. der Polecke:

$\Sigma(Y):\Sigma(Y') = (m-m')n'-m':(m-m')n'+m'$

bei vierfl. Zusp. der Mittelecke:

$\Sigma(Y):\Sigma(2Z) = 2m':(m'-m)n'+m'$

Digitized by Google

2) Combination $m P\infty . m'P$;
bei vierfl. Zusp. der Polecke:
$$\Sigma(Y) : \Sigma(Y') = m - 2m' : m$$
bei Zusch. der Mittelecke:
$$\Sigma(Y) : \Sigma(2Z) = 2m' : 2m' - m$$
3) Combination $m P\infty . \infty P n'$;
$$\Sigma(Y) : \Sigma(2Z) = 2 : n' + 1$$

§. 736.

Kantensegmente der durch 0P begränzten Prismen.

Wollen wir auf gleiche Weise die Kantensegmente der Prismen ∞Pn, ∞P und $\infty P\infty$ bestimmen, um jede mit ihnen combinirte Pyramide leicht einzeichnen zu können, so müssen wir diese Prismen durch die basische Fläche terminirt voraussetzen.

Für $\infty Pn.0P$ findet man die Lage der CK. mit $m'Pn'$ unmittelbar aus den Coordinaten x der Durchschnittspuncte (y) und (x) der Combination $mPn.m'Pn'$, indem man eine dieser Coordinaten $= 0$ setzt. Sind nämlich je zwei Flächen von $m'Pn'$ auf eine normale Seitenkante von ∞Pn aufgesetzt, so ist $n' > n$; setzt man nun für den Punct (x)
$$x = 0,$$
so folgt $$k = 1$$
und die Coordinate x des Durchschnittspunctes in der Kante Y erhält den Werth
$$x = \frac{m'a(n' - n)}{n'(n + 1)}$$

Sind dagegen je zwei Flächen von $m'Pn'$ auf eine diagonale Seitenkante von ∞Pn gesetzt, so wird $n' < n$; setzt man nun für den Punct (y)
$$x = 0$$
so folgt $$k = \frac{n(n' + 1)}{n'(n + 1)}$$
und setzt man diesen Werth von k in die Coordinate

Digitized by Google

x des Punctes (x), so erhält diese Coordinate den Ausdruck

$$x = \frac{m'a(n - n')}{n'(n + 1)}$$

Hieraus ergeben sich, unter der Voraussetzung, dass man die horizontalen Endkanten der Prismen (die Seiten ihres Querschnittes oder der Basis 0P) jedenfalls ganz nimmt, für die abwärts zu nehmenden Segmente in den Seitenkanten X oder Y folgende Grössen.

Combinationen des Prismas ∞Pn;

1) Combination $\infty Pn.0P.m'Pn'$;
wenn die Flächen der Pyramide auf den normalen Seitenkanten aufgesetzt sind, oder wenn $n' > n$:

$$\Sigma(X) = \frac{m'a(n' - n)}{n'(n + 1)}$$

wenn die Flächen der Pyramide auf die diagonalen Seitenkanten aufgesetzt sind, oder wenn $n' < n$:

$$\Sigma(Y) = \frac{m'a(n - n')}{n'(n + 1)}$$

2) Combination $\infty Pn\, 0P.m'P$;

$$\Sigma(Y) = \frac{m'a(n - 1)}{n + 1}$$

3) Combination $\infty Pn.0P.m'P\infty$.

$$\Sigma(X) = \frac{m'a}{n + 1}$$

Combinationen des Prismas ∞P; hierbei ist zu berücksichtigen, dass die Endkante $= 2Z$;

1) Combination $\infty P.0P.mPn$,

$$\Sigma(X) = \frac{ma(n - 1)}{n}$$

2) Combination $\infty P.0P.mP\infty$,

$$\Sigma(X) = ma$$

Combinationen des Prismas $\infty P\infty$; die Endkante ist gleichfalls $= 2Z$;

Digitized by Google

1) Combination $\infty P\infty . 0P . mPn$,

$$\Sigma(Y) = \frac{2ma}{n}$$

2) Combination $\infty P\infty . 0P . mP$,

$$\Sigma(Y) = 2ma$$

Mittels dieser Resultate wird es jedenfalls leicht seyn, die Combinationskanten irgend einer binären holoëdrischen Combination richtig einzutragen, sobald nur eine der beiden Gestalten projicirt ist.

Viertes Capitel.

Von der Zeichnung der hexagonalen Gestalten.

A. Axen und einfache Gestalten.

1) Holoëdrische Gestalten.

§. 737.

Projection des Axensystemes.

Man könnte zwar die Projection der Axen einer hexagonalen Krystallreihe auf die Projection der Axen des Oktaëders gründen; allein es scheint vortheilhafter, eine unabhängige Projectionsmethode zu besitzen, in welcher sich die etwa nöthigen Veränderungen der Elemente unmittelbar vornehmen lassen, ohne erst auf die Projection eines andern Axensystemes Rücksicht nehmen zu müssen. Dazu gelangt man leicht auf folgende Weise.

Man denke zuvörderst das Axensystem in aufrechter Stellung, und nenne wie bisher die Ebene durch die Hauptaxe und das (unendlich entfernte) Auge die Gesichtsebene, die auf der Gesichtsebene rechtwinklige Ebene durch die Hauptaxe die Projectionsebene, und die durch die drei Nebenaxen

Digitized by Google

gehende Ebene die **Horizontalebene**. Bringt man nun das Axensystem in die Normalstellung, und das Auge in die Horizontalebene, so kann bei dieser Wahl der Elemente das Bild des Axensystemes nur sehr ungünstig ausfallen, weil die Projectionen zweier Nebenaxen zusammenfallen, während die Projection der dritten Nebenaxe als ein Punct erscheint. Wir haben daher zuvörderst durch eine Drehung des Axensystemes aus der Normalstellung eine Absonderung der **Endpuncte** der Nebenaxen, und dann durch eine Elevation des Auges über die Horizontalebene eine Absonderung der **Nebenaxen selbst** im Bilde zu bewerkstelligen.

Ich will die auf den Beobachter zulaufende Nebenaxe mit I, die links gelegene mit II, und die rechts gelegene mit III bezeichnen. Man drehe nun das Axensystem um seine Hauptaxe so lange von der linken nach der rechten, bis dem in der Horizontalebene befindlichen Auge die Projectionen der Axe I und der Axe II in dem Verhältnisse von 1 zu 2 erscheinen. Dann wird auch die Projection der Axe III $= 3$, und folglich das Verhältniss der Projectionen

$$\text{I} : \text{II} : \text{III} = 1 : 2 : 3$$

Es ist nämlich für jeden Declinationswinkel δ

die Projection der Axe I $= \sin\delta$

\- - - - - II $= \sin(60° - \delta)$

\- - - - - III $= \sin(60° + \delta)$

Da nun allgemein

$$\sin(60° + \delta) = \sin(60° - \delta) + \sin\delta$$

so wird, wenn wir δ so gross wählen, dass genau

$$\sin(60° - \delta) = 2\sin\delta$$

nothwendig auch

$$\sin(60° + \delta) = 3\sin\delta$$

Aus diesen Voraussetzungen folgt übrigens

$$\cot\delta = 5\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \text{ und } \sin\delta = \sqrt{\tfrac{3}{28}}$$

also $\delta = 19°\ 6'\ 24''$

Digitized by Google

Hierdurch ist die Stellung des Axensystemes gegen die Projectionsebene bestimmt.

Wiewohl aber jetzt im Bilde die sechs Endpuncte der Nebenaxen gesondert hervortreten, so erscheinen doch diese Axen selbst noch immer in der Horizontallinie, so lange das Auge in der Horizontalebene verharrt. Wir müssen daher, um auch die Axen im Bilde gesondert zu erhalten, dem Auge eine Elevation über jener Ebene geben, wodurch die Endpuncte der Nebenaxen eine Abweichung über oder unter die Horizontallinie erhalten. Wie gross oder wie klein aber auch der Elevationswinkel ε des Auges gewählt werden mag, so werden sich die respectiven Abweichungen der Endpuncte der Nebenaxen im Bilde jedenfalls verhalten wie ihre wirklichen Abstände von der Projectionsebene; es sind aber diese Abstände

für die Nebenaxe I $= \cos\delta$
\- - - - II $= \cos(60° - \delta)$
\- - - - III $= \cos(60° + \delta)$

Da nun auch $\cos\delta = \sqrt{1 - \sin^2\delta} = 5\sqrt{\tfrac{1}{28}}$

$$\cos(60° - \delta) = \sqrt{1 - 4\sin^2\delta} = 4\sqrt{\tfrac{1}{28}}$$
$$\cos(60° + \delta) = \sqrt{1 - 9\sin^2\delta} = \sqrt{\tfrac{1}{28}}$$

so erhält man das Resultat, dass sich im Bilde die Abweichungen der Endpuncte der Nebenaxen unter oder über die Horizontallinie bei jeder Elevation des Auges verhalten

Abw. I : Abw. II : Abw. III = 5 : 4 : 1

Man gebe nun dem Auge eine solche Elevation, dass die Abweichung der Halbaxe I $= \frac{1}{s}$ ihrer ersten Projection, oder dass

$$\cot\varepsilon = s\tan\delta = 5s\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

Es scheint im Allgemeinen am vortheilhaftesten, $s = 2$ zu wählen, wodurch sich

$$\varepsilon = 9°\ 50'$$

Digitized by Google

bestimmt; nimmt man dagegen $s = \sqrt{3}$, so wird

$$\varepsilon = 11^\circ\ 18{,}5'$$

§. 738.

Fortsetzung.

Aus den Bestimmungen des vorhergehenden §. ergiebt sich nun folgende Regel für die Projection des hexagonalen Axensystemes.

Aufgabe. Das hexagonale Axensystem für die gegebene Breite $2b$ des Bildes und unter der Voraussetzung gleicher Länge der Hauptaxe mit den Nebenaxen zu construiren.

Auflösung. Ziehe zwei sich rechtwinklig schneidende Linien Fig. 808, und trage in die eine, als Horizontallinie, beiderseits vom Mittelpuncte M aus die Länge $MH = MR = b$. Theile hierauf die HR in sechs gleiche Theile, und lege durch ihre Theil- und Endpuncte die Hülfsverticalen 1, 2, 3, 4, 5, 6. In der äussersten Verticale rechter Hand nimm abwärts von R die Länge $RS = \frac{1}{s}b$, ziehe die SM und verlängere solche über M, so ist ihr zwischen den beiden Verticalen 3 und 4 enthaltener Theil YY' die Projection der Nebenaxe I.

Durch Y ziehe eine Horizontale, welche die Verticale 1 in T schneidet; diesen Punct T verbinde mit dem fünften Theilpuncte Q der Horizontale durch die TQ, welche die Verticale 2 in dem Puncte Z, die Verticale 4 in dem Puncte P schneidet. Ziehe die ZM und verlängere sie über M, so ist ihr zwischen den beiden Verticalen 2 und 5 enthaltener Theil ZZ' die Projection der Nebenaxe II.

Durch P lege eine Horizontale, welche die Verticale 6 in U schneidet, ziehe die UM und verlängere sie über M, so ist ihr zwischen den beiden Vertica-

len 1 und 6 enthaltener Theil UU' die Projection der Nebenaxe III.

Um endlich die Hauptaxe, unter der Voraussetzung gleicher Grösse mit jeder der Nebenaxen, zu construiren, bedenke man, dass

$$MH = cos(30° - \delta) \text{ oder } = sin(60° + \delta)$$

Könnte man also in der Verticale 1 von H aus eine Linie HV construiren, so dass

$$HV = sin(30° - \delta) \text{ oder } = cos(60° + \delta)$$

so wäre MV die gesuchte Länge der halben Hauptaxe. Nun ist aber

$$sin(60° + \delta) : cos(60° + \delta) = 3\sqrt{3} : 1$$
$$= 3 : tang\, 30°$$

Man construire also über der oberen Hälfte der Verticale 2 von N aus mit einer beliebigen Länge NL ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine von N auslaufende Seite die Verticale 1 in dem Puncte V schneidet, so ist HV der gesuchte Sinus; denn für $HN = 1$ ist $HM = 3$, und $HV = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = tang\, 30°$. Macht man also $MX = MX' = MV$, so ist XX' die Projection der Hauptaxe.

Anmerkung. Wählt man $s = \sqrt{3}$, so vereinfacht sich die Construction, und die Basis YZU erscheint etwas weniger verkürzt. Nachdem nämlich die HR in sechs Theile getheilt, und die Hülfsverticalen gezogen worden, beschreibt man über der unteren Hälfte der mittelsten Verticale von M aus mit einer beliebigen Länge ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine von M auslaufende Seite die Verticale 4 schneidet, und so den Punct Y der Nebenaxe I bestimmt. Die Construction der beiden andern Nebenaxen geschieht wie vorher; der zur Bestimmung der Hauptaxe erforderliche Punct V aber findet sich, indem man durch N eine Parallele der YY' legt.

Digitized by Google

§. 739.

Zeichnung der Grundgestalt P einer hexagonalen Krystallreihe.

So wie jetzt können die vier Axen XX', YY', ZZ' und UU' nur dann im Bilde erscheinen, wenn sie in der Wirklichkeit einander alle gleich sind; da nun aber diese Gleichheit nur für die drei Nebenaxen gilt, während die Hauptaxe einer gegebenen Grundgestalt P zu den Nebenaxen derselben in dem Verhältnisse $= a : 1$ steht, so darf man nur den Nebenaxen ihre im Bilde erscheinende Grösse lassen, der halben Hauptaxe dagegen die Grösse MA ertheilen, wie solche durch die Proportion

$$1 : a = MX : MA$$

bestimmt wird, um in der Linie AA' die wirkliche Länge der Hauptaxe der verlangten Grundgestalt P darzustellen.

Hierauf verbindet man die Endpuncte der Nebenaxen mit einander, so wie mit den Polen der Hauptaxe durch gerade Linien, und die Projection der Grundgestalt P ist vollendet.

Da man für die Construction der dihexagonalen und anderer Gestalten die Zwischenaxen der Grundgestalt nöthig hat, so sind dieselben in die Basis einzuzeichnen. Zu dem Ende lege man durch M drei Parallelen mit den Linien durch Y und U, U und Z', Z' und Y, welche ihrer Lage nach die Zwischenaxen allgemein, und, ihrer Grösse nach, wie sich solche durch die Durchschnittspuncte mit den Seiten der Basis bestimmt, die Zwischenaxen von P insbesondere darstellen.

§. 740.

Zeichnung der Pyramiden mP, mPn und mP2.

Nachdem die Grundgestalt gezeichnet worden, ist die Construction irgend einer andern holoëdrischen Gestalt derselben Krystallreihe eine sehr einfache Aufgabe.

Digitized by Google

Für eine Pyramide *m*P der Hauptreihe vervielfältigt man die Hauptaxe von P nach dem Coëfficienten *m*, und erhält so zwei neue Endpuncte derselben, welche mit den Eckpuncten der Basis von P verbunden werden müssen, um das Bild von *m*P zu erhalten.

Soll eine dihexagonale Pyramide *m*P*n* construirt werden, so hat man zuvörderst jede halbe Zwischenaxe der Grundgestalt, so wie sie im Bilde erscheint, um $\frac{n-1}{n+1}$ ihrer selbst zu verlängern, wodurch die diagonalen Mitteleckpuncte von *m*P*n* bestimmt werden. Diese Puncte verbindet man mit den Endpuncten der Nebenaxen, und erhält so die Projection der dihexagonalen Basis aller nach dem Coëfficienten *n* abgeleiteten Gestalten. Endlich bestimmt man die Länge der Hauptaxe, wie vorher, und vollendet die Construction der Gestalt.

Für *m*P2 verlängert man jede halbe Zwischenaxe um $\frac{1}{3}$ ihrer selbst (oder legt auch durch die Endpuncte jeder Nebenaxe zwei Parallelen mit derjenigen Zwischenaxe, welche auf ihr rechtwinklig ist) und erhält so die Basis aller Gestalten der Nebenreihe, bestimmt hierauf die Hauptaxe, und vollendet die Construction.

2. Hemiëdrische Gestalten.

§. 741.

Zeichnung der Rhomboëder; erstes Verfahren.

Bei der Construction der Rhomboëder und Skalenoëder als hemiëdrischer Gestalten kann man von zwei verschiedenen Gesichtspuncten ausgehen; entweder will man diese Gestalten in ihrem wahren Stellungs- und Grössenverhältnisse zu den resp. Muttergestalten, oder man will sie ausser Beziehung zu diesen letzteren darstellen. Im ersteren Falle muss dieselbe Projection des Axensystemes zu Grunde gelegt

Digitized by Google

werden, wie für die holoëdrischen Gestalten; im zweiten Falle kann man sich einer etwas compendiöseren Methode bedienen, welche zumal unter einer gewissen Voraussetzung sehr schnell zum Ziele gelangen lässt. Da es vortheilhaft ist, das in beiden Fällen nöthige Verfahren zu kennen, so wollen wir uns zunächst mit demjenigen Verfahren beschäftigen, welches befolgt werden muss, wenn die Rhomboëder und Skalenoëder in ihrem richtigen Verhältnisse zu ihren resp. Muttergestalten (z. B. auf derselben Tafel neben denselben) dargestellt werden sollen.

Aufgabe. Das Rhomboëder $\frac{mP}{2}$ oder mR zu construiren.

Man beschreibe nach der zu Ende des vorhergehenden §. angegebenen Regel die Basis der Gestalten der Nebenreihe; es sey dies $E \ldots E$, Fig. 809. Durch die sechs Eckpuncte E derselben lege man Verticalen (Parallelen der Hauptaxe), nehme hierauf in der Hauptaxe beiderseits von M aus die Länge $ma = MA = MA'$, in jeder der Verticalen aber beiderseits von E aus die Länge $\frac{1}{3}ma = EF = EF'$, so sind die zur Construction des Rhomboëders mR erforderlichen Puncte gefunden. Je nachdem das Rhomboëder in der einen oder in der andern Stellung, als mR oder als $-mR$ gezeichnet werden soll, verbindet man entweder die sechs Puncte F, oder die sechs Puncte F' unter einander und mit den Puncten A und A' durch gerade Linien, und erhält dadurch das verlangte Bild.

§. 742.

Zeichnung der Rhomboëder; zweites Verfahren.

Will man die Rhomboëder und Skalenoëder ausser ihrem Verhältnisse zu den holoëdrischen Gestalten darstellen, wie dies bei den gewöhnlichen Zeichnungen der Krystallformen einer rhomboëdrischen Kry-

Digitized by Google

stallreihe gestattet ist, so kann man kürzer zum Ziele gelangen, indem man die Linien YY', ZZ', UU' in Fig. 808 als die Zwischenaxen der Pyramiden der Nebenreihe, und daher die Figur $YZUY'Z'U'$ als die hexagonale Basis dieser Pyramiden betrachtet. Diese Ansicht setzt freilich einen andern Declinationswinkel des Axensystemes und ein anderes Verhältniss der Dimensionen voraus, erleichtert aber die Construction bedeutend. Der Declinationswinkel wird nämlich

$$\delta = 10^\circ\ 53'\ 36''$$

und setzt eine Drehung von rechts nach links voraus, d. h. die der Gesichtsebene am nächsten liegende Nebenaxe befindet sich jetzt linker Hand, während sie sich der Construction des §. 738 zufolge rechter Hand von der Gesichtsebene befand. Ferner sind die Linien MY, MZ, MU jetzt nicht mehr $= 1$, sondern $= \sqrt{\frac{4}{3}}$, und folglich die halbe Hauptaxe MX ebenfalls $= \sqrt{\frac{4}{3}}$. Da wir nun die halbe Hauptaxe für unsre Constructionen in derjenigen Grösse zu Grunde legen müssen, welche der Einheit entspricht, so haben wir sie auf diesen Werth zu reduciren; dies geschieht leicht, indem man über der MX ein gleichseitiges Dreieck beschreibt, und in selbigem die Höhenlinie aus M zieht; sie sey MG, so ist MG die auf den Werth $= 1$ reducirte halbe Hauptaxe, welche den ferneren Constructionen zu Grunde liegt.

Soll nun ein Rhomboëder mR construirt werden, so sucht man in der Proportion

$$1 : ma = MG : MA$$

die vierte Proportionale, trägt selbige in die MX beiderseits von M aus ein, nimmt darauf in jeder der Verticalen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 die Länge $\frac{1}{3}MA$ von den Puncten Y, Z und U aus auf- und abwärts, und erhält auf diese Art alle zur Construction des Rhomboëders mR in beiden Stellungen erforderlichen Puncte.

Digitized by Google

§. 743.

Zeichnung der Rhomboëder; drittes Verfahren.

Weil die Mittelkanten der Rhomboëder und Skalenoëder nicht in die Ebene der Basis von P fallen, und folglich im Bilde abgesondert hervortreten, wenn sich auch das Auge in dieser Ebene befindet, oder wenn $\varepsilon = 0$, so lässt sich die Construction des vorhergehenden §. unter dieser Voraussetzung bedeutend vereinfachen, wie folgt.

Aufgabe. Das Rhomboëder mR für $\varepsilon = 0$, $\delta = 10° 53' 36''$ und die gegebene Breite $2b$ des Bildes zu construiren.

Man ziehe eine Horizontallinie HR, Fig. 810, mache sie $= 2b$, und theile sie in sechs gleiche Theile; durch die Theil- und Endpuncte lege man Verticalen, und beschreibe aus dem Theilpuncte P mit PH einen Bogen, welcher die zweite Verticale in Q schneidet. Man nehme nun in der mittelsten Verticale $MX = MX' = MQ$, so ist XX' die Hauptaxe für $a = 1$.

Dies ist leicht zu beweisen. Die Linie MH ist nämlich die orthographische Projection einer halben Zwischenaxe der Basis der Nebenreihe, welche gegen die Projectionsfläche unter $10° 53' 36''$ geneigt ist; also

$$MH = \sqrt{\tfrac{4}{3}}\sqrt{\tfrac{27}{28}} = 3\sqrt{\tfrac{1}{7}} = ST$$

daher auch

$$HT = \sqrt{\tfrac{1}{7}},\ MT = \sqrt{\tfrac{4}{7}}$$

und, wegen des aus P mit $PH = PS$ beschriebenen Bogens,

$$QT = \sqrt{HT \times ST} = \sqrt{\tfrac{3}{7}}$$

Da nun

$$\square MQ = \square MT + \square QT$$

so ist

$$MQ = 1$$

Diese einfache Construction ist nun die Grundlage für alle ferneren Zeichnungen.

Soll nämlich ein Rhomboëder mR gezeichnet wer-

Digitized by Google

den, so ist dessen halbe Hauptaxe $= ma$; man mache also $MA = ma \times MX = MA'$, so sind A und A' die Poleckpuncte von mR. Weil nun die Mittelecke um $\frac{1}{3}ma$ über oder unter der Ebene der Basis liegen, so nehme man in Fig. 812 $MN = MN' = \frac{1}{3}MA$, und ziehe durch N und N' zwei Horizontalen; ihre Durchschnittspuncte E mit den sechs äusseren Verticalen werden die Mitteleckpuncte von mR. Je nachdem man nun das Rhomboëder in der einen oder andern Stellung, als mR oder als $-mR$ darstellen will, verbindet man die sechs Puncte E oder die sechs Puncte E' mit einander und mit den Puncten A und A' durch gerade Linien, wie es der Verlauf des Kantennetzes vorschreibt, und die Construction von mR ist vollendet.

Anmerkung. Man kann sich auch bei der Construction der Rhomboëder nach der Regel des vorhergehenden §. derselben Methode zur Auffindung der Hauptaxe $a = 1$ bedienen wie in gegenwärtigem §, und braucht dann nicht erst den Punct V zu bestimmen.

§. 744.

Zeichnung der Skalenoëder mR^n.

Die Construction der Skalenoëder ist jedenfalls auf ihre secundäre Bezeichnung zu gründen, daher man die etwa gegebenen primitiven Zeichen $\frac{m'Pn'}{2}$ zuvörderst auf ihre secundären Zeichen nach der Gleichung

$$\frac{m'Pn'}{2} = \frac{m'(2-n')}{n'} R^{\frac{n'}{2-n'}} = mR^n$$

zu reduciren hat. Die Construction selbst ist dann sehr leicht zu bewerkstelligen. Man bestimmt nämlich die Eckpuncte des eingeschriebenen Rhomboëders mR nach einer der drei angegebenen Regeln (je nachdem die eine oder die andere der, diese Regeln bedin-

Digitized by Google

genden Voraussetzungen gelten soll), vervielfacht die Hauptaxe des Rhomboëders nach dem Coëfficienten n, und erhält so die Poleckpuncte des Skalenoëders, welche mit den Mitteleckpuncten des Rhomboëders, so wie diese letzteren mit einander durch gerade Linien verbunden werden müssen, um das verlangte Bild von mR^n darzustellen.

§. 745.

Zeichnung der hexagonalen Pyramiden der dritten Art.

Um eine hexagonale Pyramide von abnormer Flächenstellung, $\frac{l}{r}\frac{mPn}{2}$ oder $\frac{r}{l}\frac{mPn}{2}$, zu zeichnen, entwirft man zuvörderst nach der in §. 740 angegebenen Regel die dihexagonale Basis der Pyramide mPn, verlängert hierauf die abwechselnden Seiten derselben bis zu ihren gegenseitigen Durchschnitten, und erhält so die hexagonale Basis der verlangten Pyramide. Endlich bestimmt man die Pole der Hauptaxe, verbindet selbige mit den Eckpuncten der Basis, und die Construction ist vollendet.

§. 746.

Zeichnung der hexagonalen Trapezoëder.

Da die Polkanten der oberen oder unteren Hälfte der hexagonalen Trapezoëder $r\frac{mPn}{2}$ oder $l\frac{mPn}{2}$ dieselbe Lage haben, wie die Polkanten der gleichnamigen Hälfte der hexagonalen Pyramiden $\frac{r}{l}\frac{mPn}{2}$ oder $\frac{l}{r}\frac{mPn}{2}$, so beginnt man die Construction der Trapezoëder damit, die obere Hälfte einer von diesen Pyramiden nach der so eben angegebenen Regel zu entwerfen, indem man sich zugleich diejenigen Puncte B ihrer Mittelkanten bemerkt, in welchen dieselben von den Nebenaxen geschnitten werden; Fig. 811.

Digitized by Google

Da nun der Abstand der Mittelecke des Trapezoëders von der Ebene der Basis nach §. 352

$$x = \frac{ma(n-1)(2-n)}{n(n+1)}$$

so nehme man in der oberen Hälfte *MA* der Hauptaxe vom Mittelpuncte *M* aus

$$MD = \frac{(n-1)(2-n)}{n(n+1)} \times MA$$

und lege durch den Punct *D* drei, mit den Diagonalen der Basis parallele Linien, welche mit den Polkanten der Pyramide zum Durchschnitte kommen, und so die sechs oberen Mitteleckpuncte *E* des Trapezoëders bestimmen. Jeden dieser Puncte *E* verbindet man nun durch eine gerade Linie mit dem zunächst liegenden Puncte *B*, verlängert selbige über *B*, und macht die Verlängerung $BE' = BE$, so bestimmen sich die sechs unteren Mitteleckpuncte *E'*, worauf denn leicht die noch fehlenden diagonalen Mittelkanten, so wie die unteren Polkanten des Trapezoëders gezeichnet werden können.

8) Tetartoëdrische Gestalten.

§. 747.

Zeichnung der Rhomboëder von abnormer Flächenstellung.

Um ein tetartoëdrisches Rhomboëder $\frac{mPn}{4}$ zu zeichnen, construirt man zuvörderst die Basis der dihexagonalen Pyramide *m*P*n* nach der Regel des §. 740, verlängert drei abwechselnde Seiten derselben, bis sie zum Durchschnitte kommen, und verbindet die drei Durchschnittspuncte mit dem oberen Pole der Hauptaxe von *m*P. Die Verbindungslinien sind der Lage nach die oberen Polkanten des verlangten Rhomboëders. Um dieselben auch ihrer Grösse nach zu bestimmen, braucht man nur jede Verbindungslinie in drei gleiche Theile zu theilen; der unterste Theil-

Digitized by Google

punct einer jeden ist einer der Mitteleckpuncte des Rhomboëders, dessen Construction dadurch vollendet wird, dass man durch jeden der gefundenen Mitteleckpuncte und durch den unteren Pol von mP Parallelen mit zweien der obereren Polkanten legt.

§. 748.

Zeichnung der Rhomboëder von diagonaler Flächenstellung.

Um ein Rhomboëder $\frac{mP2}{4}$ zu construiren, zeichnet man erst die Basis der Gestalten der Nebenreihe, verlängert ihre abwechselnden Seiten bis zu ihren gegenseitigen Durchschnitten, und verbindet die Durchschnittspuncte mit dem oberen Pole der Hauptaxe $2ma$, so sind die oberen Polkanten des verlangten Rhomboëders ihrer Lage nach gefunden. Die Bestimmung ihrer Grösse, so wie die weitere Ausführung der Construction, ist ganz dieselbe wie im vorhergehenden §.

§. 749.

Zeichnung der trigonalen Pyramiden.

Die Construction einer trigonalen Pyramide $\frac{mP2}{4}$ ist sehr leicht; man zeichnet nämlich die hexagonale Basis der Nebenreihe, verlängert die abwechselnden Seiten derselben bis zu ihren gegenseitigen Durchschnitten, und verbindet die Durchschnittspuncte mit den Polen der Hauptaxe.

§. 750.

Zeichnung der trigonalen Trapezoëder.

Die Projection der trigonalen Trapezoëder $r\frac{mPn}{4}$ oder $l\frac{mPn}{4}$ lässt sich auf verschiedene Art ausführen.

1) Man kann dabei die, für die Rhomboëder von abnormer Flächenstellung gebrauchte Construction zu

Digitized by Google

Grunde legen, indem man, nachdem die oberen Polkanten derselben ihrer Lage nach bestimmt worden, in der oberen Hälfte der Hauptaxe vom Mittelpuncte aus den aliquoten Theil

$$\frac{(2n-1)(2-n)}{3n}$$

nimmt (§. 360) und durch den so bestimmten Punct der Hauptaxe Parallelen mit den Höhenlinien der trigonalen Basis legt, welche mit jenen Polkantenlinien zum Durchschnitte kommen, und die drei oberen Mitteleckpuncte des Trapezoëders bestimmen. Von jedem dieser drei Puncte zieht man eine Linie nach dem zunächst gelegenen von denjenigen drei Endpuncten der Nebenaxen, welche in den Seiten der trigonalen Basis liegen, verlängert die gezogenen Linien, und macht ihre resp. Verlängerungen ihnen selbst gleich, so bestimmen sich die drei unteren Mitteleckpuncte des Trapezoëders, worauf die Construction leicht zu vollenden ist.

2) Hat man schon vorher das entsprechende hexagonale Trapezoëder $r\frac{mPn}{2}$ oder $l\frac{mPn}{2}$ gezeichnet, so kann man dessen Bild benutzen, um das Bild des trigonalen Trapezoëders zu finden. Vergleicht man nämlich die in §. 353 und §. 361 gefundenen Werthe der normalen Mittelkanten beider Gestalten, so findet man, dass die Mittelkanten der trigonalen ein Multiplum der Mittelkanten der hexagonalen Trapezoëder nach dem Coëfficienten

$$\frac{(2n-1)(n+1)}{3(n-1)}$$

sind. Man hat daher nur jede der abwechselnden normalen Mittelkanten des hexagonalen Trapezoëders zu verlängern, die Verlängerung beiderseits

$$=\tfrac{1}{3}\left(n+\frac{1}{n-1}\right)$$

Digitized by Google

ihrer selbst zu machen, so sind die Mitteleckpuncte des Trapezoëders gefunden.

3) Endlich kann man auch die Construction auf die der hexagonalen Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ gründen, da die Mittelkante Z jedes trigonalen Trapezoëders $\frac{mPn}{4}$ ein Multiplum der Mittelkante des Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$ nach dem Coëfficienten $2n - 1$ ist, wie sich aus der Vergleichung ihrer in §. 333 und §. 361 stehenden Werthe ergiebt. Hat man also das Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ gezeichnet, so darf man nur seine drei abwechselnden Mittelkanten beiderseits verlängern, und jede ihrer resp. Verlängerungen $= n - 1$ von ihnen selbst machen, so sind die Mitteleckpuncte des Trapezoëders, und folglich alle Puncte gefunden, die zur Construction der Gestalt erfordert werden.

Diese letztere Methode wird in den meisten Fällen den andern vorzuziehen seyn, weil sie eine leichte und sehr genaue Lösung der Aufgabe gewährt.

B. Combinationen.

1) Kantensegmente der holoëdrischen Gestalten.

§. 751.

Kantensegmente der hexagonalen Pyramide mP.

Da die dihexagonalen Pyramiden jedenfalls als untergeordnete Gestalten in den Combinationen auftreten, so wollen wir die Verhältnisse der Kantensegmente nur für die Gestalten der Haupt- und Nebenreihe aufsuchen. Wenn

$$\frac{x}{ma} + y + z = 1$$

die Gleichung einer Fläche F der hexagonalen Pyramide mP, so sind

$$\frac{x}{ma} + z = 1, \text{ und } y = 0$$

$$\frac{x}{ma} + y = 1, \text{ und } z = 0$$

die Gleichungen ihrer Polkanten X und X', und

$$x = 0, \; y + z = 1$$

die Gleichungen ihrer Mittelkante Z.

Es sey nun

$$\frac{x}{m'a} + \frac{y}{n'} + z = k$$

die Gleichung der Fläche irgend einer mit mP combinirten Gestalt m'Pn'. Combinirt man diese Gleichung mit denen von X, X' und Z, so findet man die Coordinaten der Durchschnittspuncte (x), (x') und (z), und aus diesen mittels der bekannten Coordinaten des Poleckpunctes und der Mitteleckpuncte von F die Segmente ihrer drei Kanten. Vergleicht man endlich je zwei an demselben Eckpuncte gelegenen Segmente mit einander, so erhält man für die verschiedenen Combinationen der Gestalt mP, wenn ihre halbe Mittelkante $= Z$ gesetzt wird, folgende Resultate.

1) Combination mP.m'Pn';

bei zwölffl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X) : \Sigma(X') = (mn' - m')X : n'(m - m')X$$

bei vierfl. Zusp. der Mittelecke:

$$\Sigma(X) : \Sigma(Z) = m'(n' - 1)X : 2n'(m' - m)Z$$

2) Combination mP.m'P2;

bei sechsfl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X) : \Sigma(X') = (2m - m')X : 2(m - m')X$$

bei Zusch. der Mittelecke:

$$\Sigma(X) : \Sigma(Z) = m'X : 4(m' - m)Z$$

3) Combination mP.∞Pn';

$$\Sigma(X) : \Sigma(Z) = (n' - 1)X : 2n'Z$$

4) Combination $m\mathrm{P}.\infty\mathrm{P}2$;

$$\Sigma(X):\Sigma(Z) = X:4Z$$

§. 752.

Kantensegmente der hexagonalen Pyramide $m\mathrm{P}2$.

Wenn die Gleichung einer Fläche F der Pyramide $m\mathrm{P}2$

$$\frac{x}{ma}+\frac{y}{2}+z=1$$

ist, so folgen aus der Combination dieser Gleichung mit den Gleichungen der beiden diagonalen Hauptschnitte (§. 319) die Gleichungen ihrer Polkanten Y und Y':

$$\frac{x}{ma}+\frac{3y}{2}=1,\quad y-z=0$$

$$\frac{x}{ma}-\frac{y}{2}=1,\ 2y+z=0$$

während die Gleichungen der Mittelkante

$$x=0,\ \frac{y}{2}+z=1$$

sind. Mit diesen Gleichungen der drei Kantenlinien ist nun die Gleichung

$$\frac{x}{m'a}+\frac{y}{n'}+z=k$$

der Fläche F_1 zu combiniren, um die Coordinaten der Durchschnittspuncte und, mittels dieser letzteren, die Kantensegmente von $m\mathrm{P}2$ in seinen Combinationen mit $m'\mathrm{P}n'$ zu bestimmen. Führt man diese Rechnungen durch, und vergleicht dann je zwei an demselben Eckpuncte gelegene Segmente mit einander, so erhält man, wenn die halbe Mittekante $= Z$, folgende Verhältnisse der Kantensegmente von $m\mathrm{P}2$ in seinen verschiedenen Combinationen:

1) Combination $m\mathrm{P}2.m'\mathrm{P}n'$;

bei zwölffl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(Y):\Sigma(Y') = 3mn'-2m'(2n'-1):3mn'-2m'(n'+1)$$

bei vierfl. Zusp. der Mittelecke:

$$\Sigma(Y):\Sigma(Z) = m'(2-n'):2m'(n'+1)-3mn'$$

2) Combination $mP2.m'P$;

bei sechsfl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(Y):\Sigma(Y') = 3m-2m':3m-4m'$$

bei Zusch. der Mittelecke:

$$\Sigma(Y):\Sigma(Z) = m':4m'-3m$$

3) Combination $mP2.\infty Pn'$;

$$\Sigma(Y):\Sigma(Z) = 2-n':2(n'+1)$$

4) Combination $mP2.\infty P$;

$$\Sigma(Y):\Sigma(Z) = 1:4$$

§. 753.

Kantensegmente der Prismen ∞Pn, ∞P und $\infty P2$.

Wir denken diese Prismen durch die basische Fläche terminirt, und setzen in dem Prisma ∞Pn die Mittelkante $= Z$, so werden die in den Kanten Y oder X von der Basis abwärts zu nehmenden Segmente folgende:

1) Combination $\infty Pn.m'Pn'$

wenn die Flächen von $m'Pn'$ auf die diagonalen Seitenkanten gesetzt sind, oder wenn $n' < n$;

$$\Sigma(Y):\Sigma(Z) = \frac{m'a(n-n')}{n'(n+1)} : Z$$

wenn die Flächen von $m'Pn'$ auf die normalen Seitenkanten gesetzt sind, oder wenn $n' > n$;

$$\Sigma(X):\Sigma(Z) = \frac{m'a(n'-n)}{n'(n+1)} : Z$$

2) Combination $\infty Pn.m'P$

$$\Sigma(Y):\Sigma(Z) = \frac{m'a(n-1)}{n'(n+1)} : Z$$

3) Combination $\infty Pn.m'P2$

$$\Sigma(X):\Sigma(Z) = \frac{m'a(2-n)}{2(n+1)} : Z$$

Setzen wir in den Prismen ∞P und $\infty P2$ die halbe

Digitized by Google

Seite ihrer Basis $= Z$, so erhalten wir folgende Resultate für ∞P:

1) Combination ∞P.mPn,

$$\Sigma(X):\Sigma(Z) = \frac{ma(n-1)}{2n} : Z$$

2) Combination ∞P.mP2,

$$\Sigma(X):\Sigma(Z) = \tfrac{1}{4}ma : Z$$

und endlich für die Combinationen von ∞P2:

1) Combination ∞P2.mPn,

$$\Sigma(Y):\Sigma(Z) = \frac{ma(2-n)}{3n} : Z$$

2) Combination ∞P2.mP,

$$\Sigma(Y):\Sigma(Z) = \tfrac{1}{3}ma : Z$$

2) Kantensegmente der Skalenoëder und Rhomboëder.

§. 754.

Kantensegmente des Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$.

Weil in den rhomboëdrischen, wie in den meisten hemiëdrischen Combinationen nicht nur heteropolare, sondern auch amphipolare Combinationskanten vorkommen, so würden wir eigentlich auf beide Arten derselben Rücksicht nehmen müssen, wenn nicht die Lage der amphipolaren CK. jedenfalls leicht durch Construction zu finden wäre, sobald nur erst die heteropolaren CK. bestimmt sind. Wir können uns daher auch an gegenwärtigem Orte mit der Bestimmung dieser letzteren begnügen.

Wenn

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

die Gleichung einer Fläche F des Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$ ist, so sind die Gleichungen der drei Kantenlinien dieser Fläche die in §. 332 stehenden Gleichungen für X, Y und Z, und die Coordinaten ihrer Eckpuncte

die ebendaselbst stehenden Coordinaten des Poleckpunctes und der Mitteleckpuncte an X und Y. Endlich ist die Gleichung der mit F analog liegenden Fläche F_1 eines zweiten Skalenoëders $\frac{m'\mathrm{P}n'}{2}$, bei gleicher Stellung beider Gestalten:

$$\frac{x}{m'a} + \frac{y}{n'} + z = 1$$

Wir haben nun zuvörderst die Coordinaten der Durchschnittspuncte dieser Fläche mit den Kanten X, Y und Z, oder der Puncte (x), (y) und (z) zu bestimmen.

Da wir in der Gleichung von F_1 rechter Hand vom Gleichheitszeichen die Einheit eingeführt haben, so folgt für (z)

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 1$$

und allgemein für das Segment in Z

$$\Sigma(Z) = \tfrac{1}{2}Z$$

Für die Puncte (x) und (y) erhalten wir die resp. Coordinaten durch Combination der Gleichungen von X und Y mit jener von F_1 wie folgt:

für (x):

$$x - ma = \frac{ma(2n-1)}{n}y$$

$$y = \frac{nn'(m'-m)}{m(2n-1)n' - m'(2n'-1)}$$

$$z = -2y$$

für (y):

$$x - ma = -\frac{ma(n+1)}{n}y$$

$$y = \frac{nn'(m'-m)}{m'(n'+1)n - m(n+1)n'}$$

$$z = y$$

Combinirt man die Coordinaten der Puncte (x) und (y) mit jenen des Poleckpunctes, welche

$$x = ma,\ y = 0,\ z = 0$$

Digitized by Google

nach der Formel für R in §. 318, so erhält man die am Pole gelegenen Segmente der Kanten X und Y, nämlich

$$\Sigma(X) = \frac{3nn'(m'-m)}{2[m'(2n'-1)n - m(2n-1)n']} \times X$$

$$\Sigma(Y) = \frac{3nn'(m'-m)}{2[m'(n'+1)n - m(n+1)n']} \times Y$$

und daher die an der **Mittelkante** gelegenen Segmente

$$\Sigma(X) = -\frac{m'(2-n')n - m(2-n)n'}{2[m'(2n'-1)n - m(2n-1)n']} \times X$$

$$\Sigma(Y) = \frac{m'(2-n')n - m(2-n)n'}{2[m'(n'+1)n - m(n+1)n']} \times Y$$

Da nun das Kantensegment in Z jedenfalls $= \frac{1}{2}Z$, so erhalten wir folgende Verhältnisse der Kantensegmente in der Combination des Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$ mit dem Skalenoëder $\frac{m'Pn'}{2}$ von **gleicher Stellung**;

1) bei sechsfl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Y) = \frac{X}{m(2n-1)n' - m'(2n'-1)n} : \frac{Y}{m(n+1)n' - m'(n'+1)n}$$

2) bei Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. auf die **schärferen** Pol- und die Mittelkanten gesetzt:

$$\Sigma(X):\Sigma(\tfrac{1}{2}Z) = \frac{[m(2-n)n' - m'(2-n')n]X}{2[m'(2n'-1)n - m(2n-1)n']} : \tfrac{1}{2}Z$$

3) bei Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. auf die **stumpferen** Pol- und die Mittelkanten gesetzt:

$$\Sigma(Y):\Sigma(\tfrac{1}{2}Z) = \frac{[m'(2-n')n - m(2-n)n']Y}{2[m'(n'+1)n - m(n+1)n']} : \tfrac{1}{2}Z$$

Setzt man in diesen Verhältnissen statt n' die Grösse $\frac{n'}{n'-1}$, so erhält man die Verhältnisse der Kantensegmente von $\frac{mPn}{2}$ in seiner Combination mit

Digitized by Google

dem Skalenoëder $-\frac{m'Pn'}{2}$ von verwendeter Stellung; nämlich:

4) bei sechsfl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Y)=\frac{X}{m(2n-1)n'-m'(n'+1)n}:\frac{Y}{m(n+1)n'-m'(2n'-1)n}$$

5) bei Zusch. der Mittelecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(\tfrac{1}{2}Z)=\frac{[m(2-n)n'+m'(2-n')n]X}{2[m'(n'+1)n-m(2n-1)n']}:\tfrac{1}{2}Z$$

§. 755.

Kantensegmente des Skalenoëders mR^n.

Die Resultate des vorhergehenden §. gründen sich auf die primitive Ableitung und Bezeichnung, und sind daher allgemein gültig, welche zwei Gestalten auch mit einander combinirt sein mögen. Weil jedoch gewöhnlich die rhomboëdrishen Combinationen durch die secundären Zeichen gegeben werden, so ist es sehr bequem, jene Resultate in einer diesen Zeichen angemessenen Form zu besitzen. Zu dem Ende haben wir für jedes Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$

statt m die Grösse mn

. . . n . . . . $\frac{2n}{n+1}$

einzuführen, wodurch unsere Formeln so umgestaltet werden, dass sie sich auf die Combination des Skalenoëders $mnP\frac{2n}{n+1}=mR^n$ beziehen.

Nimmt man diese Substitutionen vor, so erhält man für die Combinationen des Skalenoëders mR^n mit den übrigen Gestalten folgende Verhältnisse der Kantensegmente:

1) Combination $mR^n.m'R^{n'}$;

A) die Gestalten befinden sich in gleicher Stellung; dann wird

bei sechsfl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Y)=\frac{X}{m(3n-1)-m'(3n'-1)}:\frac{Y}{m(3n+1)-m'(3n'+1)}$$

bei Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. auf die schärferen Polk. und Mittelk. gesetzt:

$$\Sigma(X):\Sigma(\tfrac{1}{2}Z)=\frac{(m-m')X}{m'(3n'-1)-m(3n-1)}:\tfrac{1}{2}Z$$

bei Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. auf die stumpferen Polk. und Mittelk. gesetzt:

$$\Sigma(Y):\Sigma(\tfrac{1}{2}Z)=\frac{(m'-m)Y}{m'(3n'+1)-m(3n+1)}:\tfrac{1}{2}Z$$

B) die Gestalten befinden sich in verwendeter Stellung; dann wird

bei sechsfl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Y)=\frac{X}{m(3n-1)-m'(3n'+1)}:\frac{Y}{m(3n+1)-m'(3n'-1)}$$

bei Zusch. der Mittelecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(\tfrac{1}{2}Z)=\frac{(m+m')X}{m'(3n'+1)-m(3n-1)}:\tfrac{1}{2}Z$$

2) Combination $mR^n.m'R$

A) die Gestalten befinden sich in gleicher Stellung; dann wird

bei dreifl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Y)=\frac{X}{m(3n-1)-2m'}:\frac{Y}{m(3n+1)-4m'}$$

bei Abst. der Mittelecke:

$$\Sigma(Y):\Sigma(\tfrac{1}{2}Z)=\frac{(m'-m)Y}{4m'-m(3n+1)}:\tfrac{1}{2}Z$$

B) die Gestalten befinden sich in verwendeter Stellung; dann wird

bei dreifl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Y)=\frac{X}{m(3n-1)-4m'}:\frac{Y}{m(3n+1)-2m'}$$

bei Abst. der Mittelecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(\tfrac{1}{2}Z)=\frac{(m+m')X}{4m'-m(3n-1)}:\tfrac{1}{2}Z$$

Digitized by Google

3) **Combination** $mR^n.m'P2$; es ist

bei sechsfl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Y)=\frac{X}{m(3n-1)-3m'}:\frac{Y}{m(3n+1)-3m'}$$

bei Zusch. der Mittelecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(\tfrac{1}{2}Z)=\frac{mX}{3m'-m(3n-1)}:\tfrac{1}{2}Z$$

4) **Combination** $mR^n.\infty R^{n'}$

$$\Sigma(Y):\Sigma(\tfrac{1}{2}Z)=\frac{Y}{3n'+1}:\tfrac{1}{2}Z$$

$$\Sigma(X):\Sigma(\tfrac{1}{2}Z)=\frac{X}{3n'+1}:\tfrac{1}{2}Z$$

5) **Combination** $mR^n.\infty R$

$$\Sigma(X):\Sigma(Y):\Sigma(\tfrac{1}{2}Z)=\tfrac{1}{4}X:\tfrac{1}{4}Y:\tfrac{1}{2}Z$$

6) **Combination** $mR^n.0R$

$$\Sigma(X):\Sigma(Y)=X:\frac{(3n-1)Y}{3n+1}$$

§. 756.

Kantensegmente des Rhomboëders mR.

Die Resultate des vorhergehenden §. lassen sich unmittelbar für die Combinationen des Rhomboëders mR in Anwendung bringen, indem man $n=1$ setzt, und in dem gezeichneten Rhomboëder die **geneigten Diagonalen** seiner Flächen construirt, welche die Kante Y repräsentiren; unter $\Sigma(Y)$ sind also die Segmente dieser Diagonalen zu verstehen.

1) **Combination** $mR.m'R^{n'}$;

A) die Gestalten befinden sich in gleicher Stellung; dann ist

bei sechsfl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Y)=\frac{X}{2m-m'(3n'-1)}:\frac{Y}{4m-m'(3n'+1)}$$

bei Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. paarweis auf die Polk. gesetzt:

$$\Sigma(X) : \Sigma(\tfrac{1}{2}Z) = \frac{(m - m')X}{m'(3n' - 1) - 2m} : \tfrac{1}{2}Z$$

bei Zusch. der Mittelecke, die Zuschfl. paarweis auf die Flächen gesetzt:

$$\Sigma(Y) : \Sigma(\tfrac{1}{2}Z) = \frac{(m' - m)Y}{m'(3n' + 1) - 4m} : \tfrac{1}{2}Z$$

B) die Gestalten befinden sich in verwendeter Stellung; dann ist

bei sechsfl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X) : \Sigma(Y) = \frac{X}{2m - m'(3n' + 1)} : \frac{Y}{4m - m'(3n' - 1)}$$

bei Zusch. der Mittelecke:

$$\Sigma(X) : \Sigma(\tfrac{1}{2}Z) = \frac{(m + m')X}{m'(3n' + 1) - 2m} : \tfrac{1}{2}Z$$

2) Combination $mR. - m'R$

bei dreifl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X) : \Sigma(Y) = \frac{X}{m - 2m'} : \frac{Y}{2m - m'}$$

bei Abst. der Mittelecke:

$$\Sigma(X) : \Sigma(\tfrac{1}{2}Z) = \frac{(m + m')X}{2(2m' - m)} : \tfrac{1}{2}Z$$

3) Combination $mR.m'\mathrm{P}2$;

bei sechsfl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X) : \Sigma(Y) = \frac{X}{2m - 3m'} : \frac{Y}{4m - 3m'}$$

bei Zusch. der Mittelecke:

$$\Sigma(X) : \Sigma(\tfrac{1}{2}Z) = \frac{mX}{3m' - 2m} : \tfrac{1}{2}Z$$

4) Combination $mR.\infty R^{n'}$;

$$\Sigma(X) : \Sigma(Y) : \Sigma(\tfrac{1}{2}Z) = \frac{X}{3n' + 1} : \frac{Y}{3n' + 1} : \tfrac{1}{2}Z$$

Was diejenigen binären rhomboëdrischen Combinationen betrifft, in welchen eine Pyramide mP2 oder eines der Prismen die vorherrschende Gestalt ist, so gelten für sie die in den §§. 752 und 753 angegebenen Verhältnisse der Kantensegmente, und es ist nur

Digitized by Google

darauf zu achten, dass man die nach dem Gesetze der rhomboëdrischen Hemiëdrie bestimmte **Hälfte** der Flächen der daselbst angegebenen $m'Pn'$ und $m'P$ einzeichnet.

Fünftes Capitel.

Von der Zeichnung der rhombischen Gestalten und Combinationen.

§. 757.

Zeichnung der Grundgestalt einer rhombischen Krystallreihe.

Da die drei Axen einer rhombischen Krystallreihe auf einander noch rechtwinklig sind, so kann man bei der Construction ihrer Grundgestalt von der Projection der Axen des Oktaëders in Fig. 796 ausgehen, weil diese das richtige Bild dreier, auf einander senkrechter Linien für den Declinationswinkel $\delta = 18° 26'$, und einen gegebenen Elevationswinkel ε darstellen. Während aber die Axen des Oktaëders in dem Verhältnisse der durchgängigen Gleichheit stehen, findet zwischen den Axen der rhombischen Grundgestalt P das Verhältniss $a:b:c$, oder $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}:1$ Statt. Man lasse also diejenigen der horizontalen Axen in Fig. 796, welche die Brachydiagonale der Grundgestalt vorstellen soll, unverändert, vervielfältige dagegen die andere horizontale Axe nach den Coëfficienten $\frac{b}{c}$, und die verticale Axe nach den Coëfficienten $\frac{a}{c}$, so sind die Axen der verlangten Grundgestalt gefunden, deren Bild nun leicht zu vollenden ist. — Was die Wahl der Brachydiagonale betrifft, so scheint es im Allgemeinen rathsam, die auf den Beobachter zulau-

Digitized by Google

fende horizontale Axe BB' als solche zu bestimmen, weil dann die Makrodiagonale auch ihrer scheinbaren Länge nach im Bilde jedenfalls die grössere Linie ist, während nicht selten das Gegentheil eintreten würde, wenn CC' die Brachydiagonale vorstellen soll.

Die Sphenoide dieses Systemes werden ganz nach denselben Regeln gezeichnet wie die Sphenoide des Tetragonalsystemes.

§. 758.

Zeichnung der abgeleiteten Gestalten.

Nachdem die Grundgestalt einer rhombischen Krystallreihe gezeichnet worden, ist die Zeichnung aller übrigen Gestalten eine sehr einfache Aufgabe, indem man nur die Constructionen der Ableitung genau so um das Bild der Grundgestalt auszuführen hat, wie solche um die wirkliche Grundgestalt im zweiten Capitel des vierten Abschnittes der reinen Krystallographie vollzogen worden sind. Man kann dabei für jedes $m\bar{P}n$ und $m\breve{P}n$ entweder unmittelbar die Verhältnisse

$$ma : nb : c$$
$$ma : b : nc$$

oder auch, zumal wenn n sehr gross ist, die Verhältnisse

$$\frac{m}{n}a : b : \frac{1}{n}c$$
$$\frac{m}{n}a : \frac{1}{n}b : c$$

einführen, mittels welcher man die richtige Lage der Kanten der Gestalten $m\bar{P}n$ und $m\breve{P}n$ erhält, und darauf diese Kanten selbst leicht da eintragen kann, wo sie in der Combination erscheinen sollen.

Ist einer der Ableitungscoëfficienten $= \infty$, so zeichnet man nur den Querschnitt des Prismas in der resp. Coordinatebene, zieht durch die Eckpuncte dieses

Digitized by Google

Querschnittes Parallelen mit der Axe des Prismas, und die Construction ist vollendet.

§. 759.

Kantensegmente in den Combinationen rhombischer Gestalten.

Was die Zeichnung der rhombischen Combinationen betrifft, so ist es gewöhnlich am einfachsten, die Lage der Combinationskanten graphisch zu bestimmen; will man sie jedoch auch hier von den Verhältnissen der Kantensegmente abhängig machen, so dienen dafür folgende Bestimmungen.

Es sey gegeben eine Gestalt P durch das Verhältniss der Dimensionen $a:b:c$, und eine Gestalt P′ durch das Verhältniss der Dimensionen $a':b':c'$, so sind für die in den Octanten der positiven Halbaxen fallende Fläche von P die Gleichungen

der Kante X .... $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, und $z=0$

- - - Y .... $\frac{z}{c}+\frac{x}{a}=1$, - $y=0$

- - - Z .... $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, - $x=0$

und für die analog liegende Fläche von P′ die Gleichungen derselben Kanten identisch mit den vorstehenden, wenn a, b und c mit Accenten versehen werden.

Die Kanten X und X', Y und Y', Z und Z' schneiden einander, und bilden so die Durchschnittspuncte (x), (y) und (z), deren Coordinaten folgende sind:

für den Punct (x),

$$a-x=-\frac{a}{b}y,\quad y=\frac{bb'(a-a')}{ab'-a'b},\quad z=0$$

für den Punct (y),

$$a-x=\frac{a}{c}z,\quad y=0,\quad z=\frac{cc'(a-a')}{ac'-a'c}$$

Digitized by Google

für den Punct (z),

$$x = 0,\ y = \frac{bb'(c-c')}{cb'-c'b},\ c - z = \frac{c}{b}y$$

Man findet nun leicht die Kantensegmente, und hierauf durch Vergleichung je zweier, an einem und demselben Eckpuncte gelegener Segmente folgende Verhältnisse derselben:

Es verhalten sich an P, bei vierfl. Zusp. seiner Polecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Y) = \frac{b'X}{ab'-a'b}:\frac{c'Y}{ac'-a'c}$$

bei vierfl. Zusp. der makrod. Mittelecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Z) = \frac{a'X}{ba'-b'a}:\frac{c'Z}{bc'-b'c}$$

bei vierfl. Zusp. der brachyd. Mittelecke:

$$\Sigma(Y):\Sigma(Z) = \frac{a'Y}{ca'-c'a}:\frac{b'Z}{cb'-c'b}$$

§. 760.

Fortsetzung.

Wir haben nun die Resultate des vorigen §. als Functionen der Ableitungscoëfficienten auszudrücken, und von den Dimensionen der Grundgestalt $a:b:c$ unabhängig zu machen.

A) die Gestalten sind gleichnamig, und zwar:

I) makrodiagonal, also die Combination $m\bar{P}n.$ $m'\bar{P}n'$, dann ist

das Verhältniss $a:b:c$ mit $ma:nb:c$

- - - - $a':b':c'$ - $m'a:n'b:c$

zu vertauschen; und es wird für $m\bar{P}n$

1) bei vierfl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Y) = \frac{n'X}{mn'-m'n}:\frac{Y}{m-m'}$$

2) bei vierfl. Zusp. der makrod. Mittelecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Z) = \frac{m'X}{m'n-mn'}:\frac{Z}{n-n'}$$

Digitized by Google

3) bei vierfl. Zusp. der brachyd. Mittelecke:

$$\Sigma(Y):\Sigma(Z) = \frac{m'Y}{m'-m} : \frac{n'Z}{n'-n}$$

II) brachydiagonal, also die Combination $m\breve{P}n$. $m'\breve{P}n'$, dann ist

das Verhältniss $a:b:c$ mit $ma:b:nc$
- - - - $a':b':c'$ - $m'a:b:n'c$

zu vertauschen, und es wird für $m\breve{P}n$

1) bei vierfl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Y) = \frac{X}{m-m'} : \frac{n'Y}{mn'-m'n}$$

2) bei vierfl. Zusp. der makrod. Mittelecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Z) = \frac{m'X}{m'-m} : \frac{n'Z}{n'-n}$$

3) bei vierfl. Zusp. der brachyd. Mittelecke:

$$\Sigma(Y):\Sigma(Z) = \frac{m'Y}{m'n-mn'} : \frac{Z}{n-n'}$$

B) die Gestalten sind ungleichnamig, und zwar die vorherrschende Gestalt:

I) makrodiagonal, also die Combination $m\bar{P}n$. $m'\breve{P}n'$, dann ist

das Verhältniss $a:b:c$ mit $ma:nb;c$
- - - - $a':b':c'$ - $m'a:b:n'c$

zu vertauschen, und es wird für $m\bar{P}n$

1) bei vierfl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Y) = \frac{X}{m-m'n} : \frac{n'Y}{mn'-m'}$$

2) bei vierfl. Zusp. der makrod. Mittelecke:

$$\Sigma(X):\Sigma(Z) = \frac{m'X}{m'n-m} : \frac{n'Z}{nn'-1}$$

II) brachydiagonal, also die Combination $m\breve{P}n$. $m'\bar{P}n'$, dann ist

das Verhältniss $a:b:c$ mit $ma:b:nc$
- - - - $a':b':c'$ - $m'a:n'b:c$

zu vertauschen, und es wird für $m\breve{P}n$

Digitized by Google

1) bei vierfl. Zusp. der Polecke:

$$\Sigma(X) : \Sigma(Y) = \frac{n'X}{mn'-m'} : \frac{Y}{m-m'n}$$

2) bei vierfl. Zusp. der brachyd. Mittelecke:

$$\Sigma(Y) : \Sigma(Z) = \frac{m'Y}{m'n-m} : \frac{n'Z}{nn'-1}$$

§. 761.

Kantensegmente in P und ∞P.

Da in den gewöhnlichsten Combinationen entweder die Grundgestalt, oder das Prisma der Hauptreihe die vorherrschende Gestalt zu seyn pflegt, so ist es bequem, die den Gestalten P und ∞P entsprechenden Verhältnisse der Kantensegmente besonders zur Hand zu haben.

I) Combinationen der Grundgestalt.

1) Comb. $P.m\breve{\bar{P}}n$;

bei vierfl. Zusp. der Polecke ist

$$\Sigma\begin{matrix}(X)\\(Y)\end{matrix} : \Sigma\begin{matrix}(Y)\\(X)\end{matrix} = \frac{1}{1-m}\left\{\begin{matrix}X\\Y\end{matrix}\right. : \frac{n}{n-m}\left\{\begin{matrix}Y\\X\end{matrix}\right.$$

bei vierfl. Zusp. der makrod. oder brachyd. Mittelecke:

$$\Sigma\begin{matrix}(X)\\(Y)\end{matrix} : \Sigma(Z) = \frac{m}{m-1}\left\{\begin{matrix}X\\Y\end{matrix}\right. : \frac{n}{n-1}Z$$

Die oberen Buchstaben gelten für $m\breve{P}n$, die unteren für $m\bar{P}n$.

2) Comb. $P.m\breve{\bar{P}}\infty$;

bei Zusch. der Polecke ist

$$\Sigma\begin{matrix}(X)\\(Y)\end{matrix} : \Sigma\begin{matrix}(Y)\\(X)\end{matrix} = \left\{\begin{matrix}X\\Y\end{matrix}\right. : 1-m\left\{\begin{matrix}Y\\X\end{matrix}\right.$$

bei Zusch. der makrod. oder brachyd. Mittelecke:

$$\Sigma\begin{matrix}(X)\\(Y)\end{matrix} : \Sigma(Z) = \left\{\begin{matrix}X\\Y\end{matrix}\right. : \frac{m-1}{m}Z$$

Digitized by Google

3) Comb. $P.\infty\breve{\bar{P}}n$

bei Zusch. der makrod. oder brachyd. Mittelecke:

$$\Sigma\genfrac{}{}{0pt}{}{(X)}{(Y)}:\Sigma(Z)=\frac{n-1}{n}\left\{\begin{matrix}X\\Y\end{matrix}\right.:Z$$

II) Combinationen des Prismas ∞P; denken wir das Prisma durch die Fläche 0P begrenzt, und setzen seine Endkante $=Z$, so wird für $\Sigma(Z)=Z$ das in der makrodiagonalen oder brachydiagonalen Seitenkante abwärts zu nehmende Segment

für die Combination $\infty P.m\breve{\bar{P}}n$

$$\Sigma\genfrac{}{}{0pt}{}{(X)}{(Y)}=\frac{ma(n-1)}{n}$$

für die Combination $\infty P.m\breve{\bar{P}}\infty$

$$\Sigma\genfrac{}{}{0pt}{}{(X)}{(Y)}=ma$$

Sechstes Capitel.

Von der Zeichnung der klinoëdrischen Gestalten.

§. 762.

Allgemeine Bemerkung.

Bei der Zeichnung der Krystallformen der drei klinoëdrischen Krystallsysteme wird im Allgemeinen das Axensystem des Oktaëders zu Grunde gelegt, mit dessen Projection daher folgende zwei wesentliche Veränderungen vorgenommen werden müssen:

1) die Einzeichnung der schiefen Neigungswinkel der Axen;
2) die Reduction der Axen auf das Verhältniss $a:b:c$ der gegebenen Grundgestalt.

Nachdem diese beiden Fundamentalconstructionen vollendet sind, ist die Zeichnung aller möglichen Ge-

Digitized by Google

stalten oder Theilgestalten einer klinoëdrischen Krystallreihe mit Leichtigkeit zu vollziehen, weshalb die Angabe besonderer Regeln ganz überflüssig seyn würde. Alles, was in §. 758. für das rhombische System gesagt worden, gilt unverändert auch für die Constructionen in den drei klinoëdrischen Systemen, weil die dabei zu berücksichtigenden Verhältnisse von den schiefen Neigungswinkeln der Axen gänzlich unabhängig sind. Weil man es jedoch zunächst immer nur mit einzelnen Theilgestalten zu thun hat, so kommt auch auf die Zeichnung der vollständigen Pyramiden weniger an, und die Lehre von der Zeichnung der klinoëdrischen Krystallformen würde sich fast nur auf die Regel beschränken, nach welcher jene beiden Fundamentalconstructionen in der gegebenen Projection des Oktaëders vorzunehmen sind, wenn nicht noch die in diesem Systeme fast unentbehrlichen orthographischen Horizontal- und Klinodiagonalprojectionen einer kurzen Erwähnung bedürften.

§. 763.

Zeichnung der Axen einer monoklinoëdrischen Grundgestalt.

Die monoklinoëdrischen Gestalten lassen sich auf zwei verschiedene Arten ins Auge fassen, welche man als die Ansichten *en face* und im Profil unterscheiden kann. Wenn nämlich die Gestalt so gestellt wird, dass der klinodiagonale Hauptschnitt auf den Beobachter gerichtet ist, so wird sie sich gleichsam *en face* präsentiren, während sie dagegen mehr im Profil erscheint, wenn der orthodiagonale Hauptschnitt die Richtung auf den Beobachter hat. Diese Verschiedenheit der Ansicht wird in die Zeichnungen der Gestalten dadurch übergetragen, dass man in der Projection der Oktaëderaxen Fig. 796 entweder den Hauptschnitt *ABAB* oder den Hauptschnitt *ACAC* zum klinodiagonalen Hauptschnitte bestimmt. Da nun die Hauptaxe

jedenfalls im Bilde vertical erscheinen muss, so wird bei der Darstellung *en face* die Axe *BB'*, und bei der Darstellung im Profil die Axe *CC* des Oktaëders eine angemessene Veränderung ihrer Lage erfahren müssen, damit sie im Bilde genau so gegen die Hauptaxe geneigt erscheint, wie es der, in der Wirklichkeit Statt findende Neigungswinkel der Klinodiagonale gegen die Axe fordert.

A) Darstellung des durch den Winkel γ und das Verhältniss der Lineardimensionen 1 : 1 : 1 bestimmten Axensystemes *en face*.

Man nehme in der verticalen Axe *AA* des Oktaëders, Fig. 813, aufwärts von *M* aus die Grösse

$$MA' = MA \times \cos\gamma$$

und in der horizontalen Axe *BB* rückwärts oder vorwärts von *M* aus, je nachdem im Bilde die schiefe Basis nach dem Beobachter zu, oder von ihm weg fallen soll, die Grösse

$$MB' = MB \times \sin\gamma$$

Hierauf vollende man das Parallelogramm über *MA'* und *MB'*, ziehe dessen Diagonale *MD*, verlängere solche über *M*, und mache die Verlängerung ihr selbst gleich, so ist

AA die Hauptaxe,
DD die Klinodiagonale,
CC die Orthodiagonale

einer monoklinoëdrischen Pyramide, für den Neigungswinkel $0P.\infty P\infty = \gamma$, und für das Verhältniss der durchgängigen Gleichheit der Lineardimensionen.

Im Allgemeinen ist es vortheilhaft, die schiefe Basis nach vorn einfallen zu lassen.

B) Darstellung des durch den Winkel γ und das Verhältniss der Lineardimensionen 1 : 1 : 1 bestimmten Axensystemes im Profil.

Man nehme wiederum in der verticalen Axe *AA* des Oktaeders, Fig. 813, aufwärts von *M* aus die Grösse

$$MA'' = MA \times \cos\gamma$$

und in der horizontalen Axe CC nach links von M aus die Grösse

$$MC' = MC \times \sin\gamma$$

vollende das Parallelogramm über MA'' und MC', ziehe dessen Diagonale EM, verlängere solche über M, und mache ihre Verlängerung ihr selbst gleich, so ist für das Verhältniss 1 : 1 : 1

AA die Hauptaxe,
BB die Orthodiagonale,
EE die Klinodiagonale

des verlangten Axensystemes.

Hiermit wäre für beide Darstellungsarten die erforderliche Winkelconstruction vollendet. Was nun aber das wahre Grössenverhältniss der Lineardimensionen einer bestimmten monoklinoedrischen Krystallreihe betrifft, so ist solches allgemein durch $a : b : c$ gegeben, wo b die Klinodiagonale bedeutet; man verwandle dieses Verhältniss in

$$\frac{a}{b} : 1 : \frac{c}{b} \text{ oder } \frac{a}{c} : \frac{b}{c} : 1$$

lasse entweder die Klinodiagonale oder die Orthodiagonale unverändert, so wie sie jetzt im Bilde erscheint, während man die Hauptaxe nach dem Coëfficienten $\frac{a}{b}$ oder $\frac{a}{c}$, die andere Nebenaxe nach dem Coëfficienten $\frac{c}{b}$ oder $\frac{b}{c}$ vervielfältigt, so ist das richtige Verhältniss der Lineardimensionen der gegebenen Grundgestalt im Bilde dargestellt.

§. 764.

Zeichnung der Axen einer diklinoëdrischen Grundgestalt.

In jeder diklinoëdrischen Krystallreihe sind die beiden verticalen Hauptschnitte auf einander rechtwinklig, während sie beide von dem basischen Haupt-

Digitized by Google

schnitte, und folglich auch die Hauptaxe von den beiden Nebenaxen unter schiefen Winkeln geschnitten werden. Die Flächen *ABAB* und *ACAC* im Bilde der Oktaëderaxen können daher wohl noch die beiden verticalen Hauptschnitte, aber die Linien *BB* und *CC* nicht mehr die beiden Nebenaxen repräsentiren. Um nun diese Nebenaxen ihrer Lage nach richtig einzutragen, so bestimme man ihre Neigungswinkel β und γ gegen die Hauptaxe (welche jedoch meist schon gegeben sind), und nehme hierauf in der verticalen Axe *AA* des Oktaëders Fig. 813 aufwärts von *M* die beiden Längen

$$MA' = MA \times \cos\beta$$
$$MA'' = MA \times \cos\gamma$$

Was nun die Lage der Makrodiagonale betrifft, so scheint es im Allgemeinen vortheilhaft, die Ebene *ACAC* als makrodiagonalen Hauptschnitt zu bestimmen, weil dann das scheinbare Grössenverhältniss ihrem wirklichen Verhältnisse angemessen bleibt. Man nehme also in der horizontalen Axe *CC* von *M* aus nach links die Grösse

$$MC' = MC \times \sin\gamma$$

und in der horizontalen Axe *BB* von *M* aus nach hinten die Grösse

$$MB' = MB \times \sin\beta$$

vollende die Parallelogramme über *MA'* und *MB'*, über *MA''* und *MC'*, ziehe deren Diagonalen *DM* und *EM*, verlängere beide, und mache ihre Verlängerungen ihnen selbst gleich, so ist für das Verhältniss 1:1:1

AA die Hauptaxe,
DD die Brachydiagonale,
EE die Makrodiagonale.

Um nun aber diese Linien in ihrem wahren Grössenverhältnisse $a:b:c$ darzustellen, lässt man z. B. die *DD* unverändert, und vervielfältigt die *AA* nach

Digitized by Google

dem Coëfficienten $\frac{a}{c}$, die EE nach dem Coëfficienten $\frac{b}{c}$, so ist das Axensystem der verlangten diklinoëdrischen Grundgestalt entworfen.

§. 765.

Zeichnung der Axen einer triklinoëdrischen Grundgestalt.

In einer jeden triklinoëdrischen Krystallreihe bilden die beiden verticalen Hauptschnitte mit einander den Winkel A; weil nun in der Projection der Oktaëderaxen die Ebenen $ACAC$ und $ABAB$ rechtwinklig sind, so fragt es sich zuvörderst, welche derselben ihre ursprüngliche Lage behaupten, und welche sie verlassen soll, um den Neigungswinkel A herzustellen. Im Allgemeinen scheint es vortheilhafter, den auf den Beobachter zulaufenden (brachydiagonalen) Hauptschnitt $ABAB$, Fig. 814, in unveränderter Lage zu lassen, und den Hauptschnitt $ACAC$ so weit zu drehen, als erforderlich ist, damit seine neue Projection dem wirklichen Neigungswinkel A entspreche. Zu dem Ende nehme man in der BB von M aus vorwärts die Grösse

$$MB' = MB \times \cos A$$

und in der CC von M aus nach rechts oder nach links (je nachdem der spitze Winkel A rechts oder links erscheint) die Grösse

$$MC' = MC \times \sin A$$

vollende das Parallelogramm über MB' und MC', und ziehe dessen Diagonale MD, so ist die Ebene ADA die richtige Projection des makrodiagonalen Hauptschnittes, und die Linie MD eine horizontale, der MB und MA gleiche Linie.

So wie jetzt diese Linien im Bilde erscheinen, ist also die MA auf der MD sowohl als auf der MB noch rechtwinklig, während sie doch in der Wirk-

lichkeit mit jener den Winkel γ, mit dieser den Winkel β bildet. Man nehme also in der AA von M aus aufwärts die Grössen

$$MA' = MA \times \cos\beta$$
$$MA'' = MA \times \cos\gamma$$

ferner in der BB von M aus vorwärts oder rückwärts (je nachdem der spitze Winkel β vorn oder hinten liegt) die Grösse

$$MB' = MB \times \sin\beta$$

und endlich in der DD von M aus nach links oder nach rechts (je nachdem der spitze Winkel γ links oder rechts erscheint) die Grösse

$$MD' = MD \times \sin\gamma$$

vollende die Parallelogramme über MA' und MB', über MA'' und MD', ziehe deren Diagonalen EM und FM, verlängere solche über M, und mache ihre Verlängerungen ihnen selbst gleich, so ist für das Verhältniss 1 : 1 : 1

AA die Hauptaxe
FF die Makrodiagonale
EE die Brachydiagonale

der Krystallreihe. Um nun diese drei Linien in ihrem wahren Grössenverhältnisse $a:b:c$ darzustellen, lässt man die eine, z. B. die EE, unverändert, und vervielfacht die AA nach dem Coëfficienten $\frac{a}{c}$, die FF nach dem Coëfficienten $\frac{b}{c}$, so ist das Axensystem der verlangten triklinoëdrischen Grundgestalt entworfen.

§. 766.

Combinationen der klinoëdrischen Krystallsysteme.

In den klinoëdrischen Krystallsystemen führt die graphische Bestimmung der Combinationskante meist eben so schnell zum Ziele als die Bestimmung der-

Digitized by Google

selben durch die Kantensegmente, unter welchen hier die Segmente der Intersectionen der einzelen Theilgestalten zu verstehen sind. Will man jedoch dabei die Verhältnisse der Kantensegmente zu Grunde legen, so hat man sich unmittelbar an die für das rhombische System gegebenen Resultate zu halten, welche in allen schiefwinkligen trimetrischen Axensystemen unverändert gelten. Uebrigens ist es bei der Zeichnung klinoëdrischer Combinationen rathsam, zuerst den Inbegriff der vorherrschendsten Theilgestalten zu zeichnen, und dann die untergeordneteren Theilgestalten einzutragen, deren Lage sich meist durch den Parallelismus ihrer Combinationskanten zu den Kanten der vorherrschenden Gestalten bestimmt.

§. 767.

Horizontal- und Klinodiagonalprojectionen.

Das richtige Verständniss des Bildes einer jeden mono-, di- und tri-klinoëdrischen Combination wird durch Hinzufügung einer orthographischen Horizontal- oder Klinodiagonalprojection bedeutend erleichtert, weshalb dergleichen Projectionen, wenigstens für die verwickelteren Combinationen dieser Systeme sehr zu empfehlen sind.

Bei der Horizontalprojection, welche auch für die verwickelteren rhombischen Combinationen sehr nützlich ist, dient die Horizontalebene als Projectionsfläche und die Hauptaxe bestimmt die Richtung des Gesichtsstrahles Sie ist daher von der Hauptaxe gänzlich unabhängig, und reducirt sich auf die Projection der beiden Nebenaxen in der Horizontalebene. Zu dem Ende zieht man zwei sich unter dem Winkel A (welcher für das mono- und diklinoëdrische System $= 90°$) schneidende Linien, macht die eine derselben $= b \sin\gamma$, die andere $= c \sin\beta$, so ist die Horizontalprojection der Dimensionen der Grund-

Digitized by Google

gestalt vollendet, worauf die Projection jeder andern Gestalt nur von den Ableitungscoëfficienten der Nebenaxen abhängig, und sehr leicht auszuführen ist.

Für die monoklinoëdrischen Combinationen insbesondere ist nicht selten statt der Horizontal- eine Klinodiagonalprojection zu empfehlen, bei welcher die Ebene des klinodiagonalen Hauptschnittes als Projectionsfläche dient, während die Gesichtsstrahlen der Orthodiagonale parallel sind. Diese Projection ist daher von der Orthodiagonale gänzlich unabhängig, und sehr leicht auszuführen, weil man nur den schiefen Neigungswinkel γ auf das Papier zu tragen, und seine Schenkel in dem Verhältnisse von $a:b$ zu nehmen hat, um die Elemente für das Bild der Grundgestalt zu erhalten, worauf sich die Elemente für die Projectionen aller übrigen Gestalten unmittelbar durch deren auf die Hauptaxe und Klinodiagonale bezüglichen Ableitungszahlen ergeben.

Fünfter Abschnitt.

Von der Modellirung der Krystallformen.

Erstes Capitel.

Von den Holzmodellen.

I. Allgemeine Bemerkungen über die Holzmodellirung.

§. 768.

Nutzen der Krystallmodelle und verschiedene Arten derselben.

Ein noch wichtigeres Hülfsmittel als die Zeichnungen bilden bei dem Studium der Krystallographie die Modelle der Krystallformen. Denn, wie genau auch die Zeichnung einer Krystallform ausgeführt, und wie

Digitized by Google

sehr die Illusion des körperlichen Hervortretens durch Darstellung der hinteren Kanten, oder durch richtige Schattirung der Flächen gesteigert werden mag, so wird doch immer ein gutes Modell noch weit mehr dazu geeignet seyn, uns eine richtige und deutliche Vorstellung der Krystallform zu verschaffen. Ja, weil es der Krystallographie nur auf die Form, und gar nicht auf den materiellen Inhalt derselben ankommt, so werden Modelle, es mögen solche aus Pappe, Holz, Gyps, Thon oder irgend einem andern Materiale bestehen, dem Bedürfnisse des Studirenden nicht nur eben so wohl Genüge leisten, als die von der Natur ausgebildeten Krystalle selbst, sondern sie werden auch wegen ihrer regelmässigen, ringsum vollendeten Ausbildung und ihres beliebig zu vergrössernden Maassstabes für den Anfänger des krystallographischen Studiums den wirklichen Krystallen sogar vorzuziehen seyn.

Die Krystallmodelle sind entweder hohl oder massiv, und lassen sich ausserdem in technischer Hinsicht theils nach dem Material, aus welchem sie bestehen, theils nach den Operationen, durch welche sie dargestellt werden, eintheilen. An gegenwärtigem Orte, wo es uns nicht sowohl um eine vollständige Anleitung zur Krystalltechnik als um die theoretische Grundlage derselben zu thun ist, werden wir uns auf die, durch das verschiedene Material bedingten, Verschiedenheiten der technischen Operationen nicht weiter einlassen, sondern nur die Darstellung der Holz- und Pappmodelle berücksichtigen, weil die ersteren den meisten übrigen Modellen zu Grunde liegen *), und

---

*) Die aus Gyps, Thon, Biscuit geformten, so wie die aus Metallen oder metallischen Compositionen gegossenen Modelle setzen nämlich Formen, und diese wiederum genau gearbeitete Holzmodelle voraus; die aus Speckstein und andern schneidba-

die letzteren nächst jenen noch am häufigsten ausgeführt zu werden pflegen.

§. 769.

Regeln bei Fertigung der Holzmodelle; Material und Werkzeuge.

Die allgemeinen Regeln bei der Anfertigung von Holzmodellen sind besonders folgende:

1) Jede Krystallform setzt einen Modellklotz voraus, dessen Gestalt eine ihrer umschriebenen Formen, und zwar gewöhnlich die äusserste dieser Formen, d. h. der Inbegriff der den Coordinatebenen entsprechenden Flächenpaare ist. Zuweilen lässt sich der Modellklotz so wählen, dass einige seiner Flächen unmittelbar für die zu modellirende Gestalt benutzt werden können.

2) Jeder Schnitt durch den Klotz muss eine Krystallfläche geben, und daher jeder andere Schnitt, der solches nicht leistet, als unnütz vermieden werden.

3) Die Neigungswinkel der Schnittflächen müssen den Neigungswinkeln der entsprechenden Krystallflächen so nahe kommen als möglich; dieser Forderung wird, bei der Schwierigkeit der Ausführung, hinreichend entsprochen, wenn die Winkel nur bis auf $\frac{1}{2}°$ oder 1° genau sind.

4) Jedem Schnitte muss seine Richtung durch vorgezeichnete Linien auf den Flächen des Klotzes bestimmt werden. Die Linie oder der Punct, in welchen die Säge zuerst in den Klotz einschneidet, kann man die Ansatzlinie oder den

---

ren Substanzen gefertigten Modelle aber werden nach denselben Regeln geschnitten wie die Holzmodelle. Die trefflichsten Holzmodelle, die ich kenne, fertigt der hiesige Mechanikus Beschorner; sie sind mit einer Genauigkeit und Schärfe ausgeführt, die nichts zu wünschen übrig lassen.

Digitized by Google

Ansatzpunct, und die von den Endpuncten der Ansatzlinie oder vom Ansatztpuncte auf den andern Flächen des Klotzes auslaufenden Linien die Bahnlinien des Schnittes nennen, weil sie die weitere Richtung oder eigentliche Bahn desselben bestimmen.

5) Soll eine Combination modellirt werden, so werden in der Regel die vorherrschenden Gestalten zuerst dargestellt; doch leidet diese Regel manche Ausnahmen.

Die zur Darstellung der Krystallmodelle brauchbarsten Hölzer sind solche, welche weder zu weich noch zu hart sind, und nicht leicht spalten oder splittern, daher besonders Birnbaum- und Apfelbaumholz.

Was die Werkzeuge betrifft, so gehören dahin

a) Sägen, deren Blätter stark genug seyn müssen, um sich nicht bei einer schiefen Lage zu biegen; auch dürfen die Zähne nicht zu sehr geschränkt seyn, damit eine zu grosse Rauhigkeit der Schnittflächen, und das Zersplittern der Kanten bei dem Ein- und Austritte der Säge vermieden wird.

b) Schnitzer, zur Darstellung kleiner Abstumpfungs- und Zuspitzungsflächen in den Combinationen, so wie zur Schärfung der Kanten.

c) Raspeln und Feilen von verschiedenen Graden der Feinheit, zur Schärfung der Kanten, zum Abglätten der Flächen, und selbst zur Darstellung kleiner Flächen in den Combinationen.

Bei dem Schneiden mit der Säge wird der Modellklotz entweder unmittelbar, oder, wenn dies nicht ohne Verletzung der schon fertigen Kanten und Ecke angeht, zwischen Korkscheiben in einen Schraubenstock eingespannt. Muss man, wie dies oft der Fall, das Modell mit der Hand halten, so kann man es zur Versicherung seiner Lage ebenfalls gegen eine

Digitized by Google

Unterlage von Kork stemmen, um nicht die schon fertigen und nach unten gelegenen Kanten und Ecke zu beschädigen. Weil man aber den Modellklotz um so besser einspannen oder auch mit freier Hand halten, und folglich die Schnitte um so sicherer und richtiger führen kann, je weniger Kanten und Ecke der darzustellenden Gestalt blosgelegt sind, so hat man jede vorzeitige Zerstückelung des Klotzes zu vermeiden. Hieraus scheint die für die Holzmodellirung sehr wichtige Regel zu folgen, dass die einzelen Schnitte in vielen Fällen nicht sogleich durchgeführt, sondern nur vorläufig angelegt, und erst nach beendigter Anlage aller erforderlichen Schnitte vollendet werden dürfen. Denn ein unter günstigen Bedingungen der Lage und Festhaltung angelegter Schnitt lässt sich auch unter weniger günstigen Bedingungen zwar eben so richtig fortsetzen, aber nicht so richtig anlegen.

§. 770.

Vorschlag zu einer Modellirungsmaschine.

Will man die Krystallmodelle mit möglichst grosser Leichtigkeit und Genauigkeit ausführen, so wird dies nur mittels einer Maschine gelingen, in welcher sowohl der Modellklotz in seiner erforderlichen Lage fixirt, als auch die Säge in der Ebene des verlangten Schnittes erhalten werden kann. Wenn man bedenkt, dass nach der gewöhnlichen Modellirungsmethode aus freier Hand

1) eine oft sehr verwickelte und zeitraubende Construction der Schnitte durch Vorzeichnung der nöthigen Ansatz- und Bahnlinien erfordert wird;
2) die einzelen Schnitte, wegen der freien Führung der Säge, weder ganz genau, noch alle gleichnamigen Schnitte ganz übereinstimmend geführt werden können, und
3) die Schnittflächen durch den ungleichförmigen

Gang, und durch die nicht ganz zu vermeidenden Biegungen und Schwankungen der Säge oft so striemig und gereift werden, dass sie eine bedeutende Nachhülfe durch die Feile erfordern;
so wird man die Vorzüge einer Krystallmodellirungsmaschine nicht verkennen, mittels welcher

1) alle Constructionen oder Vorzeichnungen der Schnitte entbehrlich gemacht,
2) die einzelen Schnitte genau, und alle gleichnamigen Schnitte völlig übereinstimmend geführt, und
3) die Schnittflächen selbst so eben werden, dass es einer Nachhülfe durch die Feile nur noch allenfalls zur letzten Abglättung derselben bedarf.

Ohne daher den Mechanikern vorgreifen zu wollen, welche, bei gehöriger Kenntniss der eigentlich zu lösenden Aufgabe, weit zweckmässigere Ideen zur Ausführung einer Modellirungsmaschine anzugeben wissen werden, erlaube ich mir im Folgenden einen Vorschlag mitzutheilen, wie etwa eine dergleichen Maschine herzustellen seyn dürfte *).

§. 771.

Fortsetzung.

Eine solche Krystallmodellirungsmaschine würde sich etwa auf folgende Art ausführen lassen.

In dem Rahmen *ABCD*, Fig. 815, lässt sich mittels einer starken Schraube *EF* das Bret *abcd* hin und her schieben, welches in zwei Fugen der Rahmenstücke *AC* und *BD* genau eingelassen, und in

*) Eine nur aus Holz und sehr roh gearbeitete Maschine dieser Art gab mir Resultate, welche befriedigend genug waren, um von einer genau und aus Eisen gearbeiteten Maschine Alles zu erwarten, was sich verlangen lässt.

Digitized by Google

seiner Mitte *e* cylindrisch durchbohrt ist, um den Zapfen des Modellträgers aufnehmen zu können.

Dieser Modellträger, welchen ich jetzt nur in seiner einfachsten Form beschreiben will, wie er zur Darstellung der gewöhnlichsten Gestalten des tesseralen und tetragonalen Systemes erfordert wird, besteht jedenfalls aus einer runden Scheibe *αβ*, Fig. 816, mit angedrehtem Zapfen *γ*, welcher sich in der Oeffnung *e* mit einigem Widerstande drehen lässt. An einer beliebigen Stelle der Peripherie dieser Scheibe ist die Zunge *δ* angesetzt, welche gleichsam den Index bei den Drehungen der Scheibe bildet, und zur Aufnahme eines eisernen Stellstiftes durchbohrt ist.

Auf der oberen Fläche der Scheibe ist ein fester, etwa $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ Zoll tiefer Rahmen angebracht, welcher für tesserale und tetragonale Gestalten quadratisch, für hexagonale Gestalten hexagonal, für rhombische, monoklinoëdrische und diklinoëdrische Gestalten rhombisch oder rectangulär, für triklinoëdrische Gestalten endlich rhomboidisch, jedenfalls aber in Bezug auf die mathematische Axe des Zapfens *γ* möglichst genau centrirt, und für die erstern drei Krystallsysteme so gestellt seyn muss, dass der Radius des Durchbohrungspunctes des Index *δ* mit einer seiner Seiten genau parallel ist. Die Grösse dieses Rahmens hängt übrigens von der Grösse ab, in welcher das Modell dargestellt werden soll.

Auf dem Brete *abcd* ziehe man nun genau durch den Mittelpunct zuvörderst zwei, seinen Seiten parallele Linien, *ee*, *ff*, und, gleichfalls durch den Mittelpunct, die Diagonalen *ad*, *bc* der beiden ersteren Linien, welche also gegen jede derselben unter 45° geneigt sind; die ersteren Linien bezeichne man mit ∞, die anderen mit 1. Endlich ziehe man noch mehre andere Linien, welche mit *ee* und *ff* beiderseits die Winkel *ω* bilden, wie solche durch die Werthe *tang ω*

Digitized by Google

$=\frac{1}{3}$, $=\frac{1}{2}$, $=\frac{2}{3}$, $=\frac{1}{3}$, oder allgemein $=\frac{1}{n}$ bestimmt werden, und bezeichne diese Linien mit 3, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$ u. s. w. *)

Hierauf stelle man den Krystallträger auf das Bret, und führe eine in den Mittelpunct der Durchbohrung des Index angebrachte Metallspitze rings auf dem Brete herum, so wird ein Kreis beschrieben, welcher alle vorher gezogenen Linien schneidet, und folglich in jeder derselben zwei Puncte bestimmt. In diesen Puncten wird nun das Bret mit demselben Bohrer durchbohrt, mit welchem das Loch im Index gebohrt wurde, so dass der Index durch den eisernen Stellstift an jedem Puncte unverrücklich befestigt werden kann.

§. 772.

Fortsetzung.

Im vorhergehenden §. ist der zur Stellung des Modellklotzes erforderliche Apparat beschrieben worden; wir gehen nun zu demjenigen Maschinentheile über, welcher die richtige Stellung der Säge bezweckt.

Die Säge muss entweder in einem Rahmen, oder noch besser, nach Art eines Pendels an einer Axe gehen, welche ihre Bewegung in einer Ebene hinreichend sichert. Einstweilen habe ich nur die erstere Vorrichtung ausführen lassen, welche zwar einfacher, aber mit manchen Unvollkommenheiten behaftet ist. Auf dem grossen Rahmen *ABCD*, Fig. 815, sind in *G* und *G* zwei Klötzer befestigt, welche in einer mit *AB* parallelen Richtung durchbohrt und als die Zapfen-

---

*) Diese Eintheilung bezieht sich zunächst nur auf tesserale und tetragonale Gestalten. Im Allgemeinen wäre es daher vorzuziehen, wenn die Peripherie in 360° getheilt, und eine Vorrichtung zur Arretirung des Krystallträgers an jedem beliebigen Puncte derselben vorhanden wäre.

Digitized by Google

lager des Sägerahmens zu betrachten sind. Dieser Sägerahmen selbst ist ein etwas starker, rectangulärer Rahmen *KKMM*, Fig. 818, dessen eine kürzere Seite jedoch fehlt, und nur in ihren Enden durch die zwei Zapfen *M* und *M* repräsentirt wird; auf den längeren Seiten *KM* und *KM* sind die Leitschienen *mm* so befestigt, dass ihr Abstand von der Fläche des Rahmens nur um sehr wenig grösser ist als die Dicke des Sägegestelles. Liegt dieser Sägerahmen in seinen Zapfenlagern, so kann man ihm jede beliebige Neigung gegen die Ebene des Rahmens *ABCD* geben, und es muss daher nicht nur ein Gradbogen zur Stellung, sondern auch eine Vorrichtung zur sicheren Arretirung des Sägerahmens angebracht werden.

Die Säge selbst endlich hat ungefähr die Form wie Fig. 819; das Blatt muss kurz, gut gehärtet und scharf eingespannt seyn, um nicht bei schiefer Lage durch das Gewicht der Säge und den Widerstand des Modellklotzes einer Biegung ausgesetzt zu seyn. Die eiserne Fassung oder das Gestelle der Säge muss durchgängig von gleicher Dicke, und das Blatt selbst den Seitenflächen des Gestelles genau parallel eingespannt seyn.

§. 773.

Fortsetzung.

Die Modellirungsmaschine, wie solche hier beschrieben worden, ist nur ein roher Entwurf von dem, was aus ihr werden kann, wenn sie in Metall und mit den gehörigen Verbesserungen ausgeführt wird; bei diesen Verbesserungen möchten vielleicht folgende zwei Vorschläge zu berücksichtigen seyn.

1) Der Modellträger kann, statt des oben beschriebenen festen Rahmens, mit einem aus zwei beweglichen Winkelstücken bestehenden Rahmen versehen werden, dessen beide Theile sich durch ein rechts und links gehendes, etwas stark gearbeitetes Schrau-

Digitized by Google

bengewinde einander beliebig nähern lassen, um Modellklötze von beliebigen Dimensionen bequem und sicher einspannen zu können. Für die Modelle tesseraler und tetragonaler Gestalten würden die Schenkel dieser Rahmenstücke den Winkel von 90°, für die Modelle hexagonaler Gestalten den Winkel von 120° bilden müssen; für die Modelle der übrigen Systeme könnte man sich besonderer Hülfswinkelstücke bedienen, die in den rechtwinkligen Rahmen eingesetzt würden. Die Hauptsache ist nur, dass der Mittelpunct des so zusammengesetzten Rahmens bei jeder Stellung der Rahmenstücke unverändert in der mathematischen Axe des Krystallträgers liegt, was durch möglichst genaue Arbeit des Schraubengewindes erreicht wird.

2) Die Säge kann, statt in einem Rahmen hin und her zu laufen, um eine Axe oscilliren. Freilich müssten dann die, das bogenförmige Sägeblatt tragenden Pendelstangen und besonders die Zapfen derselben, so wie der Rahmen selbst etwas stark gearbeitet werden, um allen Nutationen vorzubeugen. Auch müsste das Zapfenlager des Pendels in einem schwalbenschwanzförmigen Metallstücke angebracht seyn, welches in einem gleichgeformten Falze des oberen Rahmenstückes auf- und abgleitet, damit die Säge, so wie sie in den Modellklotz einschneidet, ungehindert nachrücken kann.

Uebrigens muss ich es den Mechanikern überlassen, diese Vorschläge nach ihrer Brauchbarkeit zu prüfen, und durch zweckmässigere zu ersetzen.

Nachdem wir uns nun im Allgemeinen mit den Hülfsmitteln der Holzmodellirung bekannt gemacht haben, schreiten wir zur Betrachtung der besondern Regeln, welche bei der Modellirung der Gestalten aus den verschiedenen Krystallsystemen zu befolgen sind,

Digitized by Google

wobei wir uns jedoch nur auf die einfachsten Formen einlassen können.

II. Modellirung der tesseralen Gestalten.

§. 774.

Elemente zur Bestimmung der Lage der Schnitte.

Der Grundkörper, von welchem man bei der Modellirung der tesseralen Gestalten am vortheilhaftesten ausgeht, und welcher daher gewöhnlich als Modellklotz dient, ist das Hexaëder, dessen Flächenmittelpuncte die Pole der Hauptaxen aller zu modellirenden Gestalten werden müssen. Um nun die zur Bestimmung der Schnitte erforderlichen Ansatz- und Bahnlinien in der grössten Allgemeinheit zu finden, wollen wir dieselben sogleich für das Hexakisoktaëder mOn aufsuchen.

Man denke also das Hexaëder $\infty O \infty$ mit dem eingeschriebenen mOn in normaler Stellung vor sich, und bezeichne sein oberes, vorderes, rechtes Eck mit E, Fig. 820, seinen Mittelpunct mit M, wähle die MO, MR und MV als die positiven Halbaxen der x, y und z, so sind die Coordinaten des Punctes E

$$x = 1,\ y = 1,\ z = 1$$

und die Gleichungen der drei von diesem Puncte auslaufenden Hexaëderkanten folgende:

der EL ..... $x = 1,\ z = 1$

der EH ..... $x = 1,\ y = 1$

der EU ..... $y = 1,\ z = 1$

Nun ist die Gleichung einer von den beiden, am Puncte V oben rechts liegenden Flächen des Hexakisoktaëders

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$$

also werden die Coordinaten ihres Durchschnittspunctes

mit EL ..... $x = 1,\ y = -\frac{n}{m},\ z = 1$

mit EH..... $x = 1$, $y = 1$, $z = 1 - \frac{m+n}{mn}$

mit EU..... $x = -\frac{m}{n}$, $y = 1$, $z = 1$

Nimmt man die Coordinaten y in EL, z in EH und x in EU mit entgegengesetzten Vorzeichen, und addirt zu jeder die Länge 1 der halben Hexaëderkante, so erhält man die Segmente der drei Kanten EL, EH, EU von E aus gerechnet, wie folgt

$$\Sigma(EL) = \frac{m+n}{m},$$

$$\Sigma(EH) = \frac{m+n}{mn},$$

$$\Sigma(EU) = \frac{m+n}{n},$$

und es verhalten sich daher diese drei Segmente $= n : 1 : m$.

Es ist aber besser, zur Bequemlichkeit des Künstlers die g a n z e Hexaëderkante $= 1$ zu setzen; wodurch die entsprechenden Kantensegmente folgende Werthe erhalten

$$\Sigma(EL) = \frac{m+n}{2m},$$

$$\Sigma(EH) = \frac{m+n}{2mn},$$

$$\Sigma(EU) = \frac{m+n}{2n},$$

Mit diesen drei Ausdrücken ist Alles gefunden, was von Seiten der Theorie zur Modellirung der tesseralen Gestalten erfordert wird; denn alles Uebrige ist ein Inbegriff praktischer Regeln, bei deren Darstellung wir vom Leichteren zum Schwereren übergehen wollen.

§. 775.

Das Oktaëder O aus dem Hexaëder zu modelliren.

Für das Oktaëder O ist $m = n = 1$, also

Digitized by Google

$$\Sigma(EL) = \Sigma(EH) = \Sigma(EU) = 1$$

woraus sich folgende Construction ergiebt.

Man ziehe die Diagonalen auf allen sechs Hexaëderflächen, Fig. 821, wähle zwei Gegenflächen desselben (z. B. die obere und untere in der Figur) zu Ansatzflächen, ihre Diagonalen zu Ansatzlinien, und die auf den Nebenflächen gezogenen Diagonalen zu Bahnlinien *). Hierauf führe man von jeder Ansatzlinie zwei Schnitte (wie z. B. von *bb* die zwei Schnitte *bbb'*), lege jedoch diese Schnitte auf der ersten Fläche nur an, indem man sie nicht ganz bis zu den Durchschnittspuncten *c* der Bahnlinien fortsetzt, um eine vorzeitige Zerstückelung des Klotzes zu verhindern, führe sie dagegen auf der zweiten Fläche gleich etwas über die Puncte *c* hinaus, und vollende darauf die zuerst angelegten Schnitte, so resultirt das Oktaëder.

Zusatz. Modellirung in der Maschine. Man spanne das Hexaëder in den tetragonalen Rahmen, gebe der Säge die Neigung von 54° 44′, centrire sie auf der oberen Hexaëderfläche **), stelle hierauf den Index des Modellträgers successiv auf die vier Puncte 1, und lege die vier oberen Schnitte an, wie vorher; kehre darauf das Hexaëder um, führe die vier folgenden Schnitte in der Maschine sogleich durch, und vollende darauf die vier ersteren Schnitte aus freier Hand.

§. 776.

Das Oktaëder aus dem tetragonalen Prisma zu schneiden.

Das Oktaëder kann man als eine tetragonale Py-

---

*) Zur besseren Unterscheidung sind die Ansatzlinien ausgezogen, die Bahnlinien dagegen nur punctirt dargestellt.

**) Die bereits in die richtige Neigung gestellte Säge centriren, heisst, sie so stellen, dass ihre Schneide, oder vielmehr die untere Seitenfläche des Blattes durch den Mittelpunct der oberen Fläche des Modellklotzes geht; dazu dient, wie man leicht sieht, die Schraube *EF*, mittels welcher der Modellträger so lange unter der Säge verschoben werden kann, bis dieselbe centrirt ist.

Digitized by Google

ramide betrachten, deren Mittelkante sich zur ganzen Hauptaxe verhält, wie $1 : \sqrt{2}$. Man schneide also ein tetragonales Prisma, dessen Höhe = der Diagonale seiner Grundfläche, bestimme die Mittelpuncte seiner sämmtlichen Kanten, verbinde auf den Endflächen die Mittelpuncte je zweier Gegenkanten, auf den Seitenflächen die Mittelpuncte je zweier Nebenkanten durch gerade Linien, und wähle die ersteren Linien zu Ansatzlinien, die anderen zu Bahnlinien. Hierauf lege man die Schnitte auf der ersteren Endfläche nur bis etwa durch $\frac{3}{4}$ der Bahnlinien an, führe die Schnitte auf der zweiten Endfläche sogleich durch, und vollende nachher die vier ersten Schnitte.

Zusatz. Modellirung in der Maschine. Man spanne das Prisma in den tetragonalen Rahmen, gebe der Säge die Neigung von 54° 44′, centrire sie auf der oberen Endfläche des Prismas, stelle den Index successiv auf die vier Puncte ∞, und verfahre wie vorher.

§. 777.

Das Oktaëder aus dem hexagonalen Prisma zu schneiden.

Stellt man das Oktaëder nach einer seiner trigonalen Zwischenaxen aufrecht, so erscheint es als die Combination $R.0R$, oder als das Mittelstück eines Rhomboëders, dessen Polkante = 70° 32′ 44″. Denkt man sich durch die Mittelkanten dieser Combination Flächen gelegt, welche auf $0R$ rechtwinklig sind, so erhält man ein durch $0R$ begränztes hexagonales Prisma, dessen Endkante sich zur Seitenkante verhält wie $1 : \sqrt{2}$.

Man schneide also ein hexagonales Prisma, Fig. 823, nehme in einer seiner Seitenkanten $ac = ab$, so ist bc die erforderliche Höhe desselben. Auf seinen Endflächen verbinde man die abwechselnden (und zwar auf der oberen und unteren Endfläche die wi-

Digitized by Google

dersinnig gelegenen) Eckpuncte, auf den Seitenflächen dieselben Eckpuncte durch gerade Linien, wähle die ersteren zu Ansatz-, die anderen zu Bahnlinien, und führe die Schnitte, indem man sie von der einen Endfläche nur vorläufig anlegt, von der andern aber gleich vollendet.

§. 778.

Das Tetraëder $\frac{O}{2}$ zu modelliren.

Man vollende nur die halbe Construction des §. 775, d. h. man ziehe nur die abwechselnden Diagonalen auf den Flächen des Hexaëders, führe auch nur die durch sie bestimmten Schnitte, indem man wiederum die von der ersten Fläche geführten Schnitte vorläufig bis etwa zu den Puncten *c* anlegt, und sie nach Durchführung der beiden andern Schritte nachträglich vollendet.

§. 779.

Das Rhombendodekaëder ∞O aus dem Hexaëder zu modelliren.

Für das Rhombendodekaëder ∞O ist $m = \infty$, und $n = 1$, also

$$\Sigma(EL) = \Sigma(EH) = \tfrac{1}{2}$$
$$\Sigma(EU) = \infty$$

woraus sich folgende Construction ergiebt.

Man suche die Mittelpuncte *a* der Kanten des Hexaëders, Fig. 822, und verbinde auf seinen einzelnen Flächen zwei gegenüberliegende Theilpuncte durch gerade Linien in der Weise, dass die beiden Linien je zweier Gegenflächen parallel, je zweier Nebenflächen rechtwinklig mit einander sind (oder eine den charakteristischen Kanten der Pentagondodekaëder analoge Lage haben), verbinde auch je zwei neben einander liegende Theilpuncte durch gerade Linien,

und wähle die ersteren Linien zu Ansatz-, die letzteren zu Bahnlinien.

Von jeder Ansatzlinie aus führe man nun zwei Schnitte nach den durch die, von ihr auslaufenden Bahnlinien bestimmten Richtungen, lege diese Schnitte auf den ersten fünf Flächen des Hexaëders nur etwa bis auf $\frac{3}{4}$ der Bahnlinien an, führe sie auf der letzten Fläche sogleich durch, und vollende dann die vorher angelegten Schnitte.

Zusatz. Modellirung in der Maschine. Man bemerke sich auf dem Hexaëder mit Bleistifte die ungefähre Lage der Ansatzlinien, um falsche Schnitte zu vermeiden, spanne es dann in den tetragonalen Rahmen, gebe der Säge die Neigung von 45°, stelle den Index für jede Fläche successiv auf zwei gegenüberliegende Puncte ∞, und führe die Schnitte wie vorher.

§. 780.

Das Rhombendodekaëder aus dem tetragonalen Prisma zu modelliren.

Das Rhombendodekaëder ∞O lässt sich auch aus einem tetragonalen Prisma schneiden, dessen Endkanten sich zu den Seitenkanten verhalten wie $1:\sqrt{2}$. Man schneide also zuvörderst ein dergleichen Prisma, dessen Höhe = der Diagonale seiner Endfläche, ziehe auf beiden Endflächen die Diagonalen, verbinde auch die Mittelpuncte der Seitenkanten mit den Eckpuncten durch gerade Linien, und wähle die ersteren Linien zu Ansatz-, die letzteren zu Bahnlinien. Hierauf führe man die Schnitte, und zwar die vier von der ersten Endfläche vorläufig nur bis auf etwa $\frac{3}{4}$ der Bahnlinien, die vier von der zweiten Endfläche aber sogleich durch, worauf man die ersteren Schnitte vollends beendigt.

Zusatz. Modellirung in der Maschine. Man spanne das Prisma in den tetragonalen Rahmen, gebe der Säge die Neigung von 45°, centrire sie auf der

Digitized by Google

oberen Endfläche des Prismas, stelle den Index successiv auf die vier Puncte 1, und führe die Schnitte wie vorher.

§. 781.

Das Rhombendodekaëder aus dem hexagonalen Prisma zu schneiden.

Stellt man das Rhombendodekaëder ∞O nach einer trigonalen Zwischenaxe aufrecht, so erscheint es als die rhomboëdrische Combination $\infty P2.R$; und legt man durch die Pole des Rhomboëders die basischen Flächen $0R$, so bilden diese mit den Flächen von $\infty P2$ ein hexagonales Prisma, dessen Endkante sich zu seinen Seitenkanten verhält $= \sqrt{2} : 3$.

Man schneide also ein hexagonales Prisma, und mache seine Länge $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$ mal der Seite seiner Grundfläche, also $= \frac{1}{2} \times bc$ in Fig. 823.

Auf beiden Endflächen dieses Prismas, Fig. 824, ziehe man nun die Seitendurchmesser *aa*, nehme in den abwechselnden Seitenkanten, oben und unten widersinnig, $\frac{1}{6}$ ihrer selbst, wodurch sich die Puncte *b* bestimmen, ziehe die Linien *ab*, und wähle die Linien *aa* zu Ansatz-, die *ab* zu Bahnlinien. Hierauf lege man die drei Schnitte auf der einen Endfläche bis zu den Puncten *b* hin an, führe die drei Schnitte auf der anderen Endfläche gleich aus, und vollende dann die zuerst angelegten Schnitte.

Zusatz. Modellirung in der Maschine. Man spanne das Prisma in den hexagonalen Rahmen, gebe der Säge die Neigung von 35° 16′, centrire sie, stelle den Index successiv auf die Puncte 30°, 150° und 270° der Peripherie, und führe die Schnitte wie vorher.

§. 782.

Das Tetrakishexaëder ∞On zu modelliren.

Für das Tetrakishexaëder ∞On ist $m = \infty$, und daher

Digitized by Google

$$\Sigma(EL) = \tfrac{1}{2}$$

$$\Sigma(EH) = \frac{1}{2n}$$

$$\Sigma(EU) = \infty$$

woraus sich folgende Construction ergiebt.

Man suche in sämmtlichen Kanten des Hexaëders, Fig. 825, die Mittelpuncte a und die Endpuncte c der von den Eckpuncten aus genommenen Segmente $\frac{1}{2n}$, verbinde in den einzelen Flächen jeden Punct a mit dem diametral gegenüber liegenden Puncte a durch eine ausgezogene Linie, und mit den zunächst gelegenen beiden Puncten c durch punctirte Linien, wähle die aa zu Ansatz-, die ac zu Bahnlinien, führe demgemäss von jeder Hexaëderfläche vier Schnitte, lege jedoch selbige auf den fünf ersten Flächen vorläufig nur an bis etwa durch $\tfrac{2}{3}$ der Länge ac der einzelen Bahnlinien, führe sie auf der sechsten Fläche sogleich durch, und vollende endlich die vorher angelegten Schnitte.

Zusatz. Modellirung in der Maschine. Man spanne das Hexaëder in den tetragonalen Rahmen, gebe der Säge die Neigung ω, bestimmt durch $tang\,\omega = \frac{1}{n}$ (also z. B. die Neigung $33°\tfrac{3}{4}$, $26°\tfrac{1}{2}$ und $18°\tfrac{1}{2}$ für die drei Varietäten $\infty O\tfrac{3}{2}$, $\infty O2$ und $\infty O3$), centrire die Säge, stelle den Index successiv auf die vier Puncte ∞, und führe bei jeder Stellung einen Schnitt. Wiederholt man dasselbe Verfahren für die übrigen fünf Flächen des Hexaëders, jedoch mit der Vorsicht, die Schnitte auf den ersten fünf Flächen nur anzulegen, so erhält man alle nöthigen Schnitte zur Darstellung der verlangten Gestalt.

Digitized by Google

§. 783.

Das Pentagondodekaëder $\frac{\infty On}{2}$ zu modelliren.

Man führt nur die Hälfte der im vorigen §. angegebenen Construction aus, sucht also wiederum die Puncte a und c, zieht aber auf jeder Fläche des Hexaëders nur eine der Linien aa, Fig. 826, und nur vier der Linien ac, indem man für die Lage der ersteren Linien die Regel beobachtet, dass die je zweier Gegenflächen parallel, die je zweier Nebenflächen rechtwinklig mit einander seyn müssen. Hierauf wählt man wie vorher die Linien aa zu Ansatz-, die Linien ac zu Bahnlinien, legt auf den ersten fünf Flächen die Schnitte nur an, führt sie auf der letzten gleich durch, und vollendet dann die blos angelegten Schnitte.

Das Verfahren in der Maschine ist für sich hinlänglich einleuchtend.

§. 784.

Das Ikositetraëder mOm zu modelliren.

Für das Ikositetraëder mOm wird $n = m$, und folglich

$$\Sigma(EL) = \Sigma(EU) = 1$$
$$\Sigma(EH) = \frac{1}{m}$$

woraus sich folgende Regel ergiebt.

Man nehme in allen Kanten des Hexaëders von ihren Eckpuncten aus beiderseits die Segmente $\frac{1}{m}$, so bestimmen sich allgemein in jeder Kante zwei Puncte*), welche ich, obgleich sie gleichwerthig sind,

*) Für 2O2 fallen diese Puncte zusammen in den Mittelpunct der Kante.

doch nach ihrer Vertheilung an den abwechselnden Ecken des Hexaëders mit den zwei Buchstaben *a* und *c* bezeichnen will, Fig. 827. Hierauf ziehe man in jeder Hexaëderfläche die Diagonalen *EE*, verbinde auch jeden Eckpunct *E* mit den beiden zunächst gelegenen Puncten *a* oder *c*, und wähle die ersteren Linien zu Ansatz-, die letzteren Linien zu Bahnlinien. Auf jeder Hexaëderfläche führt man nun vier Schnitte, legt solche jedoch auf den ersten fünf Flächen nur bis in die Nähe der Kreuzungspuncte der resp. Bahnlinien an, führt sie auf der sechsten Fläche sogleich durch, und vollendet dann die vorher nur angelegten Schnitte.

Zusatz. Modellirung in der Maschine. Man spanne das Hexaëder in den tetragonalen Rahmen, gebe der Säge die Neigung ω, bestimmt durch

$tang\,\omega = \frac{\sqrt{2}}{m}$ (also z. B. 35° 16′ und 25° 14′ für 2O2

und 3O3), centrire sie, stelle den Index successiv auf die vier Puncte 1, und führe die Schnitte wie vorher.

§. 785.

Das Trigondodekaëder $\frac{mOm}{2}$ zu modelliren.

Man führt die Construction des vorhergehenden §. nur zur Hälfte aus, bestimmt also nur die an den vier abwechselnden Ecken des Hexaëders gelegenen

Kantensegmente $\frac{1}{m}$, zieht nur die von den übrigen vier

Eckpuncten auslaufenden Diagonalen und Bahnlinien, und führt nur diejenigen zwölf Schnitte, welche durch die so construirten Ansatz- und Bahnlinien bestimmt werden.

Digitized by Google

§. 786.

Das Triakisoktaëder mO zu modelliren.

Für das Triakisoktaëder mO ist $n=1$, und folglich

$$\Sigma(EL)=\Sigma(EH)=\frac{m+1}{2m}$$

$$\Sigma(EU)=\frac{m+1}{2}$$

woraus sich folgende Construction ergiebt.

Man nehme in allen Kanten des Hexaëders von ihren Ecken aus beiderseits das Segment $\frac{m-1}{2m}$, so bestimmen sich in jeder Kante zwei Puncte, welche ich, obgleich sie gleichwerthig sind, doch nach ihrer Lage an den abwechselnden Ecken des Hexaëders mit den zweierlei Buchstaben *a* und *c* bezeichnen will; Fig. 828. Hierauf verbinde man auf jeder einzelen Fläche des Hexaëders zwei Paar diametral gegenüber liegende Puncte durch die ausgezogenen Linien *aa* und *cc*, in der Weise, dass diese schiefen Linienkreuze nur auf je zwei Gegenflächen gleichsinnig, auf je zwei Nebenflächen aber widersinnig liegen (analog den charakteristischen Kanten der Pentagondodekaëder); auch verbinde man noch auf jeder einzelen Fläche des Hexaëders je zwei diagonal gegenüberliegende Puncte durch die punctirten Linien *aa* und *cc*.

Man wähle nun die ausgezogenen Linien zu Ansatz-, die punctirten Linien zu Bahnlinien, und lege auf jeder Hexaëderfläche vier Schnitte an, wie solche durch die von den Enden der Ansatzlinien auslaufenden Bahnlinien bestimmt werden; auf der letzten Fläche führt man jedoch diese Schnitte sogleich durch, und vollendet nachher die früher nur angelegten Schnitte.

Zusatz. Modellirung in der Maschine. Man spanne das Hexaëder in den tetragonalen Rahmen,

Digitized by Google

gebe der Säge die Neigung ω, bestimmt durch $tang\,\omega = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}$ (also z. B. die Neigung 48° 11′ und 46° 30′ für 2O und 3O), centrire die Säge, stelle den Index successiv auf vier paarweis einander gegenüberliegende Puncte m, und lege die Schnitte auf der ersten Fläche an; wiederhole dieselbe Operation für die übrigen fünf Flächen, führe jedoch auf der letzten Fläche die Schnitte sogleich durch, und vollende dann die blos angelegten aus freier Hand.

§. 787.

Das Deltoiddodekaëder $\frac{mO}{2}$ zu modelliren.

Man bestimme, nach der Angabe des vorhergehenden §., entweder nur die 12 Puncte a, oder die 12 Puncte c, vollende überhaupt die Construction in Fig. 828 nur zur Hälfte, und führe auch nur die entweder durch die Linien aa, oder die durch die Linien cc bestimmten 12 Schnitte aus, so resultirt das verlangte Deltoid-Dodekaëder $\frac{mO}{2}$.

§. 788.

Das Hexakisoktaëder mOn zu modelliren.

Wir fanden oben in §. 774 für das Hexakisoktaëder mOn

$$\Sigma(EL) = \frac{m+n}{2m}$$

$$\Sigma(EH) = \frac{m+n}{2mn}$$

$$\Sigma(EU) = \frac{m+n}{2n}$$

woraus sich folgende Construction ergiebt.

Man nehme in allen Kanten des Hexaëders beiderseits von ihren Eckpuncten aus die Segmente

Digitized by Google

$\frac{m-n}{2m} = Ea$, Fig. 829, und $\frac{m+n}{2mn} = Ec$, so bestimmen sich in jeder Kante zwei Puncte *a* und zwei Puncte *c*. In den einzelen Flächen verbinde man nun jeden Punct *a* mit dem diametral gegenüberliegenden Puncte *a* durch eine ausgezogene Linie *aa*, und mit dem zunächst jenseits seines Nebenpunctes *a* gelegenen Puncte *c* durch eine punctirte Linie *ac*, so ergeben sich in jeder Fläche überhaupt vier Linien *aa* und acht Linien *ac*.*) Man wähle nun die Linien *aa* zu Ansatz-, und die von ihren Endpuncten auslaufenden *ac* zu Bahnlinien, führe auf der ersten Fläche acht, durch diese Linien bestimmte Schnitte, lege sie jedoch vorläufig nur bis zu den Kreuzungspuncten der Bahnlinien an, wiederhole dasselbe Verfahren für die übrigen Flächen des Hexaëders, vollende dann die sämmtlichen Schnitte, so resultirt das verlangte Hexakisoktaëder *m*O*n*.

Zusatz. Modellirung in der Maschine. Man spanne das Hexaëder in den tetragonalen Rahmen, gebe der Säge die Neigung ω, bestimmt durch

$tang\,\omega = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}$ (z. B. 36° 42′ für 3O$\frac{3}{2}$, 28° 2′ für 4O2, und 32° 19′ für 5O$\frac{5}{3}$), centrire die Säge auf der oberen Fläche des Hexaëders, stelle den Index successiv auf die acht Puncte $\frac{m}{n}$, und führe bei jeder Stellung einen Schnitt; wiederholt man dasselbe Verfahren für die anderen fünf Hexaëderflächen, so erhält man sämmtliche zur Darstellung von *m*O*n* erforderliche Schnitte.

*) Die Figur 829 bezieht sich auf die Varietät 4O2, für welche die Linien *ac* den Linien *aa* parallel werden; in den Varietäten 3O$\frac{3}{2}$ und 5O$\frac{5}{3}$ fallen je zwei Puncte *c* zusammen in den Mittelpunct der Hexaëderkante.

§. 789.

Das Hexakistetraëder $\frac{mOn}{2}$ zu modelliren.

Man bestimme die Puncte *a* nur von vier abwechselnden Ecken, und die Puncte *c* von den übrigen vier Ecken des Hexaëders aus, vollende überhaupt die Construction des vorhergehenden §. nur zur Hälfte, so wie in Fig. 830, führe die 24 Schnitte, welche durch diese Construction bestimmt werden, indem man deren auf jeder Fläche des Hexaeders vier anlegt, so resultirt nach Vollendung der Operation das Hexakistetraëder $\frac{mOn}{2}$.

§. 790.

Das Dyakisdodekaëder $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ zu modelliren.

Man bestimme zwar die sämmtlichen Puncte *a* und *c*, wie in §. 788, ziehe aber nur die Hälfte der durch sie bestimmten Ansatz- und Bahnlinien, Fig. 831, indem man auf jeder Fläche nur zwei Paar der diametral gegenüberliegenden Puncte *a* durch die ausgezogenen Linien *aa* mit einander, und die übrigen vier Puncte *a* durch die punctirten Linien *ac* mit den zwischen den ersteren Puncten gelegenen vier Puncten *c* verbindet, dabei zugleich darauf achtet, dass die Linienpaare *aa* nur auf je zwei Gegenflächen eine gleichsinnige, auf je zwei Nebenflächen hingegen eine widersinnige (den charakteristischen Kanten der Pentagondodekaëder analoge) Lage haben dürfen, so ist die nöthige Construction vollendet. Führt man hierauf die 24, durch diese Construction vorgezeichneten Schnitte, indem man deren auf jeder Hexaëderfläche vier anlegt, so resultirt nach Vollendung der Operation das Dyakisdodekaëder $\left[\frac{mOn}{2}\right]$.

Digitized by Google

III) Modellirung der tetragonalen Gestalten.

§. 791.

Elemente zur Bestimmung der Lage der Schnitte.

Bei der Modellirung der tetragonalen Gestalten geht man von einem tetragonalen Prisma aus, dessen End- und Seitenkanten in einem solchen Verhältnisse stehen müssen, dass es genau die, um die zu modellirende Gestalt umschriebene Combination $\infty P\infty . 0P$ darstellt. Sollen die verschiedenen Gestalten einer und derselben tetragonalen Krystallreihe unter Voraussetzung gleicher Nebenaxen modellirt werden, so hat man die sämmtlichen Modellklötze aus einem und demselben tetragonalen Stabe zu schneiden. Setzen wir die Breite der Seitenflächen dieses Stabes $= 1$, so wird für irgend eine Gestalt mPn (sofern solche kein Prisma ist) die erforderliche Länge des Modellklotzes $= ma$; oder die Seitenkanten und Endkanten jedes Modellklotzes müssen in dem Verhältnisse $ma : 1$ stehen.

Sucht man die Segmente der Kanten EL, EH und EU, Fig. 820, welche sich durch die oben rechts an dem Puncte V liegende Fläche der ditetragonalen Pyramide mPn bestimmen, so findet man, wenn $EL = EH = 1$, und $EU = ma$,

$$\Sigma(EL) = \frac{n+1}{2} \times EL$$

$$\Sigma(EH) = \frac{n+1}{2n} \times EH$$

$$\Sigma(EU) = \frac{n+1}{2n} \times EU$$

Für das Prisma ∞Pn werden diese Segmente

$$\Sigma(EL) = \tfrac{1}{2} \times EL$$

$$\Sigma(EH) = \frac{1}{2n} \times EH$$

$$\Sigma(EU) = \infty$$

Digitized by Google

§. 792.

Die tetragonale Pyramide mP zu modelliren.

Für mP wird $n = 1$, also

$$\Sigma(EL) = \Sigma(EH) = 1$$
$$\Sigma(EU) = \tfrac{1}{2}EU$$

Man schneide also einen Modellklotz, in welchem

Seitenkante : Endkante $= ma : 1$

ziehe die Diagonalen auf den Endflächen sowohl als auf den Seitenflächen (ähnl. Fig. 821), wähle die ersteren zu Ansatz-, die anderen zu Bahnlinien, führe von jeder Endfläche vier Schnitte, welche von der ersten Endfläche aus nur angelegt, und also nicht ganz bis zu den Kreuzungspuncten der Bahnlinien durchgeführt werden dürfen, während sie von der zweiten Endfläche aus gleich etwas über diese Kreuzungspuncte fortzusetzen sind, vollende hierauf die angelegten Schnitte, so resultirt die Pyramide mP.

Zusatz. Modellirung in der Maschine. Man spanne das Prisma in den tetragonalen Rahmen, gebe der Säge die Neigung ω, bestimmt durch $tang\,\omega = ma\sqrt{2}$, centrire sie auf der oberen Endfläche des Modellklotzes, stelle den Index successiv auf die vier Puncte 1, und führe die Schnitte wie vorher.

§. 793.

Das tetragonale Sphenoid $\frac{mP}{2}$ zu modelliren.

Man führe die Construction des vorhergehenden §. nur zur Hälfte aus, ziehe also die Diagonalen entweder nur für die Puncte a, oder nur für die Puncte b, Fig. 821, führe auch nur die so bestimmten vier Schnitte aus, indem man wiederum die Schnitte von der einen Endfläche aus nur anlegt, von der andern sogleich durchführt, so resultirt das verlangte Sphenoid.

Digitized by Google

§. 794.

Die tetragonale Pyramide $mP\infty$ zu modelliren.

Für $mP\infty$ ist $n = \infty$, daher

$$\Sigma(EL) = \infty$$
$$\Sigma(EH) = \tfrac{1}{2} \times EH$$
$$\Sigma(EU) = \tfrac{1}{2} \times EU$$

Man schneide also einen Modellklotz, in welchem

Seitenkante : Endkante $= ma : 1$

bestimme die Mittelpuncte seiner sämmtlichen Kanten, Fig. 832, verbinde in den Endflächen die Mittelpuncte je zweier Gegenseiten durch die Linien *aa*, in den Seitenflächen die Mittelpuncte je zweier Nebenseiten durch die Linien *ac*, und wähle die ersteren zu Ansatz-, die anderen zu Bahnlinien. Hierauf lege man die vier Schnitte von der einen Endfläche bis etwa $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ der Bahnlinien an, führe die vier Schnitte von der zweiten Endfläche aber sogleich durch, und vollende endlich die vier ersteren Schnitte, so resultirt die verlangte Pyramide.

Zusatz. Modellirung in der Maschine. Man spanne den Modellklotz in den tetragonalen Rahmen, gebe der Säge die Neigung ω, bestimmt durch $tang\,\omega = ma$, centrire sie auf der oberen Fläche des Modellklotzes, stelle den Index successiv auf die vier Puncte ∞, und führe die Schnitte wie vorher.

§. 795.

Die ditetragonale Pyramide mPn zu modelliren.

Aus den in §. 791 für die ditetragonale Pyramide mPn gefundenen Elementen ergiebt sich folgende Construction. Man schneide einen Modellklotz, in welchem

Seitenkante : Endkante $= ma : 1$

nehme in den Endkanten sowohl als in den Seitenkanten beiderseits von den Eckpuncten aus die Seg-

Digitized by Google

mente $\frac{n-1}{2n}$, so bestimmen sich in jeder Endkante zwei Puncte *a*, in jeder Seitenkante zwei Puncte *c*, Fig. 833. Hierauf verbinde man auf den Endflächen je zwei diametral gegenüberliegende Puncte *a* durch die Linien *aa*, auf den Seitenflächen je zwei diagonal gegenüberliegende Puncte *a* und *c* durch die Linien *ac*, wähle die ersteren zu Ansatz-, die anderen zu Bahnlinien, und führe von jeder Endfläche aus acht Schnitte, so resultirt nach Vollendung der Operation die verlangte ditetragonale Pyramide *m*P*n*.

Zusatz. Modellirung in der Maschine. Man spanne das Prisma in den tetragonalen Rahmen, gebe der Säge die Neigung ω, bestimmt durch

$$tang\,\omega = \frac{ma\sqrt{n^2+1}}{n}$$

da $\omega = \frac{1}{2}Z$ in §. 228, centrire sie auf der oberen Endfläche des Prismas, stelle den Index successiv auf die acht Puncte *n*, und führe bei jeder Stellung einen Schnitt.

§. 796.

Das tetragonale Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ zu modelliren.

Man vollende nur die Hälfte der Construction des vorhergehenden §., d. h. man bestimme nur die an den abwechselnden Ecken des Prismas gelegenen Puncte *a* und *c*, ziehe die dadurch bestimmten Ansatz- und Bahnlinien, wie in Fig. 834, und führe von jeder Endfläche die durch diese Linien bestimmten vier Schnitte, so resultirt nach beendigter Operation das tetragonale Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$, dessen Mitteleckpuncte die Puncte *c* werden.

Digitized by Google

§. 797.

Das tetragonale Trapezoëder $\frac{mPn}{2}$ zu modelliren.

Man bestimme in den Endkanten nur die abwechselnden, und zwar oben und unten die widersinnig gelegenen Puncte *a*, Fig. 835, in den Seitenkanten dagegen die sämmtlichen Puncte *c*; ziehe auf jeder Endfläche die beiden Ansatzlinien *aa*, und auf den Seitenflächen die zugehörigen Bahnlinien *ac*, führe von jeder Endfläche die vier so bestimmten Schnitte, so erhält man nach vollendeter Operation das eine der tetragonalen Trapezoëder. Um das zweite, complementäre Trapezoëder darzustellen, muss man auf einem andern Modellklotze der Construction diejenigen acht Puncte *a* zu Grunde legen, welche in Fig. 835 übergangen worden, ohne sonst etwas in der Ausführung zu ändern.

§. 798.

Das ditetragonale Prisma ∞Pn zu modelliren.

Je nachdem die Combination $\infty Pn.0P$ säulen- oder tafelartig erscheinen soll, nimmt man ein langes oder kurzes Stück des tetragonalen Modellstabes, Fig. 836, bestimmt in seinen oberen Endkanten die Mittelpuncte *a* und die Endpuncte *c* ihrer von den Ecken aus genommenen Segmente $\frac{1}{2n}$, zieht die Linien *ac* und auf den Seitenflächen parallel mit den Seitenkanten die Linien *aa*, wählt die ersteren zu Ansatz-, die anderen zu Bahnlinien, und führt die so bestimmten acht Schnitte.

Zusatz. Modellirung in der Maschine. Man spanne den Modellklotz in den tetragonalen Rahmen, gebe der Säge die verticale Lage, stelle den Index auf einen der Puncte *n*, und centrire die Säge in Be-

Digitized by Google

zug auf eine der Endkanten des Modellklotzes; hierauf führe man den ersten Schnitt, stelle nachher den Index successiv auf die übrigen sieben Puncte *n*, und führe bei jeder Stellung einen Schnitt wie vorher.

IV) Modellirung der hexagonalen Gestalten.

§. 799.

Figur und Dimensionen des Modellklotzes.

Für die holoëdrischen und hemiëdrischen Gestalten des Hexagonalsystemes geht man von einem hexagonalen Prisma aus, dessen End- und Seitenkanten in einem solchen Verhältnisse stehen, wie es dem um die verlangte Gestalt umschriebenen Prisma der Nebenreihe zukommt, indem der Modellklotz einer jeden Gestalt die um selbige umschriebene Combination ∞P2.0P ist. Sollen daher die verschiedenen Gestalten einer und derselben holoëdrischen oder hemiëdrischen Krystallreihe unter Voraussetzung *gleicher* Nebenaxen modellirt werden, so hat man die sämmtlichen Modellklötze aus einem und demselben hexagonalen Stabe zu schneiden, an welchem wir die Breite der Seitenflächen $=1$ setzen wollen. Dagegen sind die tetartoëdrischen Gestalten, sofern solche mit derselben Grösse der Nebenaxen wie ihre resp. Muttergestalten dargestellt werden sollen, aus einem trigonalen Prisma zu schneiden, an welchem die Breite der Seitenflächen dreimal so gross, also $=3$ ist.

Für jede Gestalt mPn, sie mag nun holoëdrisch, hemiëdrisch oder tetartoëdrisch darzustellen seyn, ist die erforderliche Länge des Modellklotzes $= ma\sqrt{3}$, wenn die Breite der Seitenfläche des hexagonalen Modellklotzes $=1$, des trigonalen Modellklotzes $=3$ gesetzt wird. Die Seitenkanten des Modellklotzes müssen also zu den Endkanten desselben für holoëdrische und hemiëdrische Gestalten in dem Verhält-

Digitized by Google

nisse $ma\sqrt{3}:1$, für tetartoëdrische Gestalten in dem Verhältnisse $ma\sqrt{3}:3$ stehen.

§. 800.

Elemente für die verschiedenen Gestalten.

Es sey Fig. 837 der Modellklotz zu einer dihexagonalen Pyramide mPn, also

$$EG = EF = FH = GK = 1$$

$$\text{und} \quad EU = FU = GU = ma\sqrt{3}$$

ferner MX, MY und MZ das System der drei Axen, so ist

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{n} + z = 1$$

die Gleichung der am Puncte Z oben rechts liegenden Fläche der Pyramide, welche die Kanten des Modellklotzes in den Puncten L und I schneidet; und es kommt Alles darauf an, die Grösse der Segmente KL, GI, EI und FI zu bestimmen.

Nun sind die Gleichungen

der Linie KG, $x = ma$, $y + z = 1$

\- \- \- EU, $y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{2}{3}$

\- \- \- FU, $y = \frac{4}{3}$, $z = -\frac{2}{3}$

\- \- \- GU, $y = -\frac{2}{3}$, $z = \frac{4}{3}$

Combinirt man diese Gleichungen mit jener der Pyramidenfläche, so erhält man die Coordinaten der resp. Durchschnittspuncte L und I. Da nun die Coordinaten der Puncte K, G, E und F gleichfalls bekannt sind, so ergeben sich folgende Werthe für die Segmente der End- und Seitenkanten:

$$KL = \frac{2-n}{n+1} \times KG = FL$$

$$GI = \frac{2n-1}{3n} \times GU$$

$$FI = \frac{2-n}{3n} \times FU$$

$$EI = \frac{n+1}{3n} \times EU$$

Diese Elemente, von welchen man jedoch bei der Ausführung nur KL und GI zu berücksichtigen braucht, bilden die Grundlage für die Modellirung der holoëdrischen und hemiëdrischen Gestalten.

Für die tetartoëdrischen Gestalten dagegen, deren Modellirung ein trigonales Prisma von dem Verhältnisse

$$\text{Endkante} : \text{Seitenkante} = 3 : ma\sqrt{3}$$

zu Grunde liegt, Fig. 844, wird die Lage der Fläche, welche die Axen der x, y und z in den Parametern ma, n und 1 schneidet, durch die Durchschnittspuncte L und I bestimmt, daher die Segmente KL, FL, KI und FI berechnet werden müssen; man findet

$$KL = \frac{n-1}{2n-1} \times KG$$

$$FL = \frac{1}{n+1} \times FG$$

$$KI = \frac{n-1}{n} \times KU$$

$$FI = \frac{1}{n} \times FU$$

§. 801.

Die hexagonale Pyramide *m*P zu modelliren.

Für mP ist $n = 1$, also

$$KL = \tfrac{1}{2} \times KG$$

$$GI = \tfrac{1}{3} \times GU = FI$$

woraus sich folgende Construction ergiebt.

Man schneide ein hexagonales Prisma von den Dimensionen

$$\text{Endkante} : \text{Seitenkante} = 1 : ma\sqrt{3}$$

theile die Endkanten in zwei, die Seitenkanten in drei gleiche Theile, Fig. 838, so bestimmen sich in jenen die Puncte a, in diesen die Puncte c; hierauf verbinde man jeden Punct a auf den Endflächen mit dem diametral gegenüberliegenden Puncte a durch die Linie aa, auf den Seitenflächen mit den beiden zunächst

Digitized by Google

gelegenen Puncten *c* durch die Linien *ac*, wähle jene zu Ansatz-, diese zu Bahnlinien, lege die sechs Schnitte von der ersten Endfläche bis etwa über die Puncte *c* an, führe die sechs Schnitte von der zweiten Endfläche sogleich durch, und vollende dann die ersteren Schnitte, so resultirt die verlangte hexagonale Pyramide.

Zusatz. Hat man einen hexagonalen Rahmen auf dem Modellträger der Maschine, nebst der zugehörigen Theilung zur Stellung des Index, so lassen sich diese und alle folgende Gestalten ohne Construction sehr leicht in der Maschine modelliren.

§. 802.

Das Rhomboëder $\frac{mP}{2}$ oder *mR* zu modelliren.

Man schneide wiederum ein hexagonales Prisma von dem Verhältnisse

Endkante : Seitenkante $= 1 : ma\sqrt{3}$

bestimme die Mittelpuncte *a* der Endkanten, Fig. 839, und nehme in den Seitenkanten abwechselnd oben und unten $\frac{1}{3}$ ihrer selbst, so ergeben sich die sechs Puncte *c*. Hierauf verbinde man jeden Punct *a* mit dem in derselben Endfläche diametral gegenüberliegenden Puncte *a* durch die Linie *aa*, mit dem zunächst gelegenen Puncte *c* durch die Linie *ac*, wähle die ersteren zu Ansatz-, die anderen zu Bahnlinien, und führe die so bestimmten sechs Schnitte, so resultirt das verlangte Rhomboëder $\frac{mP}{2}$ oder *mR*.

§. 803.

Die hexagonale Pyramide *m*P2 zu modelliren.

Man schneide ein hexagonales Prisma von den Dimensionen

Endkante : Seitenkante $= 1 : ma\sqrt{3}$

ziehe auf beiden Endflächen die Diagonalen *aa*, Fig.

840, und verbinde auf den Seitenflächen die Mittelpuncte c der Seitenkanten mit den Eckpuncten durch die Linien ac, wähle die ersteren zu Ansatz-, die anderen zu Bahnlinien, führe die so bestimmten Schnitte durch, mit Berücksichtigung der gewöhnlichen Regel, dass die sechs ersten Schnitte anfangs nur angelegt werden dürfen, so resultirt nach Vollendung der Operation die hexagonale Pyramide mP2.

§. 804.

Die dihexagonale Pyramide mPn zu modelliren.

Man schneide ein hexagonales Prisma von den Dimensionen

$$\text{Endkante : Seitenkante} = 1 : ma\sqrt{3}$$

nehme von allen Eckpuncten aus in den Endkanten die Segmente $\frac{2-n}{n+1}$, in den Seitenkanten die Segmente $\frac{2n-1}{3n}$, so bestimmen sich in jeder der ersteren zwei Puncte a, in jeder der anderen zwei Puncte c, Fig. 841. Hierauf verbinde man jeden Punct a auf den Endflächen mit dem diametral gegenüberliegenden Puncte a durch die Linie aa, auf den Seitenflächen mit dem, jenseits seinem Nebenpuncte a zunächst gelegenen Puncte c durch die Linie ac, wähle die ersteren Linien zu Ansatz-, die anderen zu Bahnlinien, und führe von jeder Endfläche aus zwölf Schnitte mit Berücksichtigung der gewöhnlichen Vorsichtsregel, so resultirt nach vollendeter Operation die verlangte dihexagonale Pyramide mPn *).

*) Man könnte auch noch in den Seitenkanten die Segmente $\frac{2-n}{3n}$ bestimmen, um für jeden Schnitt zwei Bahnlinien zu erhalten, doch scheint dies nicht nothwendig, weil zwei Linien die Richtung der Säge hinreichend bestimmen.

Digitized by Google

§. 805.

Das hexagonale Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ oder mR^n zu modelliren.

Man schneide ein hexagonales Prisma von den Dimensionen

$$\text{Endkante : Seitenkante} = 1 : ma\sqrt{3}$$

nehme in allen Endkanten beiderseits von ihren Eckpuncten aus die Segmente $\frac{2-n}{n+1}$, und in den Seitenkanten abwechselnd von oben und unten die Segmente $\frac{2n-1}{3n}$, so bestimmen sich in jeder Endkante zwei Puncte *a*, und in jeder Seitenkante ein Punct *c*, Fig. 842. Auf den Endflächen verbinde man nun je zwei einander gegenüberliegende Puncte *a* durch die Linien *aa*, auf den Seitenflächen jeden Punct *a* mit dem, jenseits seines Nebenpunctes *a* gelegenen Puncte *c* durch die Linien *ac*, wähle die ersteren zu Ansatz-, die anderen zu Bahnlinien, und führe von jeder Endfläche die so bestimmten sechs Schnitte, so resultirt das verlangte Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$.

Ist das Skalenoëder durch sein secundäres Zeichen gegeben, so kann man entweder dasselbe in das äquivalente primitive Zeichen übersetzen (§. 304), um die Segmente der End- und Seitenkanten des Modellklotzes zu finden, oder sich auch der, dem secundären Zeichen mR^n unmittelbar entsprechenden Werthe

$\frac{2}{3n+1}$ für das Segment der Endkante

$\frac{3n-1}{6n}$ für das Segment der Seitenkante

bedienen.

Digitized by Google

§. 806.

Das hexagonale Trapezoëder $\frac{mPn}{2}$ zu modelliren.

Man schneide ein hexagonales Prisma von den Dimensionen

$$\text{Endkante : Seitenkante} = 1 : ma\sqrt{3}$$

nehme von seinen Eckpuncten aus in den Endkanten entweder nach rechts oder nach links (und zwar oben und unten nach entgegengesetzter Richtung) die Segmente $\frac{2-n}{n+1}$, in den Seitenkanten auf- und abwärts die Segmente $\frac{2n-1}{3n}$, so bestimmen sich in jeder Endkante ein Punct a, in jeder Seitenkante zwei Puncte c, Fig. 843. Man verbinde nun jeden Punct a auf den Endflächen mit dem diametral gegenüberliegenden Puncte a durch die aa, auf den Seitenflächen mit dem entfernteren der beiden Puncte c aus derselben Gestalthälfte durch die ac, wähle die ersteren Linien zu Ansatz-, die anderen zu Bahnlinien, und führe von jeder Endfläche aus sechs Schnitte, so resultirt das verlangte Trapezoëder $\frac{mPn}{2}$.

Da gewöhnlich sowohl das rechte als auch das linke Trapezoëder verlangt wird, so hat man zwei hexagonale Prismen von gleichen Dimensionen zu schneiden, in dem einen derselben aber die Puncte a nach der entgegengesetzten Richtung zu bestimmen wie in dem andern, wodurch die ganze Construction in beiden Modellklötzen nach zwei entgegengesetzten Richtungen bestimmt wird.

§. 807.

Das dihexagonale Prisma ∞Pn zu modelliren.

Man schneide ein hexagonales Prisma von der verlangten Höhe, und bestimme in seinen oberen End-

Digitized by Google

kanten die Mittelpuncte a sowohl als auch die Endpuncte c der Segmente $\frac{2-n}{2(2n-1)}$ (ähnlich Fig. 836), verbinde jeden der Puncte a mit den beiden zunächst gelegenen Puncten c durch die Linien ac, ziehe auch auf den Seitenflächen durch jeden Punct a eine Parallele der Seitenkanten, wähle die ersteren Linien zu Ansatz-, die anderen zu Bahnlinien und führe die so bestimmten zwölf Schnitte.

§. 808.

Die trigonale Pyramide $\frac{mP2}{4}$ zu modelliren.

Man schneide ein trigonales Prisma von den Dimensionen

$$\text{Endkante} : \text{Seitenkante} = 3 : ma\sqrt{3}$$

theile die Endkanten in drei, die Seitenkanten in zwei gleiche Theile, so bestimmen sich in ersteren die Puncte a, in letzteren die Puncte c, Fig. 845. Hierauf verbinde man jeden Punct a auf der Endfläche mit dem diametral gegenüberliegenden Puncte a durch die aa, auf der Seitenfläche mit dem zunächst gelegenen Puncte c durch die ac, wähle die ersteren Linien zu Ansatz-, die anderen zu Bahnlinien, und führe die so bestimmten sechs Schnitte.

§. 809.

Das trigonale Trapezoëder $\frac{mPn}{4}$ zu modelliren.

Man schneide ein trigonales Prisma von den Dimensionen

$$\text{Endkante} : \text{Seitenkante} = 3 : ma\sqrt{3}$$

bestimme von seinen Ecken aus in den Endkanten die Segmente

$$Ee = \frac{1}{n+1}$$

$$Ea = \frac{n-1}{2n-1}$$

und zwar von jedem Ecke aus nur je eines dieser Segmente, oben und unten widersinnig, so dass einem oberen Segmente *Ea* ein unteres Segment *Ee* entspricht, Fig. 846; ferner bestimme man von den Ecken aus in den Seitenkanten die Segmente

$$Ec = \frac{n-1}{n}$$

verbinde hierauf jeden Punct *a* in den Endflächen mit dem diametral gegenüberliegenden Puncte *e* durch die *ae*, in den Seitenflächen mit dem zunächst liegenden Puncte *c* durch die *ac*, auch jeden Punct *e* in den Seitenflächen mit dem entfernteren Puncte *c* der nächsten Seitenkante durch die *ec*, wähle die *ae* zu Ansatz-, die *ac* und *ec* zu Bahnlinien, und führe die so bestimmten sechs Schnitte, so resultirt das verlangte Trapezoëder.

Will man zu einem dieser Trapezoëder das complementare, wie rechts oder links verschiedene modelliren, so hat man nur in einem zweiten Modellklotze die Segmente *Ee* und *Ea* nach entgegengesetzten Richtungen zu nehmen.

V. Modellirung einer rhombischen und monoklinoëdrischen Gestalt.

§. 810.

Eine rhombische Pyramide zu modelliren.

Soll irgend eine rhombische Pyramide von den Dimensionen $a : b : c$ modellirt werden, so schneidet man zuvörderst ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen dreierlei Kanten in dem Verhältnisse $a : b : c$ stehen, und welches daher die, um die verlangte Pyramide umschriebene Combination $0P.\infty\breve{P}\infty.\infty\bar{P}\infty$ ist, Fig. 847. Hierauf zieht man die Diagonalen aller Flächen, wählt die auf den beiden Flächen 0P gezoge-

nen Diagonalen zu Ansatz-, die übrigen Diagonalen zu Bahnlinien, und führt die so bestimmten acht Schnitte aus.

Man kann jedoch auch von einem der, zu der verlangten Pyramide gehörigen Prismen ausgehen, indem man z. B. die Combination ∞P.0P in einer solchen Länge schneidet, wie es die Hauptaxe der Pyramide fordert, darauf die Mittelpuncte aller Kanten bestimmt und die Modellirung auf ähnliche Weise vollführt, wie jene der tetragonalen Pyramide *m*P∞ in §. 794.

Soll das aus der Pyramide abgeleitete Sphenoid dargestellt werden, so legt man das rechtwinklige Parallelepipedon zu Grunde, führt aber von jeder seiner Endflächen nur zwei Schnitte.

§. 811.

Eine monoklinoëdrische Pyramide zu modelliren.

Soll eine vollständige monoklinoëdrische Pyramide von dem Verhältnisse der Dimensionen $a : b : c$ und dem Neigungswinkel 0P : ∞P∞ = C modellirt werden, so schneidet man erst ein rectanguläres Prisma, dessen dreierlei Kanten das Verhältniss

$$a + b\cos C : b\sin C : c$$

haben, und von welchen das eine Flächenpaar = ∞P∞, das andere = (∞P∞), Fig. 848. Hierauf nimmt man in denjenigen Kanten, welche den Combinationskanten dieser beiden Flächenpaare entsprechen, von den Ecken aus die Länge

$$CA = b\cos C$$

und zwar in je zweien Kanten in entgegengesetzter Richtung, zieht die Ansatzlinien *AB* und die Bahnlinien *AA*, und führt die so bestimmten zwei Schnitte, so resultirt das schiefe Prisma *ABAB* als die, um die verlangte Pyramide umschriebene Combination 0P. ∞P∞.(∞P∞). Auf den Flächen dieses Prismas zieht man endlich die Diagonalen aller Flächen, wählt die

Digitized by Google

Diagonalen der beiden Gegenflächen ($\infty P\infty$) zu Ansatz-, die andern zu Bahnlinien, und führt die so bestimmten acht Schnitte, so ist die verlangte Pyramide modellirt.

Man kann auch bei dieser Modellirung von dem Prisma ∞P ausgehen, welches erst in der Höhe $a + b\cos C$ geschnitten, und dann mit der schiefen Grundfläche versehen wird, worauf die Construction in ähnlicher Weise auszuführen ist wie in §. 794.

Soll endlich eine triklinoëdrische Pyramide von dem Verhältnisse der Dimensionen $a : b : c$ und den Winkeln derselben α, β und γ, so wie dem Winkel $\infty\breve{P}\infty : \infty\bar{P}\infty = A$ modellirt werden, so schneidet man erst ein indefinites rhomboidisches Prisma mit dem Winkel A und dem Verhältnisse der Breite der Seitenflächen $b\sin\gamma : c\sin\beta$, legt die schiefe Basis an dem einen Ende an, und nimmt die Seitenkanten in der Länge $2a$, so ist die umschriebene Combination $0P.\infty\breve{P}\infty.\infty\bar{P}\infty$ modellirt, worauf die Darstellung der Pyramide selbst keine Schwierigkeit mehr hat.

Zweites Capitel.

Von den Pappmodellen.

§. 812.

Der Flächeninbegriff einer jeden Gestalt lässt sich in einer Ebene ausgebreitet, als sogenanntes Flächennetz darstellen, wobei freilich der gegenseitige Zusammenhang vieler Flächen verloren gehen muss. Die Pappmodelle der Gestalten werden nun aus dergleichen, auf Pappe gezeichneten Flächennetzen durch Zusammenfügung aller derjenigen Flächenränder dargestellt, welche in der Gestalt selbst zu einer Kante vereinigt sind. Sonach zerfällt die Pappmodellirung

Digitized by Google

in einen wissenschaftlichen und einen technischen Theil. Der wissenschaftliche Theil, mit welchem wir es hier ausschliesslich zu thun haben, lehrt die richtige und leichte Construction des Flächennetzes einer jeden Gestalt (oder Combination) für eine verlangte Grösse derselben. Der technische Theil lehrt das Ausschneiden der Netze, ihr Zusammenfügen zu Modellen und das Ueberziehen der letzteren. Für das Ausschneiden gilt die allgemeine Regel, dass jedes Netz nur in seinen Conturlinien ganz, in seinen inneren Linien aber (wo zwei Flächen zusammentreffen) blos halb durchschnitten wird. Alles Andere ist Sache der Uebung, und lässt sich bei jedem geschickten Buchbinder oder Futteralmacher erlernen.

Wiewohl nun die Lehre von der Entwerfung der Netze auch auf die Combinationen ausgedehnt werden kann (und schon zum Theil von diesem Gesichtspuncte aus behandelt worden ist), so werden wir doch an gegenwärtigem Orte fast nur auf die Netze der einfachen Gestalten Rücksicht nehmen können, weil ohne diese Einschränkung unser Capitel leicht zu einem ganzen Bande anschwellen würde, und weil zunächst die einfachen Gestalten, als die wichtigsten, zu Demonstrationen Modelle in grösserem Maassstabe erfordern, dergleichen aus Holz weder füglich darzustellen, noch bequem zu handhaben, und daher am besten aus Pappe zu fertigen sind. Was die verlangte Grösse der Modelle betrifft, so setzen wir voraus, dass solche im Tesseralsysteme durch die Länge einer Hauptaxe, in den übrigen Systemen durch die Länge einer Nebenaxe angegeben wird; die Hälfte dieser Länge bildet jedenfalls die Einheit in unsern Constructionen. Soll daher z. B. das Modell des Rhombendodekaëders 8 Zoll hoch werden, so wird eine Linie von 4 Zoll Länge als Einheit den Constructionen zu Grunde gelegt.

Digitized by Google

I. Gestalten des Tesseralsystemes.

A. Holoëdrische Gestalten.

§. 813.

Netz des Hexaëders $\infty O \infty$.

Da das Hexaëder von 6 Quadraten umschlossen wird, so ist die einfachste Construction seines Netzes folgende.

Ueber der Linie 2 (also über der ganzen verlangten Höhe des Hexaëders) zeichne ein Quadrat *a*, Fig. 849, über den vier Seiten desselben die vier Quadrate *b*, und endlich über der von *a* abgewandten Seite eines der Quadrate *b* das sechste Quadrat *c*.

Oder: ziehe zwei sich rechtwinklig schneidende Linien, trage von ihrem Durchschnittspuncte *A* aus die Länge 2 in die erste Linie nach einer Richtung ein, nach der andern drei Mal, in die zweite Linie nach einer Richtung ein, nach der andern zwei Mal, so bestimmen sich die Puncte B, B', B'', B''' und C, C', C''. Durch die Puncte C lege Parallelen mit AB, durch die Puncte B Parallelen mit AC, so ist das verlangte Netz entworfen.

§. 814.

Netz des Oktaëders O.

Da das Oktaëder von 8 gleichseitigen Dreiecken umschlossen wird, so ist die einfachste Construction seines Netzes folgende.

Um zuvörderst die Seite der Oktaëderflächen zu finden, construire man über der Länge $1 = AC$, Fig. 852, als Kathete ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ACB; die Hypotenuse AB desselben ist die gesuchte Seite.

Man ziehe nun eine Linie, trage die gefundene Seite dreimal in dieselbe, so dass $AB = BC = CD = \sqrt{2}$, Fig. 850, beschreibe über AC aufwärts und

Digitized by Google

über *BD* abwärts die gleichseitigen Dreiecke *ACE* und *BDF*, verlängere die *FB* bis *G*, die *EC* bis *H*, ziehe durch *G* und *H* Parallelen der *AD*, durch *B* und *C* Parallelen der *AE*, so ist das verlangte Netz entworfen.

Man kann dabei auch so verfahren. Ueber der gefundenen Flächenseite beschreibe man die beiden gleichseitigen Dreiecke *ABC*, *ABD*, Fig. 851, hierauf um *C* und *D* mit dem Halbmesser *CA* zwei Kreise, und trage die *CA* in jeden dieser Kreise von *A* aus drei Mal als Chorde ein, ziehe die Halbmesser nach den Endpuncten dieser Chorden, so ist das Netz entworfen.

§. 815.

Netz des Rhombendodekaëders ∞O.

Construction einer Fläche. Nach §. 124 ist für die Fläche des Rhombendodekaëders

die Brachydiagonale $= 1$
die Makrodiagonale $= \sqrt{2}$
die Seite . . . $= \sqrt{\frac{3}{4}}$

Hieraus ergeben sich zwei Methoden zur Construction einer Fläche des Dodekaëders.

1) Construire über der halben Lineareinheit *AC* als Kathete ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck, *ABC*, Fig. 853, ziehe durch *A* eine Parallele der *CB*, und mache *AD* = *AB*; verlängere die *AC* und *AD*, und mache die Verlängerungen *AC'* und *AD'* ihnen selbst gleich, verbinde die Puncte *C*, *D*, *C'* und *D'* durch gerade Linien, so ist *CDC'D'* der verlangte Rhombus.

2) Construire über der ganzen Lineareinheit *CC'* zwei gleichseitige Dreiecke *CC'E* und *CC'E'*, Fig. 854, ziehe die *EE'* und beschreibe mit der halben *EE'* oder mit der *EF* zu beiden Seiten der *CC'* die gleichschenkligen Dreiecke *CC'D* und *CC'D'*, so ist wiederum *CDC'D'* der verlangte Rhombus.

Construction des Netzes. Aus dem Puncte C, Fig. 855, der gefundenen Fläche beschreibe mit CD einen Kreis, trage in in selbigen die Makrodiagonale DD' jenseits D' zweimal als Chorde ein, so bestimmen sich die Puncte D'' und D'''; über der $D'D''$ und $D''D'''$ beschreibe nun mit der Seite des Rhombus gleichschenklige Dreiecke, so bestimmen sich die Puncte C'' und C''', und die Rhomben 2 und 3 sind construirt. Wiederhole dieselbe Construction vom Rhombus 2 ausgehend, so finden sich die Rhomben 4 und 5; auf gleiche Weise durch successive Wiederholung desselben Verfahrens von den Flächen 4, 6 und 8 aus die übrigen Flächen bis 11; trage endlich die einzele Fläche 12 nach, so ist das verlangte Netz entworfen.

Ein anderes Verfahren ist folgendes. Aus den Puncten D und D' des zuerst construirten Rhombus, Fig. 856, beschreibe mit seiner Seite zwei Kreise; trage die Brachydiagonale CC' in beide Kreise über C' dreimal als Chorde ein, beschreibe über den sechs Chorden $C'E$, EF und FG mit CD die sechs gleichschenkligen Dreiecke $C'EB$, EFH und FGK, so sind sieben Flächen construirt. Wiederhole dieselbe Construction durch Beschreibung zweier Kreise um die beiden Puncte H als Mittelpuncte, trage jedoch in den einen dieser Kreise die Chorde EF zu jeder Seite nur einmal ein, verfahre übrigens wie vorher, so werden die übrigen fünf Flächen construirt, und das Netz ist vollendet.

§. 816.

Netz des Triakisoktaëders mO.

Construction einer Fläche. Man zeichne über der Lineareinheit PQ (Fig. 865) als Kathete ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck, PQR, ziehe dessen Höhenlinie PV, und durch P eine Parallele

der *QR*, durch *V* eine Parallele der *PR*; mache *PM* = *m*, *VX* = *VW*, ziehe die *PX*, und endlich die *VM*, so ist

QR die Grundlinie
VT die Höhenlinie

einer Fläche von *m*O.

Der Beweis ist leicht zu führen, da die Linien *PM*, *PX* und *PV* keine anderen sind als die Hauptaxe, die trigonale und die rhombische Zwischenaxe eines diagonalen Hauptschnittes von *m*O.

Construction des Netzes. *Zeichne* eine Fläche *ABC* nach der so eben gegebenen Regel, Fig. 857, beschreibe aus *A* mit *AB* einen Kreis, trage in selbigen die Grundlinie *BC* von *B* und *C* aus als Chorde ein, und ziehe die Halbmesser nach den so bestimmten Puncten *D* und *E* der Peripherie, so ist das Flächensystem I construirt. Ueber jeder der Grundlinien *BC*, *BD* und *CE* beschreibe mit dem Schenkel *AB* ein gleichschenkliges Dreieck, und sogleich aus dem Scheitel eines jeden dieser Dreiecke mit *AB* als Halbmesser einen Kreis. Trage die Grundlinie *BC* von *B* und *C*, von *B* und *D*, von *C* und *E* aus in diese drei Kreise als Chorde ein, und ziehe die Halbmesser nach den so bestimmten Puncten ihrer Peripherien, so sind die Flächensysteme II, III und IV construirt.

Unterhalb der Grundlinie *EF* des Dreieckes 12 construire ein congruentes Dreieck, beschreibe aus seinem Scheitel *G* einen Kreis, und trage in selbigen die *EF* von *E* und *F* aus ein, setze dieselbe Construction für die Kreise und resp. Flächensysteme VI, VII und VIII fort, so ist das Netz des Triakisoktaëders *m*O entworfen.

Ein anderes Verfahren ist folgendes. Ueber der Fläche *ABC*, Fig 858, construire das erste Flächensystem, wie vorher, verlängere die Grundlinien

Digitized by Google

BD und *CE* bis zu ihrem Durchschnitte in *M*, beschreibe aus *M* mit *MC* einen Kreis, hierauf über *BC* mit derselben *MC* ein gleichschenkliges Dreieck, und aus dessen Scheitel *M'* einen zweiten Kreis, endlich mit der Linie *ME* aus *M* und *M'* zwei kleinere Kreise. In jeden der grössern Kreise trage von *C* aus die *BC* dreimal als Chorde ein, ziehe die Radien nach den so bestimmten Puncten beider Peripherien, beschreibe über jeder der Chorden mit *AB* ein gleichschenkliges Dreieck, und ziehe Linien von den Scheiteln derselben nach den Durchschnittspuncten je zweier Radien mit den kleineren Kreisen, so ist das verlangte Netz entworfen.

§. 817.

Netz des Tetrakishexaëders ∞On.

Construction einer Fläche. Ueber der Lineareinheit *PQ* als Kathete, Fig. 860, beschreibe das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck *QPR*, verlängere die eine Seite *PQ*, und mache $PN = n$; ziehe die Höhenlinie *PV* und die *RN*, so ist

RS die Höhenlinie

der gesuchten Fläche. Mache nun wiederum $VX = VW = \frac{1}{2}PQ$, ziehe die *PX*, und durch *S* eine Parallele der *RQ*, so ist

ST die halbe Grundlinie

der gesuchten Fläche.

Construction des Netzes. Construire aus den gefundenen Elementen eine der Flächen *ABC*, Fig. 869, und über ihrer Grundlinie die zweite Fläche *BCD*, beschreibe aus *A* und *D* mit *AB* zwei Kreise, trage in jeden derselben die *BC* nach einer Richtung ein Mal, nach der andern Richtung zwei Mal als Chorde ein, und ziehe die Radien nach den Endpuncten der Chorden, so sind die Flächensysteme I und II construirt. Ueber den beiden letzten Chorden jedes Krei-

ses (also über der 4 und 5, 7 und 8) beschreibe mit *AB* die gleichschenkligen Dreiecke 9, 10, 11 und 12, und sogleich aus dem Scheitel jedes dieser Dreiecke mit demselben Halbmesser einen Kreis; trage die Grundlinie *BC* in jeden dieser Kreise nach derselben Richtung drei Mal als Chorde ein, ziehe endlich die Radien nach den so bestimmten Puncten ihrer Peripherien, so ist das Netz des Tetrakishexaëders vollendet.

§. 818.

Netz des Ikositetraëders *mOm*.

Construction einer Fläche. Man kann diese Construction auf den Satz gründen, dass die symmetrische Diagonale jeder Fläche des Ikositetraëders von der gleichschenkligen Diagonale in rationalen Verhältnissen geschnitten wird. Wir fanden nämlich oben in §. 121 *sub* III und IV,

$$\text{symmetr. Diag. } D = \frac{\sqrt{2}\sqrt{m^2+2}}{m+2}$$

$$\text{gleichsch. Diag. } D' = \frac{m\sqrt{2}}{m+1}$$

$$\cot b = \frac{\sqrt{m^2+2}}{m+2}.$$

Nennen wir nun das kleinere Segment der symmetrischen Diagonale Σ, das grössere Σ', so ist

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}D' \cot b = \frac{m\sqrt{m^2+2}}{(m+1)(m+2)\sqrt{2}}$$

folglich auch

$$\Sigma = \frac{m}{2(m+1)}D$$

und

$$\Sigma : \Sigma' = m : m+2.$$

Kennt man also die gleichschenklige Diagonale und längere Seite der Deltoidfläche, so ist solche

leicht zu construiren; es finden sich aber beide Linien leicht auf folgende Art. In der Linie BC, Fig. 866, nimm $AB = 1$, $AC = m$, errichte in A eine Normale, und mache $AD = AB = 1$, ziehe die CD und DB, und durch A ihre Parallelen AF und AE, so ist

AE die gleichschenklige Diagonale,
AF die längere Seite

des gesuchten Deltoides; denn

$$CB : BD = CA : AE$$

$$m+1 : \sqrt{2} = m : \frac{m\sqrt{2}}{m+1}$$

welches der Werth der Diagonale,

$$CB : \quad CD = AB : AF$$

$$m+1 : \sqrt{m^2+1} = 1 \quad : \frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1}$$

welches nach §. 121 der Werth der längeren Seite.

Man beschreibe nun über AE als Grundlinie mit AF ein gleichschenkliges Dreieck AEF, Fig. 863, ziehe dessen Höhenlinie FG, verlängere solche, und mache ihre Verlängerung $GH = \frac{m}{m+2} \times FG$, ziehe die AH und EH, so ist das Deltoid construirt.

Anderes Verfahren. Ueber der Lineareinheit PQ als Kathete beschreibe das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck PQR, Fig. 859, ziehe dessen Höhenlinie PV, und wiederum die PX nach derselben Regel wie in den §§. 816 und 817. Verlängere die PQ, und ziehe durch P eine Parallele der QR, mache $PM = PN = m$, $PU = 1$; ziehe nun die RN, welche die PV in S, ferner die SM, welche die PX in T schneidet*), und endlich die TU, so ist

*) Die Figur bezieht sich auf die Varietät 202, in welcher die Puncte X und T zusammenfallen.

Digitized by Google

RS die längere Seite,
ST die kürzere Seite,
TU die symmetrische Diagonale
der Fläche von *m*O*m*, aus welchen Elementen diese Fläche mit Leichtigkeit construirt werden kann.

§. 819.

Fortsetzung.

Construction des Netzes. Zeichne nach der Regel des vorhergehenden §. eine Fläche, z. B. die *ABCD*, Fig. 862, beschreibe mit ihrer längeren Seite aus *A* einen Kreis, trage in selbigen die gleichschenklige Diagonale *BD* drei Mal als Chorde ein, und ziehe die Radien der dadurch bestimmten Puncte *E*, *F* und *G* der Peripherie. Ueber *DE*, *EF* und *FG* bestimme nun die Puncte *C'*, *C''* und *C'''* eben so, wie der Punct *C* über *BD* bestimmt wurde, so sind die Deltoide 1, 2, 3 und 4 construirt.

Beschreibe nun aus *C*, *C'*, *C''* und *C'''* mit der kürzeren Seite *BC* Bogen, welche die in Gedanken verlängerten symmetrischen Diagonalen der Flächen 1, 2, 3 und 4 schneiden; hierauf aus *B* und *D*, *D* und *E* u. s. w. mit *BD* Bogen, die jene ersteren Bogen schneiden, so bestimmen sich die Puncte *H* und *K*, *H'* und *K'* u. s. w. Beschreibe endlich über *BH* und *DK*, über *DH'* und *EK'* u. s. w. mit *AB* gleichschenklige Dreiecke, so sind die Flächen 5 bis 12, oder die Flächensysteme I bis IV, construirt.

An die Fläche 9 lege nun die Fläche 13, an diese die Fläche 14, beschreibe aus dem Puncte *A* der letzteren mit *AB* einen Kreis, und vollende die Construction für die Flächensysteme V bis VIII ganz so wie vorher für die Flächensysteme I bis IV, so ist das Netz des Ikositetraëders entworfen.

Anmerkung. Man kann auch nach der Fläche 1 sogleich die Fläche 5 zeichnen, und aus *A* in 1

Digitized by Google

und 14 statt des einen Kreises mit *AB* sogleich noch zwei concentrische Kreise mit *AI* und *AH* beschreiben, wodurch die Construction sehr abgekürzt wird.

§. 820.

Netz des Hexakisoktaëders *m*O*n*.

Je zwei in einer längsten Kante von *m*O*n* zusammenstossende Flächen bilden, wenn man sie in eine Ebene ausbreitet, oder ihren Neigungswinkel bis zu 180° vergrössert, ein Deltoid. Kann man also für *m*O*n* eines dieser Deltoide construiren, so hat man nur 24 derselben nach der im vorigen §. angegebenen Regel zu einem Netze zu vereinigen, um die Aufgabe zu lösen. Das Deltoid ist aber gefunden, sobald man eines seiner Dreiecke, oder eine der Flächen von *m*O*n* zu construiren weiss, welche daher zuerst gefunden werden muss.

Construction einer Fläche. Bei dieser Construction wird die der Fig. 859 ganz ähnliche *Fig.* 864 zu Grunde gelegt, indem der wesentliche Unterschied nur darin besteht, dass zwar $PM=m$, allein $PN=n$ genommen wird. Im Uebrigen verfährt man ganz so wie in §. 818, und findet

RS, die mittlere Seite,
ST, die kürzeste Seite,*)
TU, die längste Seite

der gesuchten Fläche von *m*O*n*.

Nachdem so eine Fläche *AFH*, Fig. 863, gefunden ist, construirt man über ihrer längsten Seite *FH* in symmetrischer Lage eine zweite Fläche *EFH*, und erhält dadurch das Deltoid *AFEH*, als das Element des verlangten Netzes, welches aus diesem Elemente ganz nach derselben Regel entworfen wird, wie das

---

*) Da sich die Figur auf die Varietät $3O\frac{1}{2}$ bezieht, so fallen die Puncte *X* und *T* wiederum zusammen.

Digitized by Google

Netz des Ikositetraëders. Ist das Netz der 24 Deltoide vollendet, so zieht man die symmetrischen Diagonalen der sämmtlichen Flächen, und gelangt so auf das verlangte Netz des Hexakisoktaëders *m*O*n*.

B) *Hemiëdrische Gestalten.*

a) Geneigtflächig-semitesserale Gestalten.

§. 821.

Netz des Tetraëders $\frac{O}{2}$.

Da die Kantenlinie des Tetraëders $= 2\sqrt{2}$, also zweimal so lang als jene des Oktaëders, so nehme man die doppelte Seite der Oktaëderfläche in §. 814, trage selbige zweimal in eine gerade Linie ein, so dass $AB = BC = 2\sqrt{2}$, Fig. 861, beschreibe über *AC* das gleichseitige Dreieck *ACD*, ziehe durch *B* mit *AD* und *DC* die Parallelen *BD'* und *BC'*, und endlich die *C'D'*, so ist das Netz des Tetraëders entworfen.

Anmerkung. Es wird hier und im Folgenden durchgängig vorausgesetzt, dass man die hemiëdrischen Gestalten von denselben Dimensionen darstellen will, wie ihre resp. Muttergestalten.

§. 822.

Netz des Trigondodekaëders $\frac{mOm}{2}$.

Man construire die Fläche des Ikositetraëders *m*O*m*, errichte in demjenigen Endpuncte der symmetrischen Diagonale, in welchem die längeren Seiten zusammentreffen, eine indefinite Normale, und verlängere die kürzeren Seiten, bis solche diese Normale schneiden, so ist die Fläche des Trigondodekaëders construirt.

Das Netz wird nun ganz nach denselben Regeln entworfen wie das halbe Netz des Triakisoktaëders in Fig. 857. Aus dem Scheitelpuncte *A* der ersten

gefundenen Fläche ABC, Fig. 873, beschreibt man nämlich mit CA einen Kreis, trägt in selbigen die BC zweimal ein, erhält so die Fläche 2 und 3, und setzt die Construction fort, wie in §. 816, bis alle vier Flächensysteme entworfen sind.

§. 823.

Netz des Deltoiddodekaëders $\frac{mO}{2}$.

Construction einer Fläche. Die Höhenlinie H einer jeden Fläche des Triakisoktaëders mO ist nach §. 122

$$H = \frac{\sqrt{2m^2+1}}{(2m+1)\sqrt{2}}$$

Diese Linie verlängert sich durch die Hemiëdrie zu der symmetrischen Diagonale D der Deltoide des Dodekaëders; es ist aber nach §. 137

$$D = \frac{2m\sqrt{4m^2+2}}{4m^2-1}$$

$$= \frac{2m\sqrt{2}\sqrt{2m^2+1}}{(2m+1)(2m-1)}$$

folglich auch

$$D = \frac{4m}{2m-1}H$$

Bezeichnen wir also mit Σ das kleinere, mit Σ' das grössere der Segmente, in welche die symmetrische Diagonale durch die gleichschenklige Diagonale getheilt wird, so ist

$$\Sigma : \Sigma' = 2m-1 : 2m+1$$

Man construire also die Fläche des Triakisoktaëders AEH nach der Regel des §. 816, Fig. 870, ziehe die Höhenlinie HG, verlängere selbige über die Grundlinie, mache ihre Verlängerung $GF = \frac{2m+1}{2m-1} \times HG$,

und ziehe endlich die AF und EF, so ist $AFEH$ das verlangte Deltoid.

Construction des Netzes. Zeichne die Fläche $ABCD$ nach der so eben angegebenen Regel, Fig. 868, beschreibe aus A mit der längeren Seite AB einen Kreis, trage in selbigen die gleichschenklige Diagonale BD von B und D aus als Chorden ein, ziehe die dadurch bestimmten Radien, und beschreibe über jeder Chorde mit der kürzeren Seite BC ein gleichschenkliges Dreieck, so wie zugleich aus dem Scheitel jedes dieser Dreiecke, und aus dem Puncte C selbst einen Bogen, welchen die in Gedanken verlängerten symmetrischen Diagonalen der Flächen 1, 2 und 3 schneiden. Vollende die Construction der Flächensysteme I, II und III, lege endlich an das Flächensystem I das System IV, und das verlangte Netz ist entworfen.

§. 824.

Netz des Hexakistetraëders $\frac{mOn}{2}$.

Construction einer Fläche. Die kürzeste Kante C des Hexakisoktaëders mOn wird durch die Hemiëdrie zur längsten Kante C' des Hexakistetraëders. Nun ist nach §. 116

$$C = \frac{n\sqrt{m^2(n+1)^2 + 2n^2}}{(mn+m+n)(n+1)}$$

und nach §. 131

$$C' = \frac{2mn\sqrt{m^2(n+1)^2 + 2n^2}}{(mn+m)^2 - n^2}$$

also auch

$$C' = \frac{2m(n+1)}{m(n+1) - n}\,C$$

und die erforderliche Verlängerung Σ' von C, damit aus ihm C' werde:

$$\Sigma' = \frac{m(n+1)+n}{m(n+1)-n} C$$

Hieraus ergiebt sich folgende Construction der Fläche des Hexakistetraëders. Man zeichne die Fläche *ABC* des Hexakisoktaëders mOn, Fig. 867, verlängere die kürzeste Seite *BC* über die mittlere Seite hinaus, mache die Verlängerung

$$CD = \frac{m(n+1)+n}{m(n+1)-n} \times BC$$

und ziehe die *AD*, so ist *ABD* die verlangte Fläche.

Construction des Netzes. Nachdem die Fläche gefunden, wird das Netz des Hexakistetraëders nach derselben Regel entworfen wie das Netz des Deltoiddodekaëders. Man combinirt nämlich zwei der gefundenen Dreiecke zu einem Deltoide, entwirft das Netz von 12 dergleichen Deltoiden, wie im vorhergehenden §, und zieht endlich die symmetrischen Diagonalen derselben, so ist das Netz des Hexakistetraëders entworfen.

b) Parallelflächig-semitesserale Gestalten.

§. 825.

Netz des Pentagondodekaëders $\frac{\infty On}{2}$.

Construction einer Fläche. Die Höhenlinie *B* der Flächen des Tetrakishexaëders verlängert sich durch die Hemiëdrie zu der Höhenlinie *B''* der Flächen des Pentagondodekaëders; nun ist nach §. 123

$$B = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$$

und nach §. 148

$$B'' = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$$

also auch

$$B'' = \frac{n+1}{n} B$$

und die erforderliche Verlängerung Σ' von B, damit aus ihr B' werde:

$$\Sigma' = \frac{1}{n} B$$

Die Construction des verlangten Pentagones hat nun keine Schwierigkeit. Man zeichne nämlich eine Fläche ABC des Tetrakishexaëders ∞On, Fig. 871, ziehe die Höhenlinie AD, verlängere sie über die Grundlinie hinaus, und nehme die Verlängerung $DE = \frac{1}{n} \times AD$, so ist AE die Höhenlinie des gesuchten Pentagones. Da nun die Puncte B und C den trigonalen Eckpuncten in der hemiëdrischen eben sowohl, wie in der holoëdrischen Gestalt entsprechen, so sind die Linien BE und CE zwei der gleichen Seiten des Pentagones. Durch A lege man nun eine Parallele der BC, und mache $BF = BE$, $CG = CE$, so ist FG die Grundlinie des Pentagones.

Construction des Netzes. Zeichne die erste Fläche $ABCDE$, Fig. 874, beschreibe aus A mit AB einen Kreis, und trage in selbigen die BE von E aus zwei Mal als Chorde ein, so bestimmen sich die Puncte B' und E'. Von B' und E' aus beschreibe zugleich mit dem Halbmesser BE die Bogen Ee und $B'b'$, und von E und B' aus mit dem Halbmesser BC die Bogen b'' und e'', so bestimmen sich die Puncte B'' und E''. Ueber $B'B''$ und $E'E''$ beschreibe endlich mit AB zwei gleichschenklige Dreiecke, so bestimmen sich die Puncte A' und A'', und die Pentagone 2 und 3 sind gefunden. Man verfahre nun mit der Fläche 2 wie vorher mit der Fläche 1, so finden sich die Flächen 4 und 5, hierauf mit der Fläche 4, und successiv mit allen geradzähligen Flächen nach derselben Regel, so bleibt endlich, nachdem mittels der fünften

Repetition unsers Verfahrens aus der 8 die 10 und 11 gefunden sind, nur noch die Fläche 12 übrig, welche nach derselben Regel nachgetragen wird.

§. 826.

Netz des Dyakisdodekaëders $\left[\frac{mOn}{2}\right]$.

Construction einer Fläche. Die Kante B jeder bleibenden Fläche des Hexakisoktaëders mOn verlängert sich durch die Hemiëdrie über die C hinaus zu der längsten Kante B'' des Dyakisdodekaëders; die Kanten A und C verschwinden zwar, nicht aber ihr Durchschnittspunct c, welcher unverändert der Endpunct der trigonalen Zwischenaxe, und der Durchschnittspunct der beiden neuen Kanten C'' und C'' bleibt; ausserdem tritt noch die neue Kante A'' ein.

Wenn uns B'' und A'' gegeben sind, so ist es sehr leicht, aus der Fläche des Hexakisoktaëders auf die Fläche des Dyakisdodekaëders zu gelangen; denn wir dürfen nur die Seite B verlängern, Fig. 872, bis sie $= B''$, darauf ihren neuen Endpunct b mit dem Puncte c verbinden, so ist $bc = C''$, endlich über A mit der gegebenen A'' und der gefundenen C'' ein Dreieck beschreiben, so ist das gleichschenklige Trapezoid construirt.*)

Die B'' und A'' ergeben sich sehr leicht durch folgende Construction. Verlängere in Fig. 864, wo

---

*) Vergleicht man den Werth von B'' in §. 142 mit jenem von B in §. 116, so findet man, dass

$$B'' = \frac{(m-1)(n+1)}{mn-1} B$$

und folglich, dass die Verlängerung der Kante B, damit sie zu B'' werde, oder dass

$$\Sigma = \frac{m-n}{mn-1} B$$

wodurch man auf die Bestimmung eines Punctes gelangen kann.

Digitized by Google

$PN = n$, die PR, mache $PL = PM = m$, und ziehe die QL, welche die RN in einem Puncte Y schneidet, so ist unmittelbar

$$RY = B''$$
$$QY = A''$$

und somit Alles gefunden, was zur Construction des Trapezoides gefordert wird.

Construction des Netzes. Das Netz des Diakisdodekaëders wird auf ähnliche Art entworfen, wie das Netz des Pentagondodekaëders. Man zeichnet nämlich zuvörderst zwei, in ihren längsten Seiten zusammenstossende Flächen des Dyakisdodekaëders, welche sonach ein unregelmässiges Sechseck $ABCDEF$ darstellen, Fig. 872, zieht die Linie AE, und erhält so ein symmetrisches Pentagon $ABCDE$ über der AE als Grundlinie. Aus diesem Pentagone bildet man nun, ganz nach denselben Regeln wie im vorhergehenden §., das Netz eines Pentagondodekaëders, beschreibt nachher über jeder Seite AE mit AF ein gleichschenkliges Dreieck AFE, und zieht die Linien FC, so ist das verlangte Netz des Dyakisdodekaëders entworfen.

II) Gestalten des Tetragonalsystemes.

A) Holoëdrische Gestalten.

§. 827.

Netze der tetragonalen Pyramiden mP und $mP\infty$.

Construction einer Fläche von mP. Ueber der Lineareinheit (d. h. über der halben Nebenaxe) als Kathete beschreibe ein gleichschenkligrechtwinkliges Dreieck MBC, Fig. 875; seine Hypotenuse ist die Grundlinie der Fläche von mP. Verlängere die CM über M, mache $MA = ma$, und ziehe die BA, so ist BA der Schenkel des gesuchten Dreieckes.

Construction einer Fläche von $mP\infty$. Verlängere in der vorigen Figur die BM über M, und

Digitized by Google

mache $MD = MB$; ziehe die DC, verlängere sie über C, mache $CE = ma$, und ziehe die BE, so ist BD die Grundlinie und BE einer der Schenkel der Flächen von mP∞.

Construction des Netzes. Zu beiden Seiten der gefundenen Grundlinie beschreibe mit dem gefundenen Schenkel die zwei Dreiecke ABC und $A'BC$, Fig. 876, und sogleich aus A und A' als Mittelpuncten mit AB als Halbmesser zwei Kreise; in jeden dieser Kreise trage die B drei Mal als Chorde ein, und ziehe die Radien nach den Endpuncten dieser Chorden, so ist das Netz der Pyramide mP oder mP∞ entworfen.

§. 828.

Netz der ditetragonalen Pyramide mPn.

Construction einer Fläche. Beschreibe das gleichschenkligrechtwinklige Dreieck MBC wie vorher, Fig. 877, ziehe dessen Höhenlinie, verlängere die eine Kathete MB über B, mache $MN = n$, $ME = ma$; lege durch M eine Parallele der BC, und mache auch $MA = ma$; ziehe die CN, welche die Höhenlinie in einem Puncte D schneidet, hierauf die DA und die CE, so ist

CD die Mittelkante Z,
DA die diagonale Polkalte Y,
CE die normale Polkante X

der Pyramide mPn, und folglich Alles gefunden, was zur Construction einer ihrer Flächen erfordert wird.

Construction des Netzes. Je zwei in einer der längeren Polkanten*) zusammenstossende Flächen von mPn bilden, wenn man sie in einer Ebene aus-

*) Aus §. 223 ist bekannt, dass X die längere Polkante ist, wenn $n < 2{,}414\ldots$, hingegen Y die längere Polkante, wenn $n >$ als dieser Werth.

Digitized by Google

breitet, oder ihren Neigungswinkel bis auf 180° vergrössert, ein Deltoid. Man bilde also zuvörderst aus zweien der gefundenen Flächen eines dieser Deltoide *ACDE*, Fig. 878, und lege an eine der kürzeren Seiten desselben sogleich ein zweites Deltoid *A'CDE* in symmetrischer Lage; beschreibe hierauf aus *A* und *A'* mit der längeren Seite *AC* zwei Kreise, trage in selbige die gleichschenklige Diagonale *CE* dreimal als Chorde ein, ziehe die Radien nach den Endpuncten dieser Chorden, und beschreibe endlich über jeder Chorde mit *CD* ein gleichschenkliges Dreieck, so sind 8 Deltoide, und, nachdem man ihre symmetrischen Diagonalen gezogen hat, die 8 Flächenpaare construirt, und somit das verlangte Netz der Pyramide *mPn* entworfen.

B) Hemiëdrische Gestalten.

§. 829.

Netz des tetragonalen Sphenoides $\frac{mP}{2}$.

Zeichne eine Fläche der tetragonalen Pyramide *mP* nach der Regel in §. 827, und lege durch ihre Winkelpuncte Parallelen der gegenüberliegenden Seiten; so ist eine Fläche *ABC* des Sphenoides construirt. Das Netz kann man nun entweder so entwerfen, dass man wiederum durch jeden Winkelpunct des Dreieckes *ABC* Parallelen der Seiten legt, wie in Fig. 879, oder dass man durch *A* eine Parallele der *BC* legt, die *BC* selbst verlängert, und dann

durch *C* eine Parallele der *AB*,
- - *D* - - - - - *AC*,
- - *E* - - - - - *AB*,

legt, wie in Fig. 880.

Digitized by Google

§. 830.

Netz des tetragonalen Skalenoëders $\pm\frac{mPn}{2}$.

Construction einer Fläche. Die diagonale Polkante Y der ditetragonalen Pyramide mPn verlängert sich durch die Hemiëdrie zur längeren Polkante Y' des Skalenoëders, während ihr normaler Mittelpunct der Halbirungspunct für die Mittelkante des Skalenoëders wird. Es kommt also nur darauf an, die Verlängerung von Y zu kennen, um aus der Fläche der ditetragonalen Pyramide auf die Fläche des Skalenoëders zu gelangen. Nun ist nach §. 223 in der Pyramide

$$Y=\frac{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+2n^2}}{n+1}$$

und in dem Skalenoëder, nach §. 235,

$$Y'=\frac{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2+2n^2}}{n}$$

also auch

$$Y'=\frac{n+1}{n}Y$$

und die erforderliche Verlängerung von Y, damit aus ihm Y' werde,

$$\Sigma=\frac{1}{n}Y$$

Hieraus ergiebt sich folgende Construction der Skalenoëderfläche. Man zeichne eine Fläche ABC der ditetragonalen Pyramide mPn, Fig. 881, verlängere die der diagonalen Polkante entsprechende Seite AB, und mache die Verlängerung

$$BD=\frac{1}{n}\times AB,$$

ziehe hierauf die DC, verlängere solche über C, und mache $CE=CD$, ziehe endlich die AE, so ist ADE die verlangte Fläche des Skalenoëders.

Construction des Netzes. Je zwei Flächen eines Flächenpaares des Skalenoëders bilden, wenn man sie in einer Ebene ausbreitet, oder ihren Neigungswinkel bis auf 180° vergrössert, ein Deltoid. Man zeichne nun zuvörderst ein dergleichen Deltoid *ABCD*, Fig. 882, ziehe dessen gleichschenklige Diagonale *BC*, verlängere solche nach einer Seite, und lege durch *D* eine Parallele derselben, hierauf

durch *C* eine Parallele der *BD*,
durch *B* und *E* Parallelen der *CD*,

so bestimmen sich die gleichschenkligen Diagonalen *DE*, *DE'* und *CE''* der drei andern Deltoide; beschreibe hierauf über jeder dieser Diagonalen mit *AB* ein gleichschenkliges Dreieck, ziehe endlich die symmetrischen Diagonalen der Deltoide, so ist das verlangte Netz des Skalenoëders entworfen.*)

§. 831.

Fläche des Skalenoëders aus dem eingeschriebenen Sphenoide.

Man kann auch die Fläche des Skalenoëders aus den durch sein secundäres Zeichen mS^n gegebenen Elementen finden, wie folgt. Zuerst entwirft man eine Fläche *ABC*, Fig. 883, des eingeschriebenen Sphenoides $\frac{mP}{2}$ oder mS nach der Regel des §. 829; zieht hierauf die Höhenlinie *DA*, macht $DE = 2ma$, und

$$DF = \tfrac{1}{2}(n-1) \times DE,$$

legt durch *E* eine Parallele der *BC*, und macht $EG = DC$, zieht endlich die *FB* und *FG*, so sind die drei Kantenlinien des Skalenoëders gefunden, denn es ist

*) Diese Construction des Netzes gilt zunächst für diejenigen Skalenoëder, deren Mittelkanten länger sind als die kürzeren Polkanten; für solche tetragonale Skalenoëder, deren Mittelkanten kürzer sind als diese Polkanten, ist das Netz nach einer ähnlichen Regel zu entwerfen, wie das der hexagonalen Skalenoëder.

Digitized by Google

AB die Mittelkante Z
BF die kürzere Polkante X
FG die längere Polkante Y.

Wenn n nicht sehr gross ist, kann man noch kürzer auf die längere Polkante gelangen, indem man sogleich auch $EH = DF$ macht, und die BH zieht, welches diese Polkante ist. Man erspart so die Construction der EG.

§. 832.

Netz des tetragonalen Trapezoëders $r\frac{mPn}{2}$ und $l\frac{mPn}{2}$.

Construction einer Fläche. Die normalen Mittelkanten Z des tetragonalen Tapezoëders $rl\frac{mPn}{2}$ sind der Lage nach identisch mit den Mittelkanten Z des tetragonalen Skalenoëders $\pm\frac{mPn}{2}$, wie dies nicht nur unmittelbar aus der Ableitung folgt, sondern auch aus der Identität der Gleichungen von Z in §. 234 und §. 240 zu ersehen ist. Ständen nun die Linearwerthe beider Kanten zu einander in einem rationalen Verhältnisse, so wäre die Construction der Fläche des Trapezoëders sehr leicht aus jener der Skalenoëderfläche zu erhalten. Es ist aber im Skalenoëder nach §. 235

$$Z = \frac{2\sqrt{m^2a^2 + n^2}}{n}$$

und im Trapezoëder nach §. 241

$$Z_1 = \frac{2(n-1)\sqrt{m^2a^2 + n^2}}{n(n+1)}$$

also auch

$$Z_1 = \frac{n-1}{n+1}Z$$

und folglich die normale Mittelkante des Trapezoëders wirklich ein rationales Submultiplum der Mittelkante des Skalenoëders.

Digitized by Google

Um daher die Fläche des Trapezoëders zu finden, construirt man zuvörderst die Fläche *ABC*, Fig. 884, der ditetragonalen Pyramide mPn nach der Regel in §. 828, verlängert ihre diagonale Kantenlinie, *AB* und macht die Verlängerung

$$BD = \frac{1}{n} \times AB,$$

zieht die *CD*, und nimmt von *C* aus die

$$CE = \frac{n-1}{n+1} \times CD,$$

macht $CF = CE$, zieht die *EB* und *AF*, beschreibt aus *A* mit *AF* einen Bogen, welcher die gehörig verlängerte *EB* in *G* schneidet, so wird, wenn die Construction mit gehöriger Genauigkeit erfolgte, $BG = BE$, und *AFEG* die verlangte Fläche des Trapezoëders seyn.

Construction des Netzes. Man construire eines der Trapezoide *ABCD*, Fig. 885, und lege an seine längere Mittelkante *CD* sogleich ein zweites Trapezoid *A'B'CD* in entgegengesetzter Lage, beschreibe aus *A* und *A'* mit *AB* zwei Kreise, trage in selbige die gleichschenklige Diagonale *BD* drei Mal als Chorde ein, ziehe die Radien nach den dadurch bestimmten Puncten, und beschreibe endlich über jeder Chorde mit den Seiten *BC* und *CD* ein ungleichseitiges Dreieck, so ist das Netz des Trapezoëders entworfen.

Anmerkung. Will man, wie dies jedenfalls zu empfehlen, das linke und rechte Trapezoëder zugleich darstellen, so entwerfe man dasselbe Netz zwei Mal, schneide beide Netze aus, mache jedoch ihre entgegengesetzten Oberflächen zu den Aussenflächen der Trapezoëder, so erhält man aus dem einen Netze $r\frac{mPn}{2}$, aus dem andern $l\frac{mPn}{2}$. Doch kann man auch die Netze beider Gegenkörper unmittelbar construiren, indem man das erste Trapezoid des einen Netzes in

der Lage wie *AFEG*, Fig. 884, das des andern Netzes in der Lage wie *AFEG*, Fig. 886, zeichnet.

III. Gestalten des Hexagonalsystemes.

A. Holoëdrische Gestalten.

§. 833.

Netze der hexagonalen Pyramiden *m*P und *m*P2.

Construction einer Fläche von *m*P. Man zeichne einen rechten Winkel, Fig. 887, mache den einen Schenkel *AB* = 1, d. h. = der Lineareinheit, den andern Schenkel *AC* = *ma*, ziehe die *BC*, so ist

AB die Grundlinie
BC der Schenkel

der verlangten Fläche.

Construction einer Fläche von *m*P2. Ueber der Lineareinheit *AB*, Fig. 888, beschreibe ein gleichseitiges Dreieck *ABD*, ziehe dessen Höhenlinie aus *A*, verlängere selbige, so wie die *AB*, und mache *BF* = *AB*, ziehe die *DF*, welche die Höhenlinie in einem Puncte *E* schneidet; lege hierauf durch *A* eine Parallele der *DB*, mache *AC* = *ma*, und ziehe *CE*, so ist

AE die Grundlinie
EC der Schenkel

der verlangten Fläche.

Construction des Netzes. Ueber der gefundenen Grundlinie *BC*, Fig. 889, beschreibe man zu beiden Seiten eines der Dreiecke, hierauf aus dem Scheitel jedes Dreieckes mit *AB* einen Kreis, trage in beide Kreise die *BC* als Chorde über *C* zwei Mal, über *B* drei Mal ein, und ziehe die Radien nach den Endpuncten dieser Chorden, so ist das Netz der hexagonalen Pyramide entworfen.

§. 834.

Netz der dihexagonalen Pyramide *m*P*n*.

Construction einer Fläche. Ueber der Li-

Digitized by Google

neareinheit AB, Fig. 890, beschreibe ein gleichseitiges Dreieck ABD, ziehe dessen Höhenlinie aus A, verlängere selbige so wie die AB, und mache

$$BF = (n-1) \times AB;$$

ziehe die DF, welche die Höhenlinie in einem Puncte E schneidet. Durch A lege eine Parallele der DB und eine Normale der AD, mache $AC = AG = ma$, ziehe die DG und EC, so ist

DE die Mittelkante Z
DG die normale Polkante X
EC die diagonale Polkante Y

der Pyramide $m\text{P}n$, und folglich die verlangte Fläche gefunden.

Construction des Netzes. Je zwei in einer längeren Polkante*) zusammenstossende Flächen von $m\text{P}n$ bilden, wenn man sie in einer Ebene ausbreitet oder ihren Neigungswinkel bis auf 180° vergrössert, ein symmetrisches Trapezoid oder Deltoid. Man zeichne nun zuvörderst zwei dergleichen Deltoide, in der Lage wie $ACDE$ und $A'CDE'$ in Fig. 878, beschreibe aus A und A' mit AC zwei Kreise, trage in selbige die gleichschenklige Diagonale der Deltoide fünf Mal als Chorde ein, ziehe die Radien nach den Endpuncten dieser Chorden, beschreibe über ihnen mit der CD gleichschenklige Dreiecke, und ziehe endlich die symmetrischen Diagonalen der sämmtlichen Deltoide, so ist das verlangte Netz entworfen.

B. Hemiëdrische Gestalten.

§. 835.

Netz des Rhomboëders $\frac{m\text{P}}{2}$ oder mR.

Construction einer Fläche. Man zeichne zuvörderst eine Fläche ABC, Fig. 892, der Pyramide $m\text{P}$,

*) Aus §. 321 ist bekannt, dass die normale Polkante $\gtreqless$ als die diagonale Polkante, je nachdem $n \lesseqgtr 1{,}366\ldots$ ist.

Digitized by Google

nach der Regel des §. 833, ziehe die Höhenlinie AD, verlängere solche über die Grundlinie, und mache ihre Verlängerung $DE = \frac{1}{2}AD$; ziehe die EB und EC, und durch A ihre Parallelen AF und AG, so ist $AFEG$ die verlangte Fläche des Rhomboëders mR.

Construction des Netzes. Man zeichne eine der Flächen $ABCD$, Fig. 891, nach der so eben angegebenen Regel, und lege an sie eine zweite Fläche $BCEF$, indem man die AB und DC verlängert, und ihre Verlängerungen ihnen selbst gleich macht. Je nachdem nun das Rhomboëder ein spitzes oder stumpfes, beschreibe man aus den beiden einander diagonal gegenüberliegenden spitzen, oder aus den beiden analog gelegenen stumpfen Winkelpuncten A und E mit der Seite des Rhombus zwei Kreise, Fig 891 und 893, trage in jeden derselben die Brachydiagonale oder Makrodiagonale beiderseits als Chorde ein, ziehe die Radien nach den so bestimmten Puncten der Peripherien, und lege durch dieselben Puncte Parallelen der gezogenen Radien, so ist das verlangte Netz entworfen.

§. 836.

Netz des hexagonalen Skalenoëders $\pm\frac{mPn}{2}$.

Die diagonale Polkante Y der dihexagonalen Pyramide mPn verlängert sich durch die Hemiëdrie zu der stumpferen Polkante Y_1 des Skalenoëders, während ihr normaler Mitteleckpunct der Halbirungspunct der Mittelkante desselben wird. Kennt man also die Verlängerung von Y, so lässt sich die Fläche des Skalenoëders sehr leicht aus der Fläche seiner Muttergestalt finden. Nun ist in der dihexagonalen Pyramide nach §. 321

$$Y = \frac{\sqrt{m^2a^2(n+1)^2 + 3n^2}}{n+1}$$

und im Skalenoëder, nach §. 333,

$$Y_1 = \frac{2\sqrt{m^2 a^2 (n+1)^2 + 3n^2}}{3n}$$

also auch

$$Y_1 = \frac{2(n+1)}{3n} Y$$

und mithin die Verlängerung Σ von Y, damit aus ihr Y_1 werde,

$$\Sigma = \frac{2-n}{3n} Y$$

Hieraus ergiebt sich folgende Methode zur Construction der Fläche des Skalenoëders. Man zeichne eine Fläche *ABC* der dihexagonalen Pyramide *m*P*n*, Fig. 895, verlängere die der diagonalen Polkante entsprechende Seite *AB*, mache die Verlängerung

$$BD = \frac{2-n}{3n} \times AB$$

ziehe die *DC*, verlängere selbige, und mache *CE* = *DC*, ziehe endlich die *AE*, so ist *ADE* die verlangte Fläche des Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$.

Construction des Netzes. Je zwei in einer längeren Kante zusammenstossende Flächen des Skalenoëders bilden, wenn man sie in einer Ebene ausbreitet, oder ihren Neigungswinkel bis auf 180° vergrössert, ein Deltoid. Man zeichne nun zuvörderst ein dergleichen Deltoid *ABCD*, Fig. 896, und an eine seiner kürzeren Seiten *CD* sogleich ein zweites *A'B'CD*, beschreibe aus *A* und *A'* mit *AB* zwei Kreise, trage in selbige die gleichschenklige Diagonale *BD* nach beiden Seiten ein Mal als Chorde ein; ziehe hierauf die Radien nach ihren Endpuncten, beschreibe über jeder Chorde mit der kürzeren Seite *BC* ein gleichschenkliges Dreieck, und ziehe endlich die symmetrischen Diagonalen der Deltoide, so ist das Netz des Skalenoëders entworfen.

§. 837.

Fläche des Skalenoëders mR^n aus seinem eingeschriebenen Rhomboëder.

Man kann auch die Fläche des Skalenoëders aus den Elementen seines secundären Zeichens mR^n finden. Zu dem Ende beschreibt man erst den diagonalen Hauptschnitt des eingeschriebenen Rhomboëders mR, wie folgt. Ziehe eine verticale Linie, Fig. 901, nimm von einem ihrer Puncte M aus $MA = MA' = ma$, $MC = \frac{1}{3}ma$, $MB = MB' = 1$, beschreibe über BB' ein gleichseitiges Dreieck $BB'D$, und ziehe dessen Höhenlinie MD. Durch C lege eine Parallele der MD, und ziehe die $A'D$, welche diese Parallele in einem Puncte E schneidet; ziehe hierauf die AE und durch A' ihre Parallele, so wie durch A eine Parallele der $A'E$, so ist $AEA'E'$ der diagonale Hauptschnitt des eingeschriebenen Rhomboëders mR, und AE die Kantenlinie desselben.

Mache nun $AF = (n - 1) \times MA$, ziehe die FE und FE', so sind die drei Seiten der Fläche des Skalenoëders gefunden, denn es ist

AE die Mittelkante Z
FE die kürzere Polkante X
FE' die längere Polkante Y

Die Construction des Netzes wird nun nach der Regel des vorhergehenden §. vollzogen.

§. 838.

Netz des hexagonalen Trapezoëders $rl\frac{mPn}{2}$.

Construction einer Fläche. Die normale Mittelkante Z_1 des hexagonalen Trapezoëders $rl\frac{mPn}{2}$ ist der Lage nach identisch mit der Mittelkante Z des Skalenoëders $\pm\frac{mPn}{2}$, wie dies nicht nur aus den in

den §§. 298 und 310 aufgestellten Regeln der Ableitung, sondern auch aus der Identität der Gleichungen von Z in §. 332 und §. 352 erhellt. Es ist aber auch dieselbe Kante des Trapezoëders ein rationales Submultiplum der Kante des Skalenoëders, und darauf gründet sich eine sehr einfache Constructionsmethode der Fläche des Trapezoëders. Wir fanden nämlich in §. 333 für das Skalenoëder:

$$Z = \frac{2\sqrt{m^2a^2(2-n)^2+3n^2}}{3n}$$

und in §. 353 für das Trapezoëder:

$$Z_1 = \frac{2(n-1)\sqrt{m^2a^2(2-n)^2+3n^2}}{n(n+1)}$$

also ist auch

$$Z_1 = \frac{3(n-1)}{n+1}Z$$

Hieraus ergiebt sich folgende Regel für die Construction einer Fläche des Trapezoëders. Man zeichne eine Fläche ABC der dihexagonalen Pyramide mPn, Fig. 894, verlängere ihre, der diagonalen Polkante entsprechende Seite AB, mache die Verlängerung

$$BD = \frac{2-n}{3n} \times AB$$

und ziehe die DC; mache nun

$$CE = \frac{3(n-1)}{n+1} \times CD$$

ziehe die EB, verlängere sie so wie die EC über B und C, mache

$$CF = CE$$
$$BG = BE$$

und ziehe die AF und AG, so ist $AFEG$ die verlangte Fläche des Trapezoëders.

Construction des Netzes. Man zeichne erst ein Trapezoid $ABCD$, Fig. 898, und lege sogleich an dessen längere Mittelkante ein zweites $A'B'CD$ an, beschreibe hierauf aus A und A' mit AB zwei Kreise,

trage in selbige die gleichschenklige Diagonale der Trapezoide fünf Mal als Chorde ein, ziehe die Halbmesser nach den Endpuncten dieser Chorden, und beschreibe endlich über jeder derselben mit den beiden kürzeren Seiten *BC* und *DC* ein ungleichseitiges Dreieck, so ist das verlangte Netz entworfen.

C. Tetartoëdrische Gestalten.

§. 839.

Netz der trigonalen Pyramide $\frac{mP2}{4}$.

Man construirt eine Fläche *ABC* der hexagonalen Pyramide *m*P2 nach der Regel des §. 833, Fig. 897, verlängert ihre Grundlinie *BC* nach beiden Seiten, macht $BD = CE = BC$, und zieht *AD*, *AE*, so ist *ADE* die Fläche der trigonalen Pyramide.

Man zeichne nun über der Grundlinie *DE* sogleich eine zweite Fläche *A'DE*, beschreibe aus *A* und *A'* mit *AD* zwei Kreise, trage in selbige die *DE* zwei Mal als Chorde ein, und ziehe die Radien nach den Endpuncten der Chorden, so ist das Netz der trigonalen Pyramide entworfen.

§. 840.

Netz des trigonalen Trapezoëders $rl\frac{mPn}{4}$.

Die längere Mittelkante Z_1 des trigonalen Trapezoëders $\frac{mPn}{4}$ ist der Lage nach identisch mit der Mittelkante *Z* des Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$, wie sich aus der Ableitung beider Gestalten, und aus der Identität der Gleichungen von *Z* in §. 332 und §. 360 ergiebt. Dieselbe Kante des Trapezoëders ist aber auch ein rationales Multiplum der Kante des Skalenoëders; es ist nämlich nach §. 333 im Skalenoëder

Digitized by Google

$$Z = \frac{2\sqrt{m^2a^2(2-n)^2+3n^2}}{3n}$$

und nach §. 361 im trigonalen Trapezoëder

$$Z_1 = \frac{2(2n-1)\sqrt{m^2a^2(2-n)^2+3n^2}}{3n}$$

also auch

$$Z_1 = (2n-1)Z$$

und die erforderliche Verlängerung Σ von Z, damit es in Z_1 übergehe,

$$\Sigma = 2(n-1)Z$$

Auf diesem Verhältnisse beider Kantenlinien beruht einerseits die Construction der Trapezoëderfläche; anderseits darauf, dass die kürzeren Mittelkanten des Trapezoëders die Nebenaxen in der Centraldistanz n schneiden.

Wir erhalten daher folgende Regel für die Construction der verlangten Fläche. Man zeichne nach der Regel des §. 834 eine Fläche ABC der dihexagonalen Pyramide mPn, Fig. 900, verlängere die der diagonalen Polkante entsprechende Linie AB, und mache

$$BD = \frac{2-n}{3n} \times AB$$

ziehe die DC, verlängere sie, mache ihre Verlängerung

$$DE = 2(n-1) \times DC$$

und sogleich $CH = CE$; verlängere nun die CB, und mache

$$BF = n \times BC$$

ziehe die EF, mache ihre Verlängerung FG ihr selbst gleich, und ziehe endlich die AH und AG, so ist $AGEH$ die verlangte Fläche des Trapezoëders.

C o n s t r u c t i o n d e s N e t z e s. Man verfährt ganz auf dieselbe Art wie bei der Construction des Netzes des hexagonalen Trapezoëders, und erhält so das verlangte Netz Fig. 899.

IV. Gestalten des rhombischen Systemes.

A. Holoëdrische Gestalten.

§. 841.

Netz einer rhombischen Pyramide.

Die Fläche einer rhombischen Pyramide, deren Axen das Verhältniss $a : b : c$ haben, ist leicht gefunden. Man ziehe zwei sich rechtwinklig schneidende Linien, Fig. 902, mache

$$MA = a, \quad MB = b, \quad MC = c$$

ziehe die AB, BC und AC, so sind diese Linien die drei Seiten der verlangten Fläche.

Um das Netz zu erhalten, zeichne man zuvörderst zwei in symmetrischer Lage an einander stossende Flächen, ABC und $A'BC$, Fig. 903, beschreibe aus ihren gegenüberliegenden Winkelpuncten A und A' mit der kürzeren Seite AC zwei Kreise, welche die längeren Seiten in den Puncten D und D' schneiden, trage in diese Kreise die DC drei Mal als Chorde ein, ziehe die Radien nach den dadurch bestimmten Puncten E, E und F, verlängere die AF und mache $AG = AB$, ziehe endlich die BE, EG und GC, so ist das verlangte Netz entworfen.

B. Hemiëdrische Gestalten.

§. 842.

Netz des rhombischen Sphenoides.

Soll man das Netz des aus einer rhombischen Pyramide abgeleiteten Sphenoides entwerfen, so zeichnet man erst eine Fläche dieser Pyramide nach der Regel des vorhergehenden §., legt durch die drei Winkelpuncte derselben Parallelen mit den gegenüberliegenden Seiten, so ist die Fläche des Sphenoides gefunden.

Das Netz entwirft man entweder durch Wiederholung derselben Construction, in welchem Falle es

Digitized by Google

triangulär, oder durch Anwendung der analogen Construction wie in §. 821, in welchem Falle es rhomboidisch wird.

V. Gestalten des monoklinoëdrischen Systemes.

§. 843.

Netz einer vollständigen monoklinoëdrischen Pyramide.

Die Elemente der gegebenen Pyramide sind
das Verhältniss $a:b:c$, und
der Winkel C oder γ

Man ziehe zwei sich unter dem Winkel γ schneidende Linien, Fig. 904, errichte aus dem Puncte M auf jeder Linie eine Normale, und mache nun

$$MA = a$$
$$MB = MB' = b$$
$$MC = MC = c$$

ziehe hierauf die AB, AB', AC und BC, so ist
AB die klinod. Polk. von $+$P
AB' - - - - - $-$P
AC die orthod. Polkante
BC die Mittelkante

Man beschreibe also über BC als Grundlinie einmal mit AB und AC, und darauf mit AB' und AC ein Dreieck, so sind die Flächen der beiden Theilgestalten der Pyramide gefunden.

Bei der Entwerfung des Netzes hat man nur darauf zu sehen, dass die einzelen Glieder der Theilgestalten gehörig vertheilt werden, indem sie einander diagonal gegenüberliegen müssen.

VI. Gestalten des di- und triklinoëdrischen Systemes.

§. 844.

Netz einer vollständigen di- oder triklinoëdrischen Pyramide.

Die Elemente der gegebenen Pyramide sind
das Verhältniss $a:b:c$ und
die Winkel α, β und γ

Digitized by Google

Man zeichne nun erst zwei, sich unter dem Winkel γ schneidende Linien, Fig. 905, und lege durch ihren Durchschnittspunct eine dritte Linie, welche die MA unter dem Winkel β schneidet, mache hierauf $MA = a$, $MB = MB' = b$, $MC = MC' = c$, ziehe die AB, AB' und AC, AC', so sind diese die vier Polkantenlinien der verlangten Pyramide. Nun lege man durch M eine vierte Linie MD, welche die BB' unter dem Winkel α schneidet, mache $MD = MC = c$, ziehe die BD und $B'D$, so sind diese die beiden Mittelkantenlinien.

Nachdem so die sechs verschiedenen Kantenlinien gefunden sind, hat man bei der Verzeichnung der Flächen der vier Theilgestalten sorgfältig darauf Acht zu geben, wie diese Flächen in Bezug auf die spitzen oder stumpfen Werthe der Winkel α, β und γ aus je dreien jener Linien zu construiren sind. Jede der drei Seiten einer Fläche überspannt einen jener Winkel; man hat aber bei der Construction jeder Fläche darauf zu sehen, ob ihre respective makrodiagonale, brachydiagonale und basische Kantenlinie den stumpfen oder den spitzen Winkel β, γ und α überspannt, und demgemäss die längere oder kürzere der Seiten AB, AC und BD zu nehmen.

Digitized by Google

Fig. 4

. 489

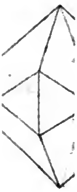


Fig..

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 525

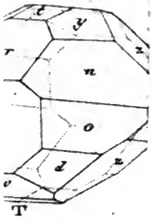
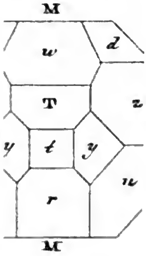
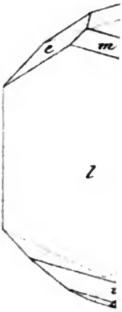
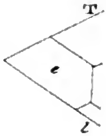


Fig. 525 a







Digitized by Google

Fig. 5

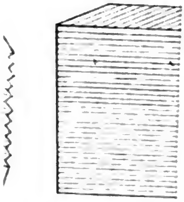


Fig. 557

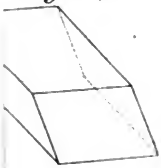
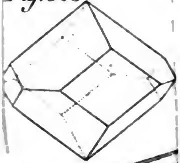
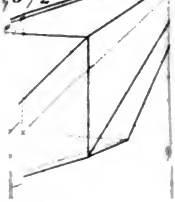


Fig. 565



572



Digitized by Google

Fig. 577

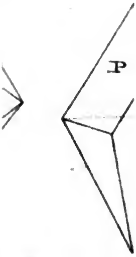
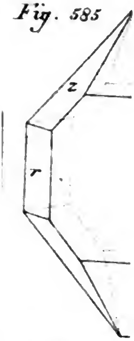
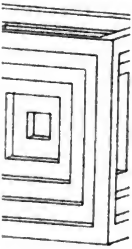
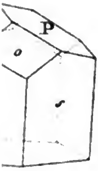


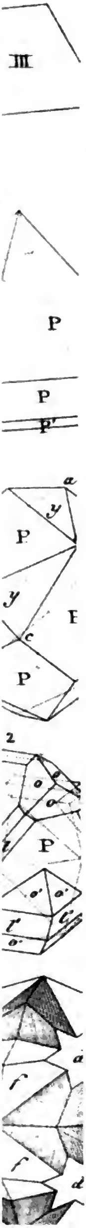
Fig. 585







Digitized by Google



Digitized by Google

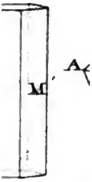
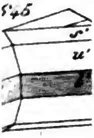


Fig. 64

545



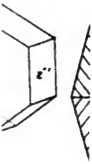
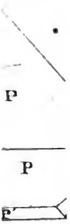


Fig.

Digitized by Google

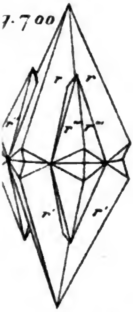
680



ig. 68

Digitized by Google

…g. 700



Fig

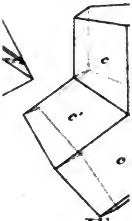
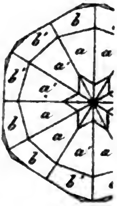
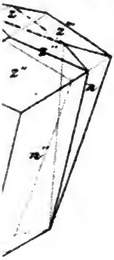


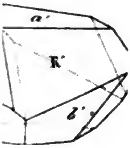
Fig.



…0



…ig. 727



Digitized by Google

Fig. 734

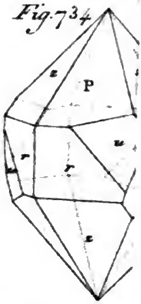


Fig. 741

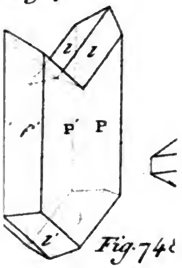
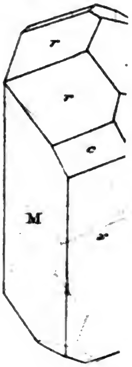
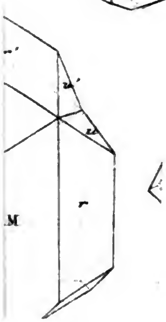


Fig. 74





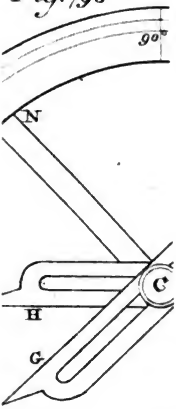
Digitized by Google

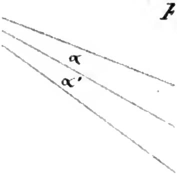
Digitized by Google

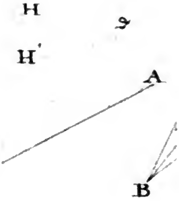
Digitized by Google

Digitized by Google

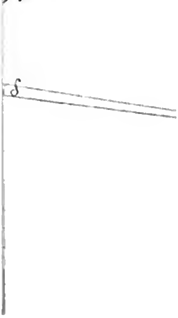
Fig. 790







94



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig

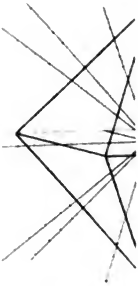
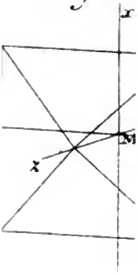
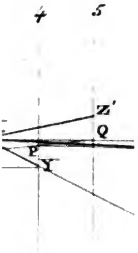
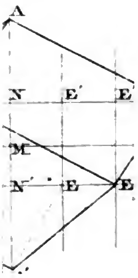


Fig. 80

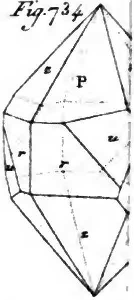






Digitized by Google

Fig. 734



741

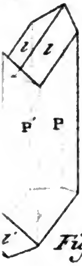
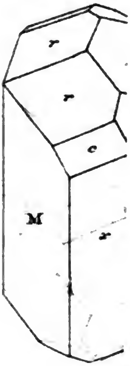
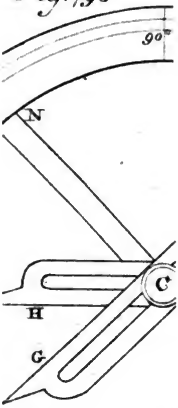


Fig. 74

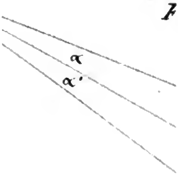


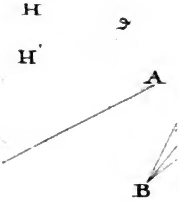
Digitized by Google

Fig. 790

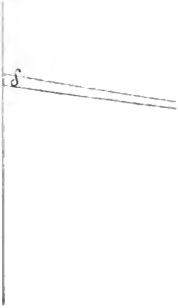


F





94



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig

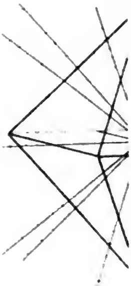
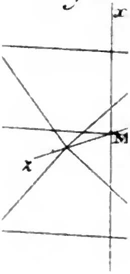
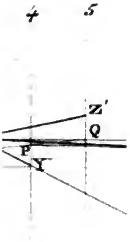
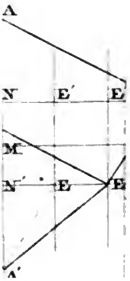


Fig. 80.







Digitized by Google

Fig

a

c

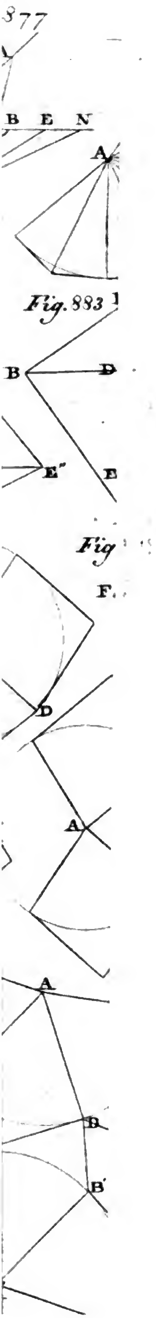
c

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google


877
B E N
A
Fig. 883
B
D
E″
E
Fig
F.
D
A
A
B
B′

Digitized by Google

Digitized by Google

This book should be returned to the Library on or befo[re the last date] stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

HW 2KU9 B

Digitized by Google